

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em



matemática
e suas aplicações

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em



matemática
e suas aplicações

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

162 Investigação científica em matemática e suas aplicações /
Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta
Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0116-2
DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205>

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva,
Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro “*Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações*” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva


SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

META-AVALIAÇÃO DE AVALIAÇÃO RELACIONADA À APRENDIZAGEM DE CONCEITOS LÓGICO-MATEMÁTICOS COM UTILIZAÇÃO DE JOGO DIGITAL

Lucí Hildenbrand

Janaína de Oliveira Augusto

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212051>

CAPÍTULO 2..... 11


VIVÊNCIAS DE OFICINA PEDAGÓGICA: A GINCANA E O MATEMATIZAR POR MEIO DE DIFERENTES METODOLOGIAS ATIVAS

Raimundo Santos Filho

Patrícia Barbosa dos Santos

Vinicius Christian Pinho Correia

Américo Junior Nunes da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212052>

CAPÍTULO 3..... 30


MODELOS MATEMÁTICOS E EPIDEMIAS

Célia Maria Rufino Franco

Ivo Dantas de Araújo

Mateus Ferreira Carvalho da Silva

Eduardo da Silva Lima

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212053>

CAPÍTULO 4..... 42

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE RESPUESTAS AL CÁLCULO DE LA POTENCIA EN UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Osmar Dario Vera

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212054>


CAPÍTULO 5..... 54

ESTUDO DOS FRACTAIS NAS SÉRIES E CÁLCULO NUMÉRICO

Eduarda Maschio Belarmino

Dione Ines Christ Milani

Gustavo Henrique Dalposso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212055>

CAPÍTULO 6..... 60








O USO DA COMPUTAÇÃO GRÁFICA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA







Guilherme Porto

Débora Marília Hauenstein


André Luis Andrejew Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212056>

CAPÍTULO 7.....	68
DE LOS REALES A LOS COMPLEJOS, SÓLO HAY UN PEQUEÑO PASO	
Marisol Radillo Enríquez	
Vladimir Efremov	
Juan Martín Casillas González	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212057	
CAPÍTULO 8.....	76
O ENSINO DE SOMA E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS NO 6º ANO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO DISCO DE FRAÇÃO	
Alan Jorge de Jesus Silva	
Beatriz de Vilhena Medeiros	
Pedro Lucas Viana Ferreira	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212058	
CAPÍTULO 9.....	89
INTRODUÇÃO ÀS IDENTIDADES FUNCIONAIS	
Mateus Eduardo Salomão	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212059	
CAPÍTULO 10.....	93
DESDE LA FORMACIÓN PERMANENTE A LA COMPETENCIA PROFESIONAL	
Núria Rosich Sala	
Yolanda Colom Torrens	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120510	
CAPÍTULO 11.....	101
A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM 2 E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS	
Mateus Eduardo Salomão	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120511	
CAPÍTULO 12.....	106
LUDICIDADE NO ENSINO APRENDIZAGEM: UMA ALIADA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA MATEMÁTICA	
Márcia Cristianne Ramos de Araújo	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120512	
CAPÍTULO 13.....	122
ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER	
Matheus Lima Cornejo	
Fabio Alexander Fajardo Molinares	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120513	

CAPÍTULO 14	139
PANORAMA DAS PUBLICAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO BANCO DE DISSERTAÇÕES E TESES DA CAPES NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	
Creomar Moreira da Cruz Ana Cristina Gomes de Jesus Nilton Cezar Ferreira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120514	
CAPÍTULO 15	143
MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE REAÇÃO-DIFUSÃO	
Rosangela Teixeira Guedes	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120515	
CAPÍTULO 16	154
O “SEGUIR REGRAS” DE WITTGENSTEIN: UMA ANÁLISE A PARTIR DA CONSTRUÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES AFIM	
Tatiana Lopes de Miranda	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120516	
CAPÍTULO 17	171
ABORDAGENS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: OS DESAFIOS DA SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Dionísio Burak Laynara dos Reis Santos Zontini	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120517	
CAPÍTULO 18	182
GEOGEBRA: A TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS SURDOS	
Gustavo Henrique Silva Wáquila Pereira Neigrames	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120518	
CAPÍTULO 19	190
PREVISÃO DO ÍNDICE BURSÁTIL IBEX 35 USANDO REDES NEURAS ARTIFICIAIS	
Salvador Falcón Canillas Carlos Roberto Minussi	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120519	
CAPÍTULO 20	242
METODOLOGIA AULA INVERTIDA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS: UNA APROXIMACION CONCEPTUAL	
Mileidy Marcela Velásquez Aguirre Neder Manuel Palma Caballero Steven Alberto Liévano González	

Saraí Ana Ortega Pineda

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120520>

SOBRE O ORGANIZADOR.....	256
ÍNDICE REMISSIVO.....	257

MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE REAÇÃO-DIFUSÃO

Data de aceite: 02/05/2022

Data de submissão: 17/04/2022

Rosangela Teixeira Guedes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio, Paraná
<http://lattes.cnpq.br/6229392665915856>

RESUMO: Neste trabalho apresentamos o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet. Equações de reação-difusão tem sido utilizadas para modelar fenômenos que envolvem a dispersão e a interação dentro de uma determinada região, enquanto que a parte reativa esta relacionado a interação. O objetivo é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão para determinar os pontos de bifurcação. Resultados do Teorema de Crandall-Rabinowitz determina que o equilíbrio nulo é o ponto de bifurcação do problema de reação de difusão.

PALAVRAS-CHAVE: Bifurcação; Liapunov-Schmidt; Reação de Difusão.

LIAPUNOV-SCHMIDT METHOD WITHOUT SYMMETRY AND APPLICATION IN THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM

ABSTRACT: In this work we present the problem of diffusion reaction with Dirichlet conditions. Reaction-diffusion equations have been used to model phenomena that involve dispersion and interaction within a given region, while the reactive part is related to interaction. The objective is

to apply Liapunov-Schmidt Reduction without Symmetry in the Reaction-Diffusion Equation to determine the bifurcation points. Results of the Crandall-Rabinowitz Theorem determines that the null equilibrium is the bifurcation point of the diffusion reaction problem.

KEYWORDS: Bifurcation; Liapunov-Schmidt; Diffusion Reaction.

1 | INTRODUÇÃO

Este trabalho considera o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = Du_{\xi\xi} - f(u), 0 < \xi < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

e u é uma função escalar, e por simplicidade, consideramos a difusão em apenas uma dimensão espacial. Sejam as hipóteses $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$ então $u = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado da ODE associada a equação (1) e é instável. Além disso, com as condições de Dirichlet, $u = 0$ também é solução da EDP. Se a difusão é suficientemente pequena (resp. grande), a solução trivial da EDP é instável (resp. estável). Equações de reação-difusão são problemas comuns de bifurcação, o qual pode ser resolvido pela Redução de Liapunov-Schmidt e a solução trivial do problema (1) é do tipo bifurcação transcritical se $f''(0) \neq 0$. Equações de reação-difusão são uma fonte comum de problemas que apresentam bifurcação.

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes que são baseados nas referências

[1], [2] e [3] que são fundamentais para o resultado Principal da seção 3 que é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão (1).

21 RESULTADOS DE BIFURCAÇÃO, TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, TEOREMA DE CRANDALL-RABINOWITZ E O MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA

Definição 2.1: Sejam M um espaço métrico, X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F: M \times X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua.

Seja $S = \{(\lambda, u(\lambda)) \mid \lambda \in M\}$ uma curva contínua de soluções de $F \equiv 0$. Dizemos que $(\lambda_0, u_0) \in M \times X$ é um ponto de bifurcação de $F \equiv 0$ com relação a curva S se são satisfeitas as seguintes afirmações:

- (i) (λ_0, u_0) é um ponto interior de S ;
- (ii) para toda vizinhança U de $(\lambda_0, u_0) \in M \times X$, existe uma solução de $F \equiv 0$ que pertence a U e não pertence a S .

Sejam as soluções analíticas de um problema não-linear $F(x, y) = 0$, onde F é uma aplicação $F: U \times V \rightarrow Z$ com conjuntos abertos $U \subset X$, $V \subset Y$, e em que X, Y, Z são espaços de Banach(real), segue o Teorema da Função Implícita.

Teorema 2.2(Teorema da Função Implícita) Seja $F(x, y) = 0$ tem uma solução $(x_0, y_0) \in U \times V$ tal que a derivada de Fréchet de F em relação a x em (x_0, y_0) é bijetora: $F(x_0, y_0) = 0$, $D_x F(x_0, y_0): X \rightarrow Z$ é limitada (contínua) com inversa limitada (Teorema de Banach). Suponha que F e $D_x F$ são contínuas:

$$F \in C(U \times V, Z), D_x F \in C(U \times V, L(X, Z)), \text{ em que } L(X, Z)$$

denota o espaço de Banach de operadores lineares limitados de X em Z dotado com o operador norma.

Então existe uma vizinhança $U_1 \times V_1$ em $U \times V$ de (x_0, y_0) e uma aplicação $f: V_1 \rightarrow U_1 \subset X$ tal que: $f(y_0) = x_0$, $F(f(y), y) = 0$, $\forall y \in V_1$.

Além disso, f é contínua em V_1 (isto é, $f \in C(V_1, X)$). Finalmente, cada solução de $F(x, y) = 0$ em $U_1 \times V_1$ é da forma $(f(y), y)$.

Uma condição necessária para que (λ_0, u_0) seja um ponto de bifurcação é que o operador $du f(\lambda_0, u_0)$ não seja inversível. No caso em que isso não ocorre, pelo Teorema das Funções Implícitas, podemos concluir, que (λ_0, u_0) não é um ponto de bifurcação.

Teorema 2.3(Crandall-Rabinowitz) Sejam X e Y espaços de Banach sobre \mathbb{R} , S um aberto em \mathbb{R} , V um aberto em X , F uma aplicação de classe C^2 em $S \times V$ a valores em Y e $\lambda_0 \in S$ satisfazendo as seguintes afirmações:

- (i) $F(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in S$;
- (ii) a dimensão do $\text{Ker}((duF)(\lambda_0, u_0))$ e a codimensão de $R((duF)(\lambda_0, u_0))$ sobre \mathbb{R} são iguais a um;
- (iii) o núcleo de $duF(\lambda_0, u_0)$ é gerado por u_0 , onde $u_0 \in X$;

(iv) $d^{\rho} \lambda u F(\lambda 0, 0) \cdot u 0$ não pertence à imagem de $du F(\lambda 0, 0)$.

Seja Z um subespaço fechado de X tal que $X = [u 0] \oplus Z$ (isto é, todo $u \in X$ pode ser escrito como $u = \alpha u 0 + z$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in Z$). Então, existem $\delta > 0$, $\lambda :] - \delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi :] - \delta, \delta[\rightarrow Z$ de classe C^1 , com $\lambda(0) = \lambda 0$ e $\varphi(0) = 0$ e $F(\lambda(s), s(u 0 + \varphi(s))) = 0$, para todo $s \in] - \delta, \delta[$. Além disso, existe uma vizinhança de $(\lambda 0, u 0)$ em $S \times V$ tal que todo zero de F é da forma $(\lambda, 0)$ ou $(\lambda(s), s(u 0 + \varphi(s)))$, para algum $s \in] - \delta, \delta[$.

Definição 2.4: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K . Um operador $L : X \rightarrow Y$ linear contínuo é um operador de Fredholm se são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) $\text{Ker}(L)$ é um subespaço de X de dimensão finita sobre K ;
- (ii) $R(L)$ (Imagem de L) é um subespaço de codimensão finita de Y , isto é, a dimensão de $Y/R(L)$ sobre K é finita.

Proposição 2.5: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \rightarrow Y$ um operador linear contínuo. Se a dimensão de $R(L)$ é finita, então $R(L)$ é um subespaço fechado de Y .

Demonstração: Seja $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ uma base de $Y/R(L)$. Mostraremos que $Y = [v_1, v_2, \dots, v_n] \oplus R(L)$. Se $v \in Y$. Então, $\bar{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{v}_j = \overline{\sum_{j=1}^n \beta_j v_j}$ e assim $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j + v_0$ em que $v_0 \in R(L)$. Se $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n] \cap R(L)$, então $\bar{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{v}_j = \overline{\sum_{j=1}^n \beta_j v_j} \in R(L)$ e $\bar{0} = \bar{v} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{v}_j$. Como $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ é linearmente independente, temos que $\beta_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e, portanto $v = 0$. Em seguida, provaremos que $R(L)$ é fechado em Y . Seja $T : X/\text{Ker}(L) \times K^n \rightarrow Y$ definida por $T(\bar{u}, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j v_j + L(u)$ onde os v_j são como acima descrito. Temos que T é sobrejetora. Mostraremos que T é injetora. De fato, seja $(\bar{u}, x_1, \dots, x_n)$ tal que $T(\bar{u}, x_1, \dots, x_n) = 0$, isto é, $L(u) = -\sum_{j=1}^n x_j v_j$. Então, $\sum_{j=1}^n x_j \bar{v}_j = \bar{0}$ e como $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ é linearmente independente, segue que $x_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $L(u) = 0$, isto é, $u \in \text{Ker}(L)$ e, assim $\bar{u} = \bar{0}$. Desse modo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a imagem por T de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado em Y , e portanto $T(X/\text{Ker}(L) \times \{(0, \dots, 0)\}) = R(L)$ é fechado em Y .

Definição 2.6: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \rightarrow Y$ um operador de Fredholm. O índice de L é o número inteiro $\dim_K \text{Ker}(L) - \text{codim}_K R(L)$ e o denotamos por $\text{ind}(L)$.

A Proposição seguinte nos fornece uma propriedade dos operadores de Fredholm.

Proposição 2.7: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \rightarrow Y$ um operador de Fredholm. Então, existem M e N subespaços fechados de X e Y , respectivamente, tais que

- (i) X é uma soma direta de $\text{Ker}(L)$ e M ;
- (ii) Y é uma soma direta de N e $R(L)$.

Demonstração: O item (ii) foi provado na Proposição 2.4.2. Para provarmos o item (i), suponhamos que $\text{Ker}(L) = [u_1, \dots, u_m]$ e seja $f_1 : [u_1] \rightarrow K$ o funcional linear definido por $f_1(a_1 u_1) = a_1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g_1 : X \rightarrow K$ funcional linear tal que $g_1|_{[u_1]} = f_1$. Seja $X_1 = \text{Ker}(g_1)$. Afirmamos que $X = [u_1] \oplus X_1$. De fato, se $u \in X$, então $u = g_1(u)u_1 + (u - g_1(u)u_1)$, onde $g_1(u)u_1 \in [u_1]$ e $u - g_1(u)u_1 \in X_1$. Se $u \in [u_1] \cap X_1$, então $u = a_1 u_1$ e $0 = g_1(a_1 u_1) = a_1$ e, assim, $u = 0$. Seja $V = [u_1, \dots, u_{m-1}]$ e suponhamos que $X = V \oplus P$, onde P é um subespaço fechado de X . Como $u_m \notin V$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in K$ tais que $u_m = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} + v$, onde $v \in P$ e $v \neq 0$. Seja $f : [v] \rightarrow K$ o funcional linear definido por $f(\alpha v) = \alpha$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g : P \rightarrow K$ funcional linear tal que $g|_{[v]} = f$. Afirmamos que $P = [v] \oplus \text{Ker}(g)$. Com efeito, se $u \in P$, então $u = g(u)v + (u - g(u)v)$, onde $g(u)v \in [v]$ e $u - g(u)v \in \text{Ker}(g)$. Se $u \in [v] \cap \text{Ker}(g)$, então $u = \alpha v$ e $0 = g(\alpha v) = \alpha$ e, assim $u = 0$. Logo,

$$X = V \oplus P = [u_1, \dots, u_{m-1}] \oplus [v] \oplus \text{Ker}(g) = \text{Ker}(L) \oplus \text{Ker}(g).$$

Descrivemos abaixo o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt. Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F : K^{k+1} \times X \rightarrow Y$ um operador suave que satisfaz $F(0,0) = 0$. O nosso objetivo é utilizar o processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt para resolver a equação $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, u) = 0$ numa vizinhança da origem em $K^{k+1} \times X$. Vamos supor que $L := dF(0,0)$ (derivada de F com relação a segunda variável calculada em $(0,0)$) seja um operador de Fredholm de índice zero.

Primeiro Passo: Decompomos os espaços X e Y como $X = \text{ker}(L) \oplus M$ e $Y = N \oplus R(L)$, onde M e N são subespaços fechados de X e Y . Notemos que, como L é um operador de Fredholm de índice zero, temos que $\dim_K \text{Ker}(L) = \dim_K (N)$.

Segundo Passo: Seja $Q : Y \rightarrow R(L)$ a projeção com $\text{Ker}(Q) = N$. Observemos que $F(\lambda, u) = 0$ se, e somente se, $Q(F(\lambda, u)) = 0$ e $(I - Q)(F(\lambda, u)) = 0$.

Terceiro Passo: Usando o fato de que $X = \text{Ker}(L) \oplus M$, escrevemos $u = v + w$, onde $v \in \text{Ker}(L)$ e $w \in M$. Seja $G : K^{k+1} \times \text{Ker}(L) \times M \rightarrow R(L)$ a função definida por $G(\lambda, v, w) = Q(F(\lambda, v + w))$. Então, $d_w G(0,0,0) \cdot w = Q(d_u F(0,0) \cdot w) = Q(L \cdot w) = L \cdot w$, para todo $w \in M$. Notemos que $L : M \rightarrow R(L)$ é injetora. De fato, seja $u \in M$ tal que $L(u) = 0$. Então, $u \in \text{Ker}(L) \cap M = \{0\}$, portanto $u=0$. A aplicação L também é sobrejetora. Com efeito, seja $v \in R(L)$. Então existe $u \in X$ tal que $v = L(u)$. Podemos escrever $u = v_0 + w_0$, onde $v_0 \in \text{Ker}(L)$ e $w_0 \in M$, obtendo $v = L(w_0) \in L(M)$. Como M e $R(L)$ são espaços de Banach e $L : M \rightarrow R(L)$ é linear, contínua e sobrejetora, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que $L^{-1} : R(L) \rightarrow M$ é linear e contínua. Logo, pelo Teorema das Funções Implícitas, existem $B\delta_1(0) \subset K^{k+1}$, $B\delta_2(0) \subset \text{Ker}(L)$, $B\delta_3(0) \subset M$ e $W : B\delta_1(0) \times B\delta_2(0) \rightarrow B\delta_3(0)$ tal que $W(0,0) = 0$, para todo $\lambda \in B\delta_1(0)$ e para todo $v \in B\delta_2(0)$, tem-se $Q(F(\lambda, v + W)) = 0$ se, e somente se, $w = W(\lambda, v)$.

Quarto Passo: Seja $\phi : B\delta_1(0) \times B\delta_2(0) \rightarrow N$ a função definida por

$$\phi(\lambda, v) = (I - Q)(F(\lambda, v + W(\lambda, v))).$$

Quinto Passo: Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ uma base de $\text{Ker}(L)$ sobre K . Como $\text{ker}(L)$ e N têm a mesma dimensão, seja $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ uma base de N sobre \mathbb{K} e $\{v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*\}$ a base dual de $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Então, $\langle v_i^*, u_j \rangle = v_i^*(u_j) = \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Usando o fato de que

$\phi(\lambda, v) \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda \in B\delta_1(0)$ e para todo $v \in B\delta_2(0)$, definimos a função ψ_i .

Sexto Passo: Seja $i \in \{1, \dots, m\}$ e seja $\psi_i : B\delta_1(0) \times K^m \rightarrow K$ a função definida como

$$\psi_i \left(\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_m) \right) = \left\langle v_i^*, \varphi \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right\rangle$$

logo, para $i = 1, 2, \dots, m$ substituindo o Quarto Passo no Sexto Passo e usando as projeções, podemos escrever

$$\psi_i \left(\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_m) \right) = \left\langle v_i^*, F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right\rangle$$

O próximo resultado garante localmente uma correspondência biunívoca entre as soluções de $F \equiv 0$ e as soluções de $\psi \equiv 0$, onde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ e a equação $\psi \equiv 0$ é chamada de equação de bifurcação .

Proposição 2.8: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F : K^{k+1} \times X \rightarrow Y$ um operador suave satisfazendo $F(0,0) = 0$. Seja W a função definida no terceiro passo do Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt e seja ψ a função definida no sexto passo. São equivalentes as seguintes afirmações:

- a) $(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_m) \in B\delta_1(0) \times K^m$ é uma solução de $\psi \equiv 0$.
- b) $(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W(\sum_{j=1}^m x_j v_j)) \in B\delta_1(0) \times B\delta_2(0) \times B\delta_3(0)$ é uma solução de $F \equiv 0$.

Demonstração: Seja $(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_m) \in B\delta_1(0) \times K^m$ uma solução de $\psi \equiv 0$. Então,

$$0 = \left\langle v_i^*, \varphi \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right\rangle = \left\langle v_i^*, F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right\rangle$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, e assim $F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) = 0$ provando a afirmação (b).

Seja $\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \in B_{\delta_1}(0) \times B_{\delta_2}(0) \times B_{\delta_3}(0)$ uma solução de $F \equiv 0$. Sendo W a função definida no terceiro passo da Decomposição, temos que $Q \left(F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right) = 0$ e portanto $\varphi \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) = 0$ então $\psi(\lambda, x_1, \dots, x_m) = 0$, mostrando que a afirmação (b) implica (a). A seguir, obtemos o valor de algumas derivadas de ψ na origem. Estas derivadas aparecem em algumas hipóteses do Equivariant Branching-Lemma.

Consideremos a equação $Q \left(F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right) = 0$ e fixemos $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e derivamos a equação anterior com relação a variável x_i . Obtemos:

$$Q \left(d_u F \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j \right) \right) \cdot \left(v_i + d_v W \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j \right) \cdot v_i \right) \right) = 0$$

escrevendo $\lambda_0 = 0$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = (0, 0, \dots, 0)$ e usando que $W(0,0) = 0$ e $L = duF(0,0)$, obtemos $Q(L(dvW(0,0).vi)) = 0$.

Temos que $L(dvW(0,0).vi) \in \text{Ker}(Q) = N$. Pelo fato de $N \cap R(L) = \{0\}$ segue que $L(dvW(0,0).vi) = 0$. Logo, $dvW(0,0).vi \in \text{Ker}(L) \cap M = \{0\}$, isto é, $dvW(0,0).vi = 0$ e temos que

$$\varphi \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) = (I - Q) \left(F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right)$$

e seja $\tilde{\varphi}(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_m) := \varphi \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right)$. Fixemos $i, j, l \in \{1, 2, \dots, m\}$. temos:

- $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(0, 0) = (I - Q)(d_u F(0, 0).(v_i + d_v W(0, 0).v_i))$$

$vi \in \text{Ker}(duF(0,0))$ e $dvW(0,0).vi = 0$;

- $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0) = (I - Q)(d_u^2 F(0, 0).(v_i, v_j)$

- $\frac{\partial^3 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(0, 0) = (I - Q)(L(d_v^3 W(0, 0)(v_i, v_j, v_l)))$
 $+ (I - Q)(d_u^2 F(0, 0)(v_i, d_v^2 W(0, 0).(v_j, v_l)))$
 $+ (I - Q)(d_u^2 F(0, 0)(v_j, d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_l)))$
 $+ (I - Q)(d_u^2 F(0, 0)(v_l, d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_j)))$

+ $(I - Q)(d_u^3 F(0, 0).(v_i, v_j, v_l))$; e para $s \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$ fixado temos:

- $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial \lambda_s}(0, 0) = (I - Q)(d_u^2 F(0, 0).(v_i, d_{\lambda_s} W(0, 0)) + d_{\lambda_s}^2 F(0, 0).(v_i))$

Agora, determinamos $d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_j)$, $d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_l)$, $d_v^2 W(0, 0).(v_j, v_l)$ e $d_{\lambda_s} W(0, 0)$. Faremos os cálculos apenas para $d_{\lambda_s} W(0, 0)$ e $d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_j)$, pois os outros casos são análogos. Consideremos a equação

$$Q \left(F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \right) = 0 \quad (2)$$

Derivando a equação (2) em relação à variável x_i obtemos

$$Q \left(d_u F \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \right) \cdot \left(v_i + d_v W \left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j \right) \cdot v_i \right) \right) = 0;$$

e derivando esta equação com relação à variável x_j temos $Q \left(d_u F \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j) \right) \cdot \left(d_v^2 W(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j) \cdot (v_i, v_j) \right) \right) + Q \left(d_u^2 F \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j) \right) \cdot (v_i + d_v W(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j) \cdot v_i, v_j + d_v W(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j) \cdot v_j) \right) = 0$. Fazendo $\lambda_0 = 0$, $(x_1^0, \dots, x_m^0) = (0, \dots, 0)$ e usando que $dvW(0,0).vi = 0$, $W(0,0) = 0$, $L = duF(0,0)$ e Q e a projeção em $R(L)$ obtemos $L(d^2vW(0,0).(vi,vj)) = -Q(d^2uF(0,0).(vi,vj))$. Como $L|_M$ é inversível, segue que $d_v^2 W(0, 0).(v_i, v_j) = -L^{-1}(Q(d_u^2 F(0, 0).(v_i, v_j)))$ e agora, determinamos $W_{\lambda_s}(0,0)$.

Derivando a equação (2) em relação à variável λ_s :

$$Q \left(d_{\lambda_s} F \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j \right) \right) \right) \\ + Q \left(d_u F \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j \right) \right) \cdot \left(d_{\lambda_s} W \left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j \right) \right) \right) = 0$$

e fazendo $\lambda_0 = 0$, $(x_1^0, \dots, x_m^0) = (0, \dots, 0)$ temos $Q(d_{\lambda_s} F(0,0) + L.(d_{\lambda_s} W(0,0))) = 0$, isto é, $L(d_{\lambda_s} W(0,0)) = -Q(d_{\lambda_s} F(0,0))$, e assim $d_{\lambda_s} W(0,0) = -L^{-1}(Q(d_{\lambda_s} F(0,0)))$.

Portanto,

- $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0) \right\rangle = 0$;
- $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) \right\rangle = \langle v_i^*, d_u^2 F(0,0).(v_i, v_j) \rangle$
- $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_l}(0,0) = \langle v_i^*, d_u^2 F(0,0).(v_j, v_l) \rangle$
- $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i \partial x_l}(0,0) = \langle v_i^*, d_u^2 F(0,0).(v_i, v_l) \rangle$
- $\frac{\partial^3 \psi_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial^3 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(0,0) \right\rangle = \langle v_i^*, V \rangle$ onde

$$V = d^3 u F(0,0).(v_i, v_j, v_l) + \\ d^2 u F(0,0).(v_i, d^2 u W(0,0).(v_j, v_l)) \\ + d^2 u F(0,0).(v_j, d^2 u W(0,0).(v_i, v_l)) \\ + d_u^2 F(0,0).(v_l, d_u^2 W(0,0).(v_i, v_j));$$

- $\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_s}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \lambda_s}(0,0) \right\rangle = \langle v_i^*, d_{\lambda_s} F(0,0) \rangle$
- $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial \lambda_s}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_j \partial \lambda_s}(0,0) \right\rangle = \langle v_i^*, d_{u \lambda_s}^2 F(0,0).v_j \rangle \\ + \langle v_i^*, d_u^2 F(0,0).(v_j, -L^{-1}(Q(d_{\lambda_s} F(0,0)))) \rangle.$

Teorema 2.9: Existe uma vizinhança $U_2 \times V_2$ de (x_0, y_0) em $U \times V \subset X \times Y$ tal que o problema $F(x,y) = 0$, para $(x,y) \in U_2 \times V_2$ é equivalente a um problema de dimensão finita

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(v, y) = 0, \text{ para } (v, y) \in \mathcal{U}_2 \times V_2 \subset N \times Y \\ \text{onde } \mathcal{U}_2 \times V_2 \rightarrow Z_0 \text{ é contínua e } \Phi(v_0, y_0) = 0, (v_0, y_0) \in \mathcal{U}_2 \times V_2 \\ \text{a função } \Phi \text{ é chamada de função de bifurcação.} \end{array} \right.$$

Demonstração: O problema $F(x,y) = 0$, para $(x,y) \in U_2 \times V_2$ é equivalente ao

sistema(pelo Segundo Passo de Decomposição de Liapunov-Schmidt)

$QF(Px + (I - P)x, y) = 0$ e $(I - Q)F(Px + (I - P)x, y) = 0$ em que $Px = v \in N$ e

$(I - P)x = w \in X_0$. Agora, definimos

$$\begin{cases} G: \tilde{U}_2 \times W_2 \times V_2 \rightarrow \mathfrak{R} \\ G(v, w, y) \equiv (I - Q)F(v + w, y) \\ v_0 = Px_0 \in \tilde{U}_2 \subset N \\ w_0 = (I - P)x_0 \in W_2 \text{ subse} \subset X_0 \end{cases} \text{ e}$$

\tilde{U}_2, W_2 são vizinhanças tal que $\tilde{U}_2 + W_2 \subset U \subset X$. temos $G(v_0, w_0, y_0) = 0$ e por nossas escolhas dos espaços $D_w G(v_0, w_0, y_0) = (I - Q)D_x F(x_0, y_0) : X_0 \rightarrow \mathfrak{R}$ é bijetora.

Agora, pela aplicação do Teorema da Função Implícita então $G(v, w, y) = 0$ para $(v, w, y) \in \tilde{U}_2 \times W_2 \times V_2$ é equivalente a $w = \Psi(v, y)$ para algum $\psi: \tilde{U}_2 \times V_2 \rightarrow W_2 \subset X_0$ tal que $\psi(v_0, y_0) = w_0$. Inserindo a função Ψ no sistema inicial temos $\Phi(v, y) \equiv QF(v + \Psi(v, y), y) = 0$.

O teorema da Função Implícita também fornece a continuidade da função Ψ .

Corolário 2.10: Nas notações do Teorema 2.9, se $F \in C^1(U \times V, Z)$, obtemos também $\Psi \in C^1(\tilde{U}_2 \times V_2, X_0)$, $\psi \in C^1(\tilde{U}_2 \times V_2, X_0)$ tal que

$$\begin{cases} \Psi(v_0, y_0) = w_0, d_v \Psi(v_0, y_0) = 0 \in L(N, X_0) \\ d_v \Phi(v_0, y_0) = 0 \in L(N, Z_0). \end{cases}$$

3 I RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção aplicamos os resultados da seção 2 dando enfoque no Método de Liapunov-Schmidt Sem Simetria na aplicação da Equação de reação-difusão (1). Pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema(1). A Bifurcação de soluções de equilíbrio da EDP com estrutura espacial não-trivial está associada a esta mudança de estabilidade. A equação de equilíbrio associada a equação (1) é quando $u_t = 0$ para todo t , isto é,

$$Du_{\xi\xi} - f(u) = 0. \tag{3}$$

Fisicamente, a forma mais natural para variar os efeitos de difusão é manter D constante mas variar o comprimento l do intervalo, desta forma é conveniente introduzir uma variável escalar $\eta = \frac{\xi}{l}$. Pela Regra da Cadeia, temos que:

$$u_{\eta}(\eta, t) = u_{\xi}(\xi, t) \frac{d\xi}{d\eta} = u_{\xi}(\xi, t) l$$

e

$$u_{\eta\eta}(\eta, t) = l u_{\xi\xi}(\xi, t) \frac{d\xi}{d\eta} = u_{\xi\xi}(\xi, t) l^2$$

então

$u_{\xi\xi}(\xi, t) = \frac{1}{l^2} u_{\eta\eta}(\eta, t)$. Como $\eta = \frac{\xi}{l}$ e $0 < \xi < l$, por mudança de escala temos $0 < \eta < 1$. Portanto, a equação de equilíbrio associada a equação de reação-difusão (3) com condições de Dirichlet se escreve como

$$\begin{cases} u_{\eta\eta} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

em que $\lambda = \frac{l^2}{D}$ é o parâmetro de bifurcação. Definimos no lado esquerdo da equação (4) uma aplicação em que $\Phi: X \times \mathbb{R} \rightarrow C^0(0,1)$

$$\begin{aligned} (u, \lambda) &\rightarrow \Phi(u, \lambda) \\ &= -u_{\eta\eta} + \lambda f(u) \end{aligned}$$

em que $X = \{u \in C^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$. Por hipótese $f(u) = 0$ então a solução $u(\eta, t) = 0$ é ponto de equilíbrio da equação (4) pois $-u_{\eta\eta} + \lambda f(u(\eta, t)) = 0$.

A linearização (derivação) da equação (4) é obtida como

$$Lu = -u'' + \lambda f'(0)u \quad (5)$$

Assim, o espectro do operador L consiste dos autovalores do operador $-\frac{d^2}{d\eta^2}$ deslocado $\lambda f'(0)$. Considere por enquanto $Lu = -u''$ e $u \neq 0$ tal que seja autofunção do operador L, isto é, $Lu = \beta u$. Assim, $-u'' = \beta u$ então $u'' = -\beta u = 0$. A equação característica associada a este último resultado, segue que $m^2 + \beta = 0$. Então $m = \pm \sqrt{-\beta}$ e as soluções são

$$u(t) = C_1 e^{0 \cdot t} \cos(\beta t) + C_2 e^{0 \cdot t} \sin(\beta t), \text{ Mas } u(0) = u(1) = 0 \text{ então}$$

$$u(0) = C_1 \cos(\beta \cdot 0) \text{ então } C_1 = 0 \text{ e agora, } u(t) = C_2 e^{0 \cdot t} \sin(\sqrt{\beta} t) \text{ e assim}$$

$u(1) = C_2 \sin(\beta) = 0$, como $C_2 \neq 0$ então $\sin(\sqrt{\beta}) = 0$ e implica que $\sqrt{\beta} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ e então $\beta = n^2\pi^2$. Logo, o espectro do operador L (a linearização da equação (4) na solução trivial) é dado por $n^2\pi^2 + \lambda f'(0)$, $n = 1, 2, \dots$ e são todos positivos se $\lambda < \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$. Portanto $u = 0$ é solução estável de (2) para tal λ . Se λ estiver perto de $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$, temos que $(d\Phi)_{0, \lambda_0}$ é singular e a dimensão do núcleo do operador $(d\Phi)_{0, \lambda_0}$ é unidimensional e gerado por

$u_0(\eta) = \sin(n\pi\eta)$. Analisamos as soluções da equação (4), pelo Método da Redução de Liapunov-Schmidt. Na etapa 1 desta Redução, os complementos ortogonais é dado por $M = \langle \sin(n\pi\eta) \rangle^\perp$ e $N = [ImL]^\perp = KerL = \langle \sin(n\pi\eta) \rangle$ o qual a última igualdade foi usado que L é um operador auto-adjunto (isto é, limitado e simétrico). Na etapa 5, escolha $v_1 = v^* = \sin(n\pi\eta)$.

A Redução do Método de Liapunov-Schmidt resulta em uma equação de uma única variável $g(x, \lambda) = 0$ cujas soluções localmente estão em correspondência biunívoca com as soluções da equação (4). Não é possível determinar uma fórmula explícita para $g(x, \lambda)$, mas analisemos o suficiente das derivadas de g no ponto de bifurcação. Em $x = 0, \lambda = \lambda_0$, temos que $g_x = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0$. Temos também que

$$g_{xx} = \lambda_0 f''(0) \int_0^1 v_1^3 d\eta \quad \text{e} \quad g_{\lambda x} = \lambda_0 f'(0) \int_0^1 v_1^2 d\eta \quad (6)$$

Supondo por hipótese que $f''(0) \neq 0$, então g_{xx} e $g_{\lambda x}$ são ambos não-nulos. Portanto, a solução trivial é bifurcação transcritical em $\lambda = \lambda_0$ se $f''(0) \neq 0$. Pode acontecer que $f''(0) = 0$, por exemplo, se $f(u)$ é uma função ímpar e neste caso, a bifurcação é supercrítica ou

subcrítica dependendo do sinal de $f''(0)$. Por uma mudança adequada de coordenadas $g(x,\lambda)$ pode ser transformado para a forma

$$\pm x^2 - (\lambda - \lambda_0)x. \quad (7)$$

Para $\lambda \neq \lambda_0$ a equação (7) tem dois zeros, nomeadamente solução trivial $x = 0$ e a solução não-trivial $x = \pm(\lambda - \lambda_0)$.

Este último zero, é a correspondência entre soluções de $g(x,\lambda) = 0$ e soluções da equação $\Phi(u,\lambda) = 0$. Isto é, $g(x,\lambda) = 0$ se e somente se $\Phi(xv_1 + W(xv_1,\lambda),\lambda) = 0$. A solução (x,λ) de $g(x,\lambda)$ está associada a solução $u = xv_1 + W(xv_1,\lambda)$, ou ainda,

$$u(\eta) = xv_1(\eta) + W(xv_1(\eta),\lambda). \quad (8)$$

Além disso, $Wx(0,\lambda_0) = W\lambda(0,\lambda_0) = 0$. Escrevendo W em Série de Taylor em $(0,\lambda_0)$ temos que

$$W(xv_1,\lambda_0) = W(0,\lambda_0) + Wx(0,\lambda_0)x + W\lambda(0,\lambda_0)x + O(x^2).$$

Então $W(xv_1,\lambda_0) = O(x^2)$ dos resultados anteriores e o fato que $W(0,\lambda) = 0$.

Portanto, $u(\eta) = xv_1 + W(xv_1(\eta),\lambda_0) = xv_1 + O(x^2)$, isto é, as soluções não-triviais tem uma estrutura espacial de v_1 perto do ponto de bifurcação.

No entanto, se $f(u)$ e uma função ímpar então $f''(0)=0$ e neste caso, $g_{xx} = 0$ e

$$g_{xxx} = \lambda_0 f'''(0) \int_0^1 v_1^4 d\eta.$$

Agora, a bifurcação é supercrítica ou subcrítica de acordo com $f'''(0)=0$ é positivo ou negativo, com a forma $\pm x^3 - \lambda x$.

Considerando a função $f(u)$ tal que tenhamos a sequência:

$$f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{k-1}(0) = 0 \text{ e } f^n(0) \neq 0$$

então temos o problema de bifurcação com a forma canônica $\pm x^n - \lambda x = 0$.

4 | CONCLUSÕES





O Teorema de Crandall-Rabinowitz fornece uma condição suficiente para que um ponto (λ_0, u_0) seja um ponto de bifurcação local e o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt determina a função de bifurcação. Por fim, pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema da equação de difusão e o problema de bifurcação é apresentado na forma canônica e dependendo das derivadas de primeira ordem até n -ésima ordem da função f no equilíbrio nulo a bifurcação é supercrítica ou subcrítica.

REFERÊNCIAS

Grindrod, P. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations, Patterns and Waves. **Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series**, p. 1-275, 1996.

H. Kielhofer. **Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 2011.





M. Golubitsky. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory**, vol I and vol II. Espringala, Harper-Row, New York, 1985.

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em



matemática e suas aplicações

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em



matemática e suas aplicações