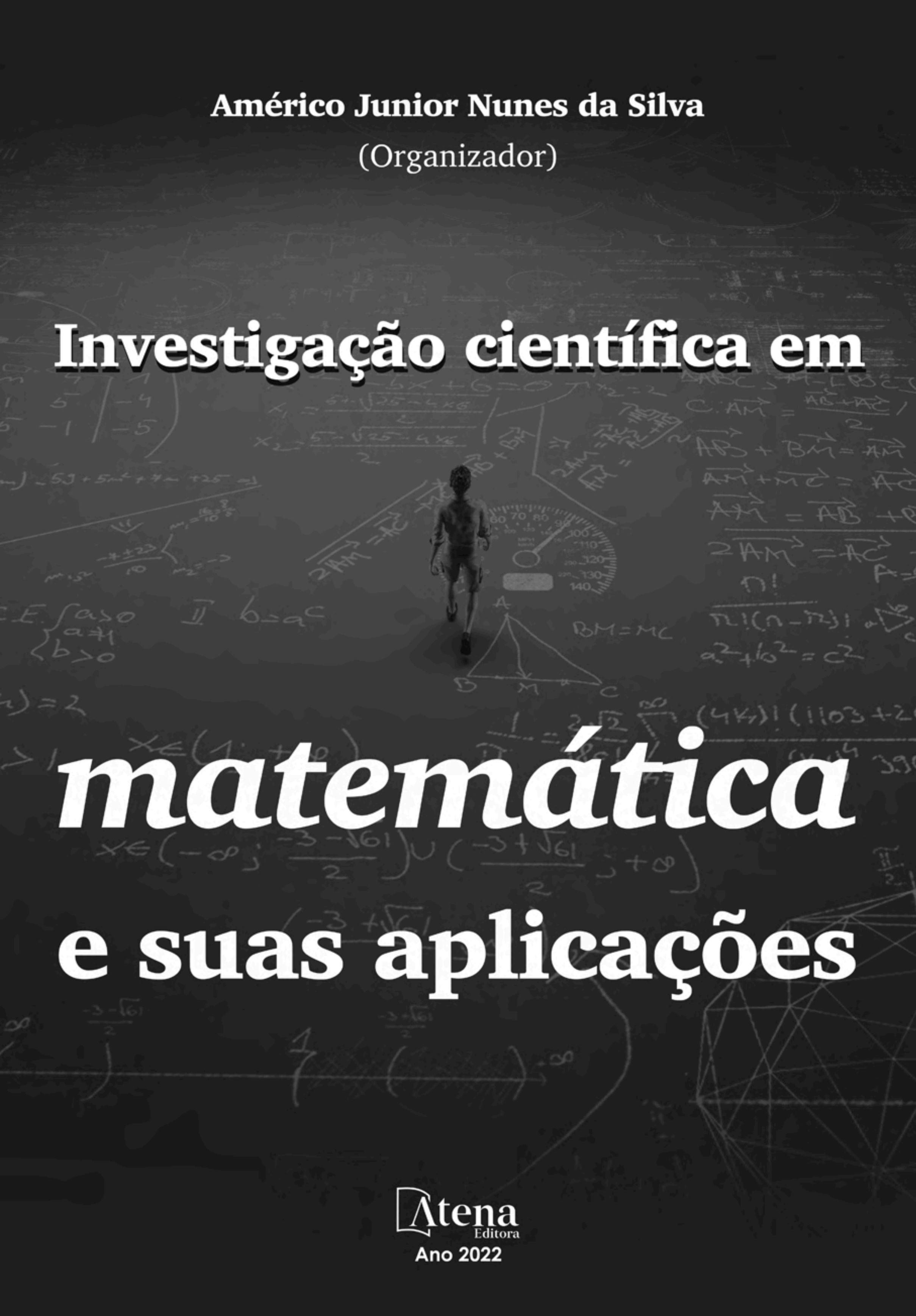
Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0116-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 7

DE LOS REALES A LOS COMPLEJOS, SÓLO HAY UN PEQUEÑO PASO

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 08/04/2022

Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara
Guadalajara, Jalisco, México
https://orcid.org/ 0000-0001-8313-9443

Vladimir Efremov
Universidad de Guadalajara
Guadalajara, Jalisco, México

Juan Martín Casillas González
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente
Guadalajara, Jalisco, México

RESUMEN: En nuestra experiencia, los estudiantes universitarios que comienzan el estudio de Análisis Complejo se enfrentan a algunas dificultades relacionadas con el concepto del infinito, mismas que pueden evitarse si se añaden unos cuantos conceptos a los cursos básicos que incluyen números reales y complejos. En este trabajo se presenta a los profesores de nivel medio y del primer año universitario, analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado tanto en el campo de los números reales como en los números complejos. Nuestra propuesta consiste en desarrollar el concepto del punto al infinito para el plano complejo en términos de la proyección estereográfica y compararlo con el concepto de puntos al infinito en la recta real, con apoyo de la computadora. Las demostraciones formales se dejan para cursos avanzados, en su lugar proponemos actividades de visualización que permitan a los estudiantes entender estos conceptos básicos. Se espera que, con estas actividades, los estudiantes de cursos matemáticos elementales tengan un panorama más amplio de las matemáticas avanzadas.

PALABRAS CLAVE: Plano complejo, proyección estereográfica.

FROM REAL TO COMPLEX, THERE IS ONLY ONE SMALL STEP

ABSTRACT: From our own experience, college students who approach the study of Complex Analysis face some difficulties related to the concept of infinity, which can be avoided by adding a few concepts to the basic courses that include real and complex numbers. In this work, high school and first-year university teachers are presented with an analysis of the subtle differences with which infinity is approached both in the field of real numbers and in complex numbers. Our proposal consists in developing the concept of the point at infinity for the complex plane in terms of the stereographic projection and comparing it with the concept of points at infinity on the axis of the real numbers, with the support of the computer. Formal proofs are left for advanced courses, instead we propose visualization activities that allow students to understand these basic concepts. With these activities, it is hoped that students in elementary mathematics courses will have a broader view of advanced mathematics.

KEYWORDS: Complex plane, Stereographic

projection.

1 I INTRODUCCIÓN

Los números complejos se abordan brevemente en los primeros cursos universitarios, como preámbulo a los cursos de Precálculo o Álgebra, para continuar con materias tales como Cálculo Diferencial e Integral. Aunque estos cursos son obligatorios en las todas carreras universitarias del área de Ciencias Exactas e Ingenierías, son menos frecuentes los cursos de Análisis Real y Análisis Complejo, que se restringen a las carreras de Física, Matemáticas y algunas Ingenierías. No obstante, es interesante analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado en los cursos mencionados, con la intención de ampliar el conocimiento matemático de los alumnos, y que ellos desarrollen el pensamiento matemático que se requiere en las diversas carreras del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México.

Los primeros cursos de matemáticas en el CUCEI se enfocan en el campo de los números reales, pero incluyen una rápida "ojeada" a los números complejos. Se comienza con la necesidad de ampliar los números reales, se abordan sus formas de representación (binomial, trigonométrica y exponencial) y las operaciones básicas entre los números complejos (adición, sustracción, multiplicación, potencias, raíces). Después de esto, se abordan ramas de las matemáticas en las que solamente se manejan números reales, tales como Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial, Álgebra Lineal, Análisis Numérico, Análisis Real, etc. Una vez concluidos estos cursos, en algunas carreras se ha incluido el estudio de la variable compleja. A su vez, el curso de Análisis Complejo comienza desde los mismos temas con que se concluyó, un año antes, el estudio de los números complejos; en este nivel, los estudiantes son capaces de demostrar teoremas y propiedades de los números complejos.

Por otra parte, la proyección estereográfica, entendida como la transferencia de un elemento (punto) desde una esfera a un plano, o viceversa, es un ejemplo clásico de transformaciones, cuyas aplicaciones más comunes se encuentran en la topografía, la cartografía y la geología. En el ámbito matemático este procedimiento se discute en los cursos de geometría diferencial y representa un área de oportunidad valiosa, ya que atiende:

- la transformación entre espacios,
- la diferenciabilidad de estas transformaciones
- los límites de estas transformaciones
- los elementos geométricos y analíticos que se involucran.

Estas características no solo atienden a funciones de variable real, sino que aparecen en otros cursos, tales como el de variable compleja, donde pueden discutirse temas como el límite de una función compleja cuando su argumento tiende al infinito, y el límite al infinito de una función compleja.

Nuestra propuesta consiste en añadir al primer curso en el que se abordan los números complejos (Precálculo o Álgebra, según la carrera de que se trate), los conceptos de “punto al infinito”, “recta real extendida”, “plano complejo extendido”, “recta real proyectivamente extendida” y homeomorfismo, para lo cual es necesaria la proyección estereográfica. Para facilitar el aprendizaje, dado que está dirigido a estudiantes de primer ingreso, hemos diseñado unas sencillas actividades mediadas por computadora, con el fin de que los estudiantes visualicen las relaciones entre conceptos.

En este trabajo no se pretende profundizar en el concepto del infinito, sino proponer una reflexión sobre posibles detalles que generan confusión en los estudiantes que transitan del Análisis Real al Análisis Complejo.

En la primera parte de este documento, dirigido a profesores de enseñanza media o de los primeros cursos del nivel superior, abordaremos los conceptos básicos involucrados en este trabajo, tales como el límite al infinito de una sucesión en el plano complejo, las igualdades básicas que involucran al infinito y las expresiones que carecen de sentido por llevar a incertidumbres.

En la segunda parte se abordan la proyección estereográfica y su visión geométrica, la cual involucra la noción de homeomorfismo. Aquí se incluyen algunos temas vinculados con el infinito y la proyección estereográfica, que se abordan en los cursos de Análisis Real. Aunque estos temas requieren diversas demostraciones en los cursos de Análisis Complejo, nuestra propuesta es abordarlos a un nivel acorde al programa de estudios del primer año universitario.

Finalmente, describimos unas actividades mediadas por computadora, para que el estudiante tenga la oportunidad de manipular los objetos matemáticos involucrados y así, construya activamente el significado del punto infinito y la proyección estereográfica.

2 | CONCEPTOS BÁSICOS

La propiedad de orden de los números reales establece que, si a y b son números reales diferentes, entonces $a < b$ ó $b < a$. Los números complejos carecen de esta propiedad de orden, ya que no es posible determinar, por ejemplo, si $3+i5$ es mayor o menor que $5+i3$, aunque sí existe una propiedad de orden parcial, si nos referimos al módulo de dichos números complejos.

Al comenzar el estudio del Análisis Complejo, se dice que la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}$ debe contener dos puntos al infinito $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, para conservar dicha propiedad de orden. También se dice que el plano complejo extendido ($\overline{\mathbb{C}}$) naturalmente contiene solo un punto infinito $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que aparece como el “polo norte” en la esfera de Riemann S^2, como resultado de la proyección estereográfica.

Sin embargo, si estamos dispuestos a sacrificar el orden completo del eje real, podemos aplicar el análogo uno-dimensional de la proyección estereográfica y obtener la recta real proyectivamente extendida $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que es topológicamente equivalente, es decir homeomorfa, a una circunferencia unitaria S^1. A continuación, explicaremos la relación entre todas estas nociones.

3 I EL PUNTO AL INFINITO

El concepto del punto al infinito se utiliza para hablar inteligiblemente sobre límites infinitos (Marsden y Hoffman, 1999). Desde los primeros cursos universitarios, los estudiantes conocen el conjunto de los números complejos (finitos) $\mathbb{C}$, y que cualquier elemento de ese conjunto ($z \epsilon \mathbb{C}$) puede representarse en coordenadas cartesianas como $z=x+iy$ (forma binomial o cartesiana), donde x es la parte real de z ($x=Rez$) e y es la parte imaginaria de z ($y=Imz$). El número i se llama unidad imaginaria y tiene la propiedad determinante $i^2=-1$.

Se define el punto impropio ∞, que no pertenece al conjunto de los números complejos finitos mediante una sucesión que tiene límite al infinito. Por definición, una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos finitos, tiene límite al infinito ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$), si para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número natural $N(\varepsilon)$ tal que el módulo de z_n, es mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, siempre que $n > N(\varepsilon)$. Este límite es lo que denominamos punto al infinito (∞).

Nótese que para el punto al infinito no están definidas ni la parte real, ni la parte imaginaria. Para el módulo del infinito ∞ se usa el símbolo +∞, esto es $|\infty|=+\infty$, el cual pertenece a la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}$.

Para ciertos propósitos, es posible definir algunas operaciones entre ∞ y cualquier número complejo, mediante algunas “reglas” que tienen sentido en el contexto de límites (Zill y Shanahan, 2011; Markushevich, 1987):

1) $\infty \pm z = z \pm \infty = \infty;$

2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, si\ z \neq 0;$

3) $z/\infty = 0;\ \infty/z = \infty;$

4) $z/0 = \infty, si\ z \neq 0;$

5) $\infty \cdot \infty = \infty$

Algunas operaciones carecen de sentido, tal es el caso de: $\infty \pm \infty$, $0\ \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, pues en estos casos, la aplicación de los límites nos lleva a incertidumbres.

En consecuencia, se puede definir el plano complejo extendido como la unión formal del plano complejo $\mathbb{C}$ y el punto al infinito.

4 | PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

La representación geométrica del plano extendido en el espacio (tridimensional), se obtiene por medio del procedimiento denominado proyección estereográfica. En dicha representación es posible demostrar (en cursos avanzados) que el plano complejo extendido es equivalente a una esfera unitaria bidimensional S^2, conocida como esfera de Riemann (figura 1).

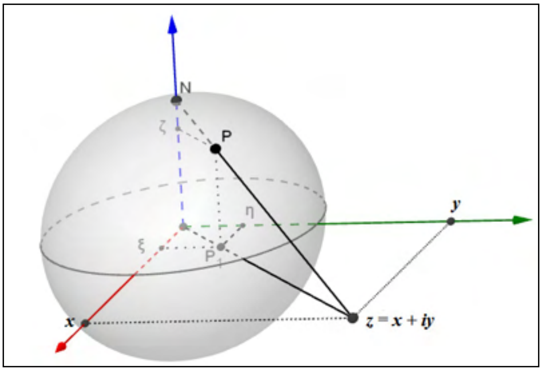


Figura 1. Esfera de Riemann y el plano complejo extendido

Para realizar la proyección estereográfica introducimos en un espacio euclidiano de tres dimensiones las coordenadas ξ,η,ζ, tales que los ejes ξ y η coinciden con el eje real (Re) y el eje imaginario (Im) en el plano complejo, respectivamente; el eje ζ es perpendicular al plano complejo y completa el espacio 3-dimensional. El plano complejo extendido se define por medio de la ecuación $\zeta=0$. Luego se construye una esfera S^2, con radio 1 y centro en el inicio de coordenadas (figura 1), cuya ecuación es $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

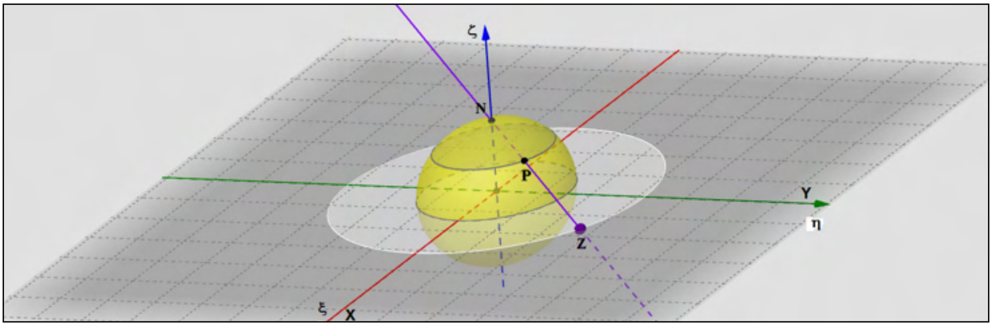


Figura 2. Proyección estereográfica entre la esfera S^2 y $\bar{\mathbb{C}}$.

Se construye una recta *r* que une al punto *z* del plano complejo con el punto *N*(0,0,1), llamado polo norte de la esfera. A cada punto *z*, le corresponde un punto $P(\xi,\eta,\zeta)$

de intersección de la esfera S^2 con la recta *r*. Tal correspondencia $z \to P$ se llama proyección estereográfica.

Bajo la proyección estereográfica, tanto los círculos en $\mathbb{C}$ y las rectas en $\bar{\mathbb{C}}$, se transforman en círculos en S^2, y viceversa. De esta manera, es fácil identificar el significado geométrico del límite al infinito $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, si se define una ε-vecindad del punto al infinito como el conjunto de puntos que están al exterior del círculo de radio $\frac{1}{\varepsilon}$ (Figura 2).

5 I COMPARACIÓN DEL CONCEPTO DE PUNTOS AL INFINITO PARA EL PLANO COMPLEJO Y LA RECTA REAL

Existe una fuerte diferencia entre la recta real $\mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$. El conjunto de los números reales es completamente ordenado respecto a una relación "menor que", es decir para cualquier par de números reales diferentes, x_1 y x_2, siempre se cumple o $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$.

Para los números complejos existen solo órdenes parciales. El más natural de estos órdenes está conectado con las comparaciones de los módulos correspondientes, decimos que $z_1 < z_2$ si $|z_1|<|z_2|$. Este orden es compatible con la existencia del único punto infinito, que hemos definido por medio de la proyección estereográfica.

Para la recta real $\mathbb{R}$, existe un análogo de la proyección estereográfica: por el mismo procedimiento que en el caso $\mathbb{C}$, se obtiene la recta real proyectivamente extendida $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, la cual es homeomorfa a una circunferencia S^1(figura 3). El polo norte *N* corresponde al único punto al infinito. La recta real proyectivamente extendida $\bar{\mathbb{R}}$ pierde el orden completo que se tenía en la recta real ordinaria $\mathbb{R}$, ya que para cualquier par de números reales x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, ahora debemos escribir $\infty<x_1<x_2<\infty$, que es una contradicción.

No obstante, existe la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ que conserva el orden natural de la recta real $\mathbb{R}$. En este caso, la sucesión $-\infty<x_1<x_2<+\infty$ no es contradictoria. La recta $\hat{\mathbb{R}}$ es homeomorfa a un segmento cerrado [-1,+1]. Aquí +1 corresponde a $+\infty$, -1 corresponde a $-\infty$.

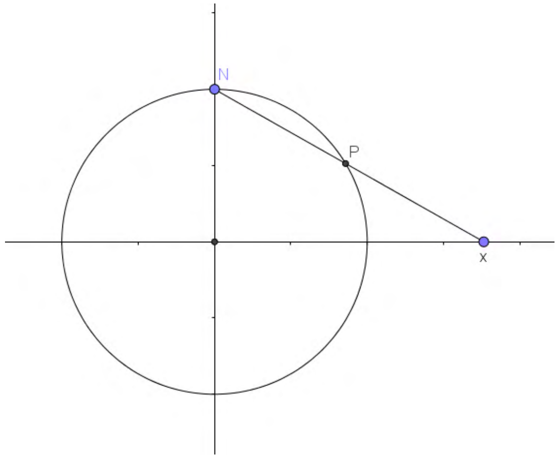


Figura 3. Análogo de la proyección estereográfica para el eje real.

6 | ACTIVIDADES MEDIADAS POR COMPUTADORA

Nuestra propuesta incluye actividades de visualización, con apoyo del programa GeoGebra. Se guía al estudiante en la construcción de la representación geométrica de la proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, para que él mismo compruebe que $-\infty$ y $+\infty$ convergen en N.

Instrucciones.

1. Abrir GeoGebra con: vista algebraica, vista gráfica y vista gráfica 3D.

2. En la gráfica 3D, renombrar los ejes X como Re e Y como Im, para asociar el plano complejo con la gráfica 2D.

3. En vista gráfica 3D, crear una esfera con centro en el punto (0,0,0) y radio 1. Enseguida, quitar graduaciones y números de los tres ejes y mostrar la cuadrícula en el plano complejo.

4. Renombrar el punto $A(0,0,0)$, centro de la esfera, como O y añadir el polo norte $N(0,0,1)$.

5. En Vista gráfica 2D, colocar un punto Z sobre el eje X. En vista gráfica 3D, también aparece el punto Z; trazar el segmento $\overline{ZN}$ y solicitar sus intersecciones con la esfera. De manera automática, se asignan los nombres B y C. Ocultar el punto que coincide con N y renombrar el otro como P (ver figura 4).

6. En vista gráfica 2D, pedir animación del Z, y observar el desplazamiento de P en vista gráfica 3D. También es posible pedir la rotación de la gráfica 3D mientras se observa la animación de Z en el eje real.

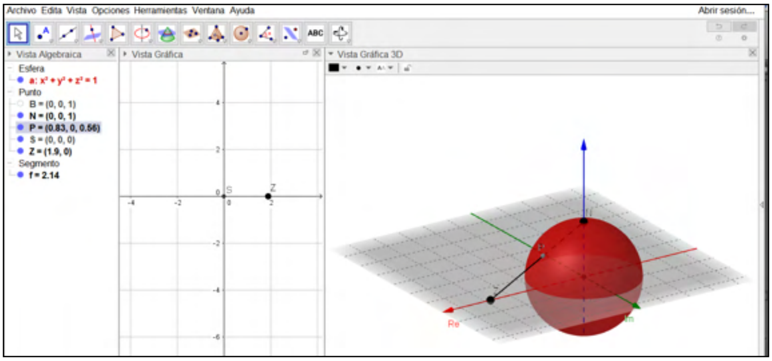


Figura 4. Proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, $-\infty$ y ∞ convergen en N

Se observa que al desplazarse el punto Z hacia $-\infty$ o $+\infty$ en el eje real (Vista gráfica 2D), la proyección de Z en la esfera, es decir, el punto P, se aproxima al polo norte (Vista gráfica 3D). Esto significa que en el complejo extendido existe un solo punto infinito.

7 I CONSIDERACIONES FINALES

En nuestro trabajo hemos abordado los conceptos básicos de la proyección estereográfica, con la finalidad de mostrar a profesores y estudiantes del nivel medio superior (o secundario) la relación entre los contenidos de cursos básicos de matemáticas, con el inicio del Análisis Complejo. Nuestra intención es que los estudiantes de bachillerato o ESO vislumbren el enorme y fascinante campo de los números complejos, al mismo tiempo que se enriquece su proceso de aprendizaje.

Si bien solo describimos aquí solo una actividad mediada por la computadora, por razones de espacio, esperamos que al lector le sea posible construir todas las figuras incluidas en este documento, para implementar más actividades de aprendizaje relacionadas con el campo de los números complejos y la proyección estereográfica.

REFERENCIAS

Markushevich, A. **Teoría de las funciones analíticas**. Moscú: Editorial Mir.1987

Marsden, J. E., Hoffman, M. J. **Análisis básico de variable compleja**. México: Editorial Trillas. 1999

Zill, D., G., Shanahan, P. D. **Introducción al análisis complejo con aplicaciones.** México: Cengage Learning. 2011

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022