Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-0116-2 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título. CDD 510.07
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 15

MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE REAÇÃO-DIFUSÃO

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 17/04/2022

Rosangela Teixeira Guedes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio, Paraná
http://lattes.cnpq.br/6229392665915856

RESUMO: Neste trabalho apresentamos o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet. Equações de reação-difusão tem sido utilizadas para modelar fenômenos que envolvem a dispersão e a interação dentro de uma determinada região, enquanto que a parte reativa esta relacionado a interação. O objetivo é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão para determinar os pontos de bifurcação. Resultados do Teorema de Crandall-Rabinowitz determina que o equilíbrio nulo é o ponto de bifurcação do problema de reação de difusão.
PALAVRAS-CHAVE: Bifurcação; Liapunov-Schmidt; Reação de Difusão.

LIAPUNOV-SCHMIDT METHOD WITHOUT SYMMETRY AND APPLICATION IN THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM

ABSTRACT: In this work we present the problem of diffusion reaction with Dirichlet conditions. Reaction-diffusion equations have been used to model phenomena that involve dispersion and interaction within a given region, while the reactive part is related to interaction. The objective is to apply Liapunov-Schmidt Reduction without Symmetry in the Reaction-Diffusion Equation to determine the bifurcation points. Results of the Crandall-Rabinowitz Theorem determines that the null equilibrium is the bifurcation point of the diffusion reaction problem.
KEYWORDS: Bifurcation; Liapunov-Schmidt; Diffusion Reaction.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho considera o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = Du_{\xi\xi} - f(u), 0 < \xi < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

e u e uma função escalar, e por simplicidade, consideramos a difusão em apenas uma dimensão espacial. Sejam as hipotéses $f(0) = 0$ e $f'(0)<0$ então $u = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado da ODE associada a equação (1) e é instável. Além disso, com as condições de Dirichlet, $u = 0$ também é solução da EDP. Se a difusão é suficientemente pequena(resp. grande), a solução trivial da EDP é instável(resp. estável). Equações de reação-difusão são problemas comuns de bifurcação, o qual pode ser resolvido pela Redução de Liapunov-Schmidt e a solução trivial do problema (1) é do tipo bifurcação trascrítica se $f''(0)\neq 0$. Equações de reação-difusão são uma fonte comum de problemas que apresentam bifurcação.

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes que são baseados nas referências

[1], [2] e [3] que são fundamentais para o resultado Principal da seção 3 que é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão (1).

2 I RESULTADOS DE BIFURCAÇÃO, TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, TEOREMA DE CRANDALL-RABINOWITZ E O MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA

Definição 2.1: Sejam M um espaço métrico, X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F:MxX \to Y$ uma aplicação contínua.

Seja S = $\{(\lambda,u(\lambda))\backslash\lambda \in M\}$ uma curva contínua de solucões de $F \equiv 0$. Dizemos que $(\lambda 0,u0) \in M \times X$ é um ponto de bifurcação de $F \equiv 0$ com relação a curva S se são satisfeitas as seguintes afirmações:

(i) (λ0,u0) é um ponto interior de S;

(ii) para toda vizinhança U de $(\lambda 0,u0) \in M \times X$, existe uma solução de $F \equiv 0$ que pertence a U e não pertence a S.

Sejam as soluções analíticas de um problema não-linear $F(x,y) = 0$, onde F é uma aplicação $F:UxV \to Z$ com conjuntos abertos $U \subset X$, $V \subset Y$, e em que X,Y,Z são espaços de Banach(real), segue o Teorema da Função Implícita.

Teorema 2.2(Teorema da Função Implícita) Seja $F(x,y) = 0$ tem uma solução $(x0,y0) \in U \times V$ tal que a derivada de Fréchet de F em relação a x em $(x0,y0)$ é bijetora: $F(x0,y0) = 0$, $DxF(x0,y0):X \to Z$ é limitada (contínua) com inversa limitada (Teorema de Banach). Suponha que F e DxF sao contínuas:

$$F \in C(U \times V,Z),\ DxF \in C(U \times V,L(X,Z)),\ \text{em que } L(X,Z)$$

denota o espaço de Banach de operadores lineares limitados de X em Z dotado com o operador norma.

Então existe uma vizinhança $U1 \times V1$ em $U \times V$ de $(x0,y0)$ e uma aplicação $f: V1 \to U1 \subset X$ tal que: $f(y0) = x0$, $F(f(y),y) = 0$, $\forall y \in V1$.

Além disso, f´ é contínua em $V1$(isto é, $f \in C(V1,X)$). Finalmente, cada solução de $F(x,y) = 0$ em $U1 \times V1$ é da forma $(f(y),y)$.

Uma condição necessária para que $(\lambda 0,\ u0)$ seja um ponto de bifurcação é que o operador $duf(\lambda 0,\ u0)$ não seja inversível. No caso em que isso não ocorre, pelo Teorema das Funções Implícitas, podemos concluir, que $(\lambda 0,\ u0)$ não é um ponto de bifurcação.

Teorema 2.3(Crandall-Rabinowitz) Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$, S um aberto em $\mathbb{R}$, V um aberto em X, F uma aplicação de classe C^2 em $S \times V$ a valores em Y e $\lambda 0 \in$ S satisfazendo as seguintes afirmações:

(i) $F(\lambda,0) = 0$, para todo $\lambda \in$ S;

(ii) a dimensão do Ker($(duF(\lambda 0,u0))$ e a codimensão de $R(duF(\lambda 0,u0))$ sobre $\mathbb{R}$ são iguais a um;

(iii) o núcleo de $duF(\lambda 0,u0)$ é gerado por $u0$, onde $u0 \in X$;

(iv) $d^2_{\lambda u}F(\lambda 0,0).u0$ não pertence à imagem de $duF(\lambda 0,0)$.

Seja Z um subespaço fechado de X tal que $X = [u0] \oplus Z$(isto é, todo $u \in X$ pode ser escrito como $u = \alpha u0 + z$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in Z$). Então, existem $\delta > 0$, $\lambda :] - \delta,\delta[\to\mathbb{R}$ e $\varphi :] - \delta,\delta[\to Z$ de classe C^1, com $\lambda(] - \delta,\delta[)$ contido em $] - \delta,\delta[$ e $\varphi(] - \delta,\delta[)$ contido em $B\delta(0)$, onde $B\delta(0)$ é a bola aberta em Z, tais que (v) $\lambda(0) = \lambda 0$; (vi) $\varphi(0) = 0$ e (viii) $F(\lambda(s),s(u0 + \varphi(s))) = 0$, para todo $s \in] - \delta,\delta[$. Além disso, existe uma vizinhança de $(\lambda 0,u0)$ em $S \times V$ tal que todo zero de F é da forma $(\lambda,0)$ ou $(\lambda(s),s(u0 + \varphi(s)))$, para algum $s \in] - \delta,\delta[$.

Definição 2.4: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K. Um operador $L : X \to Y$ linear contínuo é um operador de Fredholm se são verdadeiras as seguintes afirmações:

(ii) Ker(L) é um subespaço de X de dimensão finita sobre K;

(ii) R(L)(Imagem de L) é um subespaço de codimensão finita de Y, isto é, a dimensão de Y/R(L) sobre Ké finita.

Proposição 2.5: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador linear contínuo. Se a dimensão de R(L) é finita, então R(L) é um subespaço fechado de Y.

Demonstração: Seja $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., \overline{v_n}\}$ uma base de $Y/R(L)$. Mostraremos que $Y= [v_1, v_2,..., v_n] \oplus R(L)$. Se $v \in Y$. Então, $\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j}$ e assim $v = \sum^{n} \beta_j v_j + v_0$ em que $v0 \in R(L)$. Se $v \in [v1,v2,...,vn] \cap R(L)$, então $\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j} \in R(L)$ e $\overline{0} = \overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j}$. Como $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., v_n\}$ é linearmente independente, temos que $\beta j = 0$, para todo $j \in\{1,...,n\}$ e, portanto $v = 0$. Em seguida, provaremos que $R(L)$ é fechado em Y. Seja $T : X/Ker(L) \times K^n \to Y$ definida por $T(\overline{u}, x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j + L(u)$ onde os v'_j são como acima descrito. Temos que T é sobrejetora. Mostraremos que T é injetora. De fato, seja $(\bar{u}, x_1,...,x_n)$ tal que $T(\bar{u}, x_1,...,x_n)=0$, isto é, $L(u) = -\sum_{j=1}^{n} x_j v_j$Então, $\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{v_j} = \overline{0}$e como $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., \overline{v_n}\}$ é linearmente independente, segue que $xj = 0$, para todo $j \in\{1,...,n\}$. Logo, $L(u) = 0$, isto é, $u \in Ker(L)$ e, e assim $\bar{u}= \bar{0}$ Desse modo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a imagem por T de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado em Y, e portanto $T(X/Ker(L) \times\{(0,...,0)\}) = R(L)$ é fechado em Y.

Definição 2.6: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador de Fredholm. O índice de L é o número inteiro $dim_K\, Ker(L) - codim_K\, R(L)$ e o denotamos por ind(L).

A Proposição seguinte nos fornece uma propriedade dos operadores de Fredholm.

Proposição 2.7: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador de Fredholm. Então, existem M e N subespaços fechados de X e Y, respectivamente, tais que

(i) X é uma soma direta de Ker(L) e M; (ii) Y é uma soma direta de N e R(L).

Demonstração: O item (ii) foi provado na Proposição 2.4.2. Para provarmos o item (i), suponhamos que $Ker(L) = [u1,...,um]$ e seja $f1 : [u1] \to K$ o funcional linear definido por $f1(\alpha 1 u1) = \alpha 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g1 : X \to K$ funcional linear tal que $g1 j[u1] = f1$. Seja $X1 = Ker(g1)$. Afirmamos que $X = [u1] \oplus X1$. De fato, se $u \in X$, então $u = g1(u)u1 + (u - g1(u)u1)$, onde $g1(u)u1 \oplus [u1]$ e $u - g1(u)u1 \in X1$. Se $u \in [u1] \cap X1$, então $u = \alpha 1 u1$ e $0 = g1(\alpha 1 u1) = \alpha 1$ e, assim, $u = 0$. Seja $V = [u1,...,um-1]$ e suponhamos que $X = V \oplus P$, onde P e um subespaço fechado de X. Como $u_m \notin V$, existem $\alpha_1,...,\alpha_{m-1} \in K$ tais que um $= \alpha 1u1+...+\alpha m-1um-1+v$, onde $v \in P$ e $v \neq 0$ Seja $f : [v] \to K$ o funcional linear definido por $f(\alpha v) = \alpha$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g : P \to K$ funcional linear tal que $gj[v] = f$. Afirmamos que $P = [v] \oplus Ker(g)$. Com efeito, se $u \in P$, então $u = g(u)v + (u - g(u)v)$, onde $g(u)v \in [v]$ e $u - g(u)v \in Ker(g)$. Se $u \in [v] \cap Ker(g)$, então $u = \alpha v$ e $0 = g(\alpha v) = \alpha$ e, assim $u = 0$. Logo,

$$X = V \oplus P = [u1,...,um-1] \oplus [v] \oplus Ker(g) = Ker(L) \oplus Ker(g).$$

Descrevemos abaixo o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt. Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F : K^{k+1} \times X \to Y$ um operador suave que satisfaz $F(0,0) = 0$. O nosso objetivo é utilizar o processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt para resolver a equação $F(\lambda 1,\lambda 2,...,\lambda k,\lambda k+1,u) = 0$ numa vizinhança da origem em $K^{k+1} \times X$. Vamos supor que $L := d_uF(0,0)$(derivada de F com relação a segunda variável calculada em (0,0)) seja um operador de Fredholm de índice zero.

Primeiro Passo: Decompomos os espaços X e Y como $X = ker(L) \oplus M$ e $Y = N \oplus R(L)$, onde M e N são subespaços fechados de X e Y. Notemos que, como L é um operador de Fredholm de índice zero, temos que $dimK\ Ker(L) = dimK\ (N)$.

Segundo Passo: Seja $Q : Y \to R(L)$ a projeção com $Ker(Q) = N$. Observemos que $F(\lambda,u) = 0$ se, e somente se, $Q(F(\lambda,u)) = 0$ e $(I - Q)(F(\lambda,u)) = 0$.

Terceiro Passo: Usando o fato de que $X = Ker(L) \oplus M$, escrevemos $u=v+w$, onde $v \in Ker(L)$ e $w \in M$. Seja $G : K^{k+1} \times Ker(L) \times M \to R(L)$ a função definida por $G(\lambda,v,w) = Q(F(\lambda,v + w))$. Então, $d_wG(0,0,0).w = Q(d_uF(0,0).w) = Q(L.w) = L.w$, para todo $w \in M$. Notemos que $L : M \to R(L)$ é injetora. De fato, seja $u \in M$ tal que $L(u) = 0$. Então, $u \in Ker(L) \cap M = \{0\}$, portanto $u=0$. A aplicação L também é sobrejetora. Com efeito, seja $v \in R(L)$. Então existe $u \in X$ tal que $v = L(u)$. Podemos escrever $u = v0 + w0$, onde $v0 \in Ker(L)$ e $w0 \in M$, obtendo $v = L(w0) \in L(M)$. Como M e R(L) são espaços de Banach e $L : M \to R(L)$ é linear, contínua e sobrejetora, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que $L^{-1} : R(L) \to M$ é linear e contínua. Logo, pelo Teorema das Funções Implícitas, existem $B\delta 1(0) \subset K^{k+1}$, $B\delta 2(0) \subset Ker(L)$, $B\delta 3(0) \subset M$ e $W : B\delta 1(0) \times B\delta 2(0) \longrightarrow B\delta 3(0)$ tal que $W(0,0) = 0$, para todo $\lambda \in B\delta 1(0)$ e para todo $v \in B\delta 2(0)$, tem-se $Q(F(\lambda,v + w)) = 0$ se, e somente se, $w = W(\lambda,v)$.

Quarto Passo: Seja $\phi : B\delta 1(0) \times B\delta 2(0) \to N$ a função definida por

$$\phi(\lambda,v) = (I - Q)(F(\lambda,v + W(\lambda,v)).$$

Quinto Passo: Seja $\{v1,v2,...,vm\}$ uma base de Ker(L) sobre K. Como ker(L) e N têm a mesma dimensão, seja $\{u1,u2,...,um\}$ uma base de N sobre $\mathbb{K}$ e $\{v_1{}^*, v_2{}^*, ..., v_m{}^*\}$ a base dual de $\{u1,u2,...,um\}$. Então, $< vi^*,uj >= vi^*(uj) = \delta ij$, para $i,j \in \{1,...,m\}$. Usando o fato de que

$\phi(\lambda,v)$ є N, para todo λ є $B\delta 1(0)$ e para todo v є $B\delta 2(0)$, definimos a funçao ψi.

Sexto Passo: Seja i є{1,...,m} e seja ψi : $B\delta 1(0) \times K^m \to K$ a função definida como

$$\psi_i\left(\lambda,(x_1,x_2,...,x_m)\right)=\left\langle {v_i}^*,\varphi\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right\rangle$$

logo, para i = 1,2,...,m substituindo o Quarto Passo no Sexto Passo e usando as projeções, podemos escrever

$$\psi_i\left(\lambda,(x_1,x_2,...,x_m)\right)=\left\langle v_i{}^*,F\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)\right\rangle$$

O próximo resultado garante localmente uma correspondência biunívoca entre as soluções de F ≡ 0 e as soluções de ψ ≡ 0, onde ψ = (ψ1,...,ψm) e a equação ψ ≡ 0 é chamada de equação de bifurcação .

Proposição 2.8: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e F : Kk+1 ×X → Y um operador suave satisfazendo F(0,0) = 0. Seja W a função definida no terceiro passo do Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt e seja ψ a função definida no sexto passo. São equivalentes as seguintes afirmações:

a) (λ,x1,x2,...,xm) є $B\delta 1(0)$ ×Km é uma solução de ψ ≡ 0.

b) $\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_j\,v_j+W\left(\sum_{j=1}^m x_j\,v_j\right)\right)$є $B\delta 1(0) \times B\delta 2(0) \times B\delta 3(0)$ é uma solução de F ≡ 0.

Demonstração: Seja (λ,x1,x2,...,xm) є $B\delta 1(0) \times K^m$ uma solução de ψ ≡ 0. Então,

$$0=\left\langle {v_i}^*,\varphi\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right\rangle=\left\langle v_i{}^*,F\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)\right\rangle$$

para todo i є{1,...,m}, e assim $F\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)=0$ provando a afirmação (b).

Seja $\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)\in B_{\delta_1}(0)\times B_{\delta_2}(0)\times B_{\delta_3}(0)$ uma solução de F ≡ 0. Sendo W a função definida no terceiro passo da Decomposição, temos que $Q\left(F\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)\right)=0$ e portanto $\varphi\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)=0$ então ψ(λ,x1,...,xm) = 0, mostrando que a afirmação (b) implica (a). A seguir, obtemos o valor de algumas derivadas de ψ na origem. Estas derivadas aparecem em algumas hipóteses do Equivariant Branching-Lemma.

Consideremos a equação $Q\left(F\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j+W\left(\lambda,\sum_{j=1}^m x_jv_j\right)\right)\right)=0$ e fixemos i є {1,2,...,m} e derivamos a equação anterior com relação a variável xi. Obtemos:

$$Q\left(d_uF\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^m x_j^0\,v_j+W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^m x_j^0\,v_j\right)\right).\left(v_i+d_vW\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^m x_j^0\,v_j\right).v_i\right)\right)=0$$

escrevendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = (0,0,...,0)$ e usando que W(0,0) = 0 e L = duF(0,0), obtemos Q(L(dvW(0,0).vi)) = 0.

Temos que L(dvW(0,0).vi) є Ker(Q) = N. Pelo fato de N ∩ R(L) = {0} segue que L(dvW(0,0).vi) = 0. Logo, dvW(0,0).vi є Ker(L) ∩ M = {0}, isto é, dvW(0,0).vi=0 e temos que

$$\varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right) = (I-Q)\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right)$$

e seja $\widetilde{\varphi}(\lambda, x_1, x_2, ..., x_m) := \varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)$. Fixemos i,j,lє{1,2,...,m}. temos:

- $\dfrac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0) = (I-Q)(d_u F(0,0).(v_i + d_v W(0,0).v_i))$$

vi є Ker(duF(0,0)) e dvW(0,0).vi = 0;

- $\dfrac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) = (I-Q)(d_u^2 F(0,0).(v_i, v_j$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(0,0) &= (I-Q)(L(d_v^3 W(0,0)(v_i, v_j, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_i, d_v^2 W(0,0).(v_j, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_j, d_v^2 W(0,0).(v_i, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_l, d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j)))\end{aligned}$$

$+\ (I-Q)(d_u^3 F(0,0).(v_i, v_j, v_l$)); e para s є{1,2,...,k + 1} fixado temos:

- $\dfrac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial \lambda_s}(0,0) = (I-Q)(d_u^2 F(0,0).(v_i, d_{\lambda_s} W(0,0)) + d_{u\lambda_s}^2 F(0,0).(v_i))$

Agora, determinamos $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j),\ d_v^2 W(0,0).(v_i, v_l),\ d_v^2 W(0,0).(v_j, v_l)$ e dλsW(0,0). Faremos os cálculos apenas para $d_{\lambda_s} W(0,0)$ e $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j)$, pois os outros casos são análogos. Consideremos a equação

$$Q\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right) = 0 \qquad (2)$$

Derivando a equação (2) em relação à variável xi obtemos

$$Q\left(d_u F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right) . \left(v_i + d_v W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right) .v_i\right)\right) = 0;$$

e derivando esta equação com relação à variável x_j temos $Q\left(d_u F\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j + W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j\right)\right).\left(d_v^2 W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j\right).(v_i, v_j)\right)\right) + Q\left(d_u^2 F\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j + W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j\right)\right)\right).(v_i + d_v W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j\right).v_i, v_j + d_v W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0 v_j\right).v_j) = 0$. Fazendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0, ..., x_m^0) = (0, ..., 0)$ e usando que dvW(0,0).vi = 0, W(0,0) = 0, L = duF(0,0) e Q e a projeção em R(L) obtemos L(d2vW(0,0).(vi,vj)) = –Q(d2uF(0,0).(vi,vj)). Como LjM é inversível, segue que $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j) = -L^1(Q(d_u^2 F(0,0).(v_i, v_j)))$ e agora, determinamos Wλs(0,0).

Derivando a equação (2) em relação à variável λs:

$$Q\left(d_{\lambda_s}F\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j+W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right)\right)$$

$$+Q\left(d_uF\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j+W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right).\left(d_{\lambda_s}W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right)\right)=0$$

e fazendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0,...,x_m^0) = (0,...,0)$ temos Q(dλsF(0,0) + L.(dλsW(0,0))) = 0,isto é, L(dλsW(0,0)) = –Q(dλsF(0,0)), e assim dλsW(0,0) = –L–1(Q(dλsF(0,0))).

Portanto,

- $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_i}(0,0) = \left\langle v_i^*, \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0)\right\rangle$ = 0;
- $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x_i\partial x_j}(0,0) = \left\langle v_i^*, \dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j}(0,0)\right\rangle =< v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_i,v_j) >$
- $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial x_l}(0,0) =< v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_j,v_l) >$
- $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x_i\partial x_l}(0,0) =< v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_i,v_l) >$
- $\dfrac{\partial^3\psi_i}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}(0,0) = \left\langle v_i^*, \dfrac{\partial^3\widetilde{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}(0,0)\right\rangle =< v_i^*, V >$ onde

V = d3uF(0,0).(vi,vj,vl) +

d2uF(0,0).(vi,d2uW(0,0).(vj,vl)

+d2uF(0,0).(vj,d2uW(0,0).(vi,vl))

$+\quad d_u^2F(0,0).(v_l, d_u^2W(0,0).(v_i,v_j$));

- $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_s}(0,0) = \left\langle v_i^*, \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\lambda_s}(0,0)\right\rangle =< v_i^*, d_{\lambda_s}F(0,0) >$
- $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial\lambda_s}(0,0) \quad = \quad \left\langle v_i^*, \dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x_j\partial\lambda_s}(0,0)\right\rangle =< v_i^*, d_{u_{\lambda_s}}^2F(0,0).v_j >$
$+ \quad < v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_j, -L^{-1}(Q(d_{\lambda_s}F(0,0)))) >$.

Teorema 2.9: Existe uma vizinhança U2 × V2 de (x0,y0) em U × V ⊂ X × Y tal que o problema F(x,y) = 0, para(x,y) є U2 × V2 é equivalente a um problema de dimensão finita

$$\begin{cases} \Phi(v,y) = 0, para(v,y) \in \mho_2 xV_2 \subset NxY \\ onde \mho_2 xV_2 \to Z_0 écontínuae \Phi(v_0,y_0) = 0, (v_0,y_0) \in \mho_2 xV_2 \\ afunção\Phi échamadadefunçãodebifurcação. \end{cases}$$

Demonstração: O problema F(x,y) = 0, para(x,y) є U2 × V2 é equivalente ao sistema(pelo Segundo Passo de Decomposição de Liapunov-Schmidt)

QF(Px + (I – P)x,y) = 0 e (I – Q)F(Px + (I – P)x,y) = 0 em que Px = v є N e (I – P)x = w є X0. Agora, definimos

$$\begin{cases} G: \tilde{U}_2 x W_2 x V_2 \rightarrow \Re \\ G(v,w,y) \equiv (I-Q)F(v+w,y) \\ v_0 = Px_0 \in \tilde{U}_2 \subset N \\ w_0 = (I-P)x_0 \in W_2 subse \subset X_0 \end{cases}$$ e

$\tilde{U}_2$, W_2 são vizinhanças tal que $\tilde{U}_2 + W_2 \subset U \subset X$. temos G(v0,w0,y0) = 0 e por nossas escolhas dos espaços DwG(v0,w0,y0) = (I – Q)DxF(x0,y0) : X0 → ℜ é bijetora.

Agora, pela aplicação do Teorema da Função Implícita então G(v,w,y)=0 para (v, w, y) є $\tilde{U}_2 x W_2 x V_2$é equivalente a w = Ψ(v,y) para algum ψ:$\tilde{U}_2 x V_2 \rightarrow W_2 \subset X_0$tal que ψ($v_0$, y_0)=w_0 Inserindo a função Ψ no sistema inicial temos Φ(v,y) ≡ QF(v + Ψ(v,y),y) = 0.

O teorema da Função Implícita também fornece a continuidade da função Ψ.

Corolário 2.10: Nas notações do Teorema 2.9, se F є C^1(U × V,Z), obtemos também Ψ є C^1($\tilde{U}$2 × V2,X0), ψ є C^1 ($\tilde{U}_2 x V_2 x Z_0$) tal que

$$\begin{cases} \Psi(v_0,y_0)=w_0,\ d_v\Psi(v_0,y_0)=0\in L(N,X_0) \\ d_v\Phi(v_0,y_0)=0\in L(N,Z_0). \end{cases}$$

3 | RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção aplicamos os resultados da seção 2 dando enfoque no Método de Liapunov-Schmidt Sem Simetria na aplicação da Equação de reação-difusão (1). Pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema(1). A Bifurcação de soluções de equilíbrio da EDP com estrutura espacial não- trivial está associada a está mudança de estabilidade. A equação de equilíbrio associada a equação (1) é quando ut = 0 para todo t, isto é,

$$Du\xi\xi - f(u) = 0. \tag{3}$$

Fisicamente, a forma mais natural para variar os efeitos de difusão é manter D constante mas variar o comprimento l do intervalo, desta forma é conveniente introduzir uma variável escalar $\eta = \frac{\xi}{l}$. Pela Regra da Cadeia, temos que:

$$u_\eta(\eta,t) = u_\xi(\xi,t)\frac{d\xi}{d\eta} = u_\xi(\xi,t)l$$

e

$$u_{\eta\eta}(\eta,t) = lu_{\xi\xi}(\xi,t)\frac{d\xi}{d\eta} = u_{\xi\xi}(\xi,t)l^2$$

então

$u_{\xi\xi}(\xi,t) = \frac{1}{l^2}u_{\eta\eta}(\eta,t)$. Como$\eta = \frac{\xi}{l}$ e $0<\xi<l$, por mudança de escala temos 0 < η < 1. Portanto, a equação de equilíbrio associada a equação de reação-difusão (3) com condições de Dirichlet se escreve como

$$\begin{cases} u_{\eta\eta} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} (4)$$

em que$\lambda = \frac{l^2}{D}$ é o parâmetro de bifurcação. Definimos no lado esquerdo da equação (4) uma aplicação em que ϕ:$X x \Re \rightarrow C^0(0,1)$

$$(u, \lambda) \rightarrow \Phi(u, \lambda)$$
$$= -u_{\eta\eta} + \lambda f(u)$$

em que X={u є C^2(0,1):u(0)=u(1)=0}.Por hipótese f(u) = 0 então a solução u(η,t) = 0 é ponto de equilíbrio da equação (4) pois –uη,η(η,t) + λf(u(η,t)) = 0.

A linearização(derivação) da equação (4) é obtida como

$$Lu = -u'' + \lambda f'(0) u (5)$$

Assim, o especto do operador L consiste dos autovalores do operador $-\frac{d^2}{d\eta^2}$ deslocado $\lambda f'(0)$. Considere por enquanto *Lu=-u"* e *u* ≠ 0 tal que seja autofunção do operador L, isto é, Lu = βu. Assim, -*u"*=*βu* então *u"*=*βu* =0. A equação característica associada a este último resultado, segue que $m^2+\beta=0$. Então $m=\pm\sqrt{[\beta]}$ e as soluções são

u(t) = C1e0.tcos(βt) + C2e0.t sin(βt), Mas u(0) = u(1) = 0 então

u(0) = C1cos(β.0) então C1 = 0 e agora, u(t) = C2e0.t sin(√at) e assim

u(1) = C2 sin(β) = 0, como $C_2 \neq 0$ então $sin(\sqrt{[\beta]})=0$ e implica que $\sqrt{[\beta]}$ = nπ, n є ℕ e então βn = $n^2\pi^2$. Logo, o espectro do operador L (a linearização da equação (4) na solução trivial) é dado por $n^2\pi^2+\lambda f'(0)$, n = 1,2,... e são todos positivos se $\lambda < \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$. Portanto u = 0 é solução estável de (2) para tal λ. Se λ estiver perto de$\lambda_0 = \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$, temos que (dΦ)0,λ0 é singular e a dimensão do núcleo do operador (dΦ)0,λ0 é unidimensional e gerado por

u0(η) = sin(πη). Analisamos as soluções da equação (4), pelo Método da Redução de Liapunov-Schmidt. Na etapa 1 desta Redução, os complementos ortogonais é dado por M= [<{sin(πη)}]⊥ e N= [ImL]⊥ = KerL+ = <{sin(πη)} o qual a última igualdade foi usado que L é um operador auto-adjunto(isto é , limitado e simétrico). Na etapa 5, escolha v1 = v* = sin(πη).

A Redução do Método de Liapunov-Schmidt resulta em uma equação de uma única variável g(x,λ) = 0 cujas soluções localmente estão em correspondência biunívoca com as soluçoes da equação (4). Não é possível deteminar uma fórmula explícita para g(x,λ), mas analisemos o suficiente das derivadas de g no ponto de bifurcação. Em x = 0,λ = λ0, temos que g = gx = gλ = 0. Temos também que

$$g_{xx} = \lambda_0 f''(0) \int_0^1 v_1^3 d\eta \quad \text{e} \quad g_{\lambda x} = \lambda_0 f'(0) \int_0^1 v_1^2 d\eta \qquad (6)$$

Supondo por hipotese que $f''(0) \neq 00$, então gxx e gλx são ambos não-nulos. Portanto, a solução trivial é bifurcação transcrítica em λ = λ0 se $f''(0) \neq 0$. Pode acontecer que $f''(0)=0$, por exemplo, se f(u) e uma função ímpar e neste caso, a bifurcação é supercrítica ou subcrítica dependendo do sinal de $f''(0)$. Por uma mudança adequada de coordenadas g(x,λ) pode ser transformado para a forma

$$\pm x2 - (\lambda - \lambda 0)x. \tag{7}$$

Para $\lambda \neq \lambda_0$ a equação (7) tem dois zeros, nomeadamente solução trivial x = 0 e a solução não-trivial x = ±(λ − λ0).

Este último zero,é a correspondência entre soluções de g(x,λ) = 0 e soluções da equação Φ(u,λ) = 0. Isto é, g(x,λ) = 0 se e somente se Φ(xv1 + W(xv1,λ),λ) = 0. A solução (x,λ) de g(x,λ) está associada a solução u = xv1 + W(xv1,λ), ou ainda,

$$u(\eta) = xv1(\eta) + W(xv1(\eta),\lambda). \tag{8}$$

Além disso, Wx(0,λ0) = Wλ(0,λ0) = 0. Escrevendo W em Série de Taylor em (0,λ0) temos que

$$W(xv1,\lambda 0) = W(0,\lambda 0) + Wx(0,\lambda 0)x + W\lambda(0,\lambda 0)x + O(x2).$$

Então W(xv1,λ0) = O(x2) dos resultados anteriores e o fato que W(0,λ) = 0.

Portanto, u(η) = xv1 + W(xv1(η),λ0) = xv1 + O(x2), isto é, as soluções não-triviais tem uma estrutura espacial de v1 perto do ponto de bifurcação.

No entanto, se f(u) e uma função ímpar então $f''(0)=0$ e neste caso,

gxx = 0 e

$$g_{xxx} = \lambda_0 f'''(0) \int_0^1 v_1^4 d\eta.$$

Agora, a bifurcação é supercrítica ou subcrítica de acordo com $f'''(0)=0$ é positivo ou negativo, com a forma $\pm x^3 - \lambda x$.

Considerando a função f(u) tal que tenhamos a sequência:

$$f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{k-1}(0) = 0 \text{e } f^n(0) \neq 0$$

então temos o problema de bifurcação com a forma canônica ±xn − λx = 0.

4 I CONCLUSÕES

O Teorema de Crandall-Rabinowitz fornece uma condição suficiente para que um ponto (λ0,u0) seja um ponto de bifurcação local e o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt determina a função de bifurcação. Por fim, pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema da equação de difusão e o problema de bifurcação é apresentado na forma canônica e dependendo das derivadas de primeira ordem até n-ésima ordem da função f no equilíbrio nulo a bifurcação é supercrítica ou subcrítica.

REFERÊNCIAS

Grindrod, P. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations, Patterns and Waves. **Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series**, p. 1-275, 1996.

H. Kielhofer. **Bifurcation Theory:An Introduction with Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 2011.

M. Golubitsky. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory**, vol I and vol II. Espringala,Harper-Row, New York, 1985.

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022