

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em



matemática
e suas aplicações

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em



matemática
e suas aplicações

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
162	<p>Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.</p> <p>Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-0116-2 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205</p> <p>1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título. CDD 510.07</p>
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br



DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro “*Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações*” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

META-AVALIAÇÃO DE AVALIAÇÃO RELACIONADA À APRENDIZAGEM DE CONCEITOS LÓGICO-MATEMÁTICOS COM UTILIZAÇÃO DE JOGO DIGITAL

Lucí Hildenbrand

Janaína de Oliveira Augusto

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212051>

CAPÍTULO 2..... 11


VIVÊNCIAS DE OFICINA PEDAGÓGICA: A GINCANA E O MATEMATIZAR POR MEIO DE DIFERENTES METODOLOGIAS ATIVAS

Raimundo Santos Filho

Patrícia Barbosa dos Santos

Vinicius Christian Pinho Correia

Américo Junior Nunes da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212052>

CAPÍTULO 3..... 30


MODELOS MATEMÁTICOS E EPIDEMIAS

Célia Maria Rufino Franco

Ivo Dantas de Araújo

Mateus Ferreira Carvalho da Silva

Eduardo da Silva Lima

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212053>

CAPÍTULO 4..... 42

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE RESPUESTAS AL CÁLCULO DE LA POTENCIA EN UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Osmar Dario Vera

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212054>


CAPÍTULO 5..... 54

ESTUDO DOS FRACTAIS NAS SÉRIES E CÁLCULO NUMÉRICO

Eduarda Maschio Belarmino

Dione Ines Christ Milani

Gustavo Henrique Dalposso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212055>

CAPÍTULO 6..... 60








O USO DA COMPUTAÇÃO GRÁFICA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA







Guilherme Porto

Débora Marília Hauenstein


André Luis Andrejew Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212056>

CAPÍTULO 7.....	68
DE LOS REALES A LOS COMPLEJOS, SÓLO HAY UN PEQUEÑO PASO	
Marisol Radillo Enríquez	
Vladimir Efremov	
Juan Martín Casillas González	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212057	
CAPÍTULO 8.....	76
O ENSINO DE SOMA E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS NO 6º ANO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO DISCO DE FRAÇÃO	
Alan Jorge de Jesus Silva	
Beatriz de Vilhena Medeiros	
Pedro Lucas Viana Ferreira	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212058	
CAPÍTULO 9.....	89
INTRODUÇÃO ÀS IDENTIDADES FUNCIONAIS	
Mateus Eduardo Salomão	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.1622212059	
CAPÍTULO 10.....	93
DESDE LA FORMACIÓN PERMANENTE A LA COMPETENCIA PROFESIONAL	
Núria Rosich Sala	
Yolanda Colom Torrens	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120510	
CAPÍTULO 11.....	101
A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM 2 E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS	
Mateus Eduardo Salomão	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120511	
CAPÍTULO 12.....	106
LUDICIDADE NO ENSINO APRENDIZAGEM: UMA ALIADA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA MATEMÁTICA	
Márcia Cristianne Ramos de Araújo	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120512	
CAPÍTULO 13.....	122
ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER	
Matheus Lima Cornejo	
Fabio Alexander Fajardo Molinares	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120513	

CAPÍTULO 14.....	139
PANORAMA DAS PUBLICAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO BANCO DE DISSERTAÇÕES E TESES DA CAPES NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	
Creomar Moreira da Cruz	
Ana Cristina Gomes de Jesus	
Nilton Cezar Ferreira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120514	
CAPÍTULO 15.....	143
MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE REAÇÃO-DIFUSÃO	
Rosangela Teixeira Guedes	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120515	
CAPÍTULO 16.....	154
O “SEGUIR REGRAS” DE WITTGENSTEIN: UMA ANÁLISE A PARTIR DA CONSTRUÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES AFIM	
Tatiana Lopes de Miranda	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120516	
CAPÍTULO 17.....	171
ABORDAGENS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: OS DESAFIOS DA SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Dionísio Burak	
Laynara dos Reis Santos Zontini	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120517	
CAPÍTULO 18.....	182
GEOGEBRA: A TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS SURDOS	
Gustavo Henrique Silva	
Wáquila Pereira Neigrames	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120518	
CAPÍTULO 19.....	190
PREVISÃO DO ÍNDICE BURSÁTIL IBEX 35 USANDO REDES NEURAS ARTIFICIAIS	
Salvador Falcón Canillas	
Carlos Roberto Minussi	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120519	
CAPÍTULO 20.....	242
METODOLOGIA AULA INVERTIDA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS: UNA APROXIMACION CONCEPTUAL	
Mileidy Marcela Velásquez Aguirre	
Neder Manuel Palma Caballero	
Steven Alberto Liévano González	

Saraí Ana Ortega Pineda

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.16222120520>

SOBRE O ORGANIZADOR.....	256
ÍNDICE REMISSIVO.....	257

ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER

Data de aceite: 02/05/2022

Matheus Lima Cornejo

Estatístico. Mestrando em Quantitative Finance. Alma Mater Studiorum -Universidade de Bolonha
<http://lattes.cnpq.br/3487975850580865>

Fabio Alexander Fajardo Molinares

Professor do Departamento de Estatística-Universidade Federal do Espírito Santo. LECON - Laboratório de Estatística e Computação Natural, UFES
<http://lattes.cnpq.br/7160790421499438>

RESUMO: Este trabalho concentra-se no estudo de metodologias robustas para a análise espectral singular, cuja proposta é a decomposição, filtragem e reconstrução de séries temporais, sendo relevante o tratamento de eventos que podem causar efeitos significativos na dinâmica dos dados e, conseqüentemente, na estrutura de dependência dos mesmos. Exemplos comumente encontrados nas aplicações práticas são a influência de observações atípicas, quebras estruturais, volatilidade, entre outras. Tais eventos podem causar efeitos significativos na modelagem dos dados e influenciar significativamente as decisões baseadas nos modelos ajustados. A influência de observações atípicas causam uma influência significativa na estimação dos parâmetros e na previsão de dados futuros. Os resultados teóricos e empíricos apresentados na literatura incentivaram o estudo de técnicas robustas baseadas em estimadores

tipo M para o tratamento das problemáticas causadas por eventos externos à natureza do conjunto de observações. O interesse neste estudo é verificar o desempenho de uma metodologia robusta usando M-estimadores em cenários com dados contaminados por dados atípicos de tipo aditivo. O estudo empírico realizado mostra o desempenho dos estimadores em situações práticas. Os resultados obtidos indicam uma superioridade da metodologia robusta em relação à clássica.

PALAVRAS-CHAVE: Dados atípicos; Decomposição singular; M-estimador; LTS-estimador; Análise espectral singular.

SINGULAR SPECTRAL ANALYSIS BASED ON THE HUBER FUNCTION

ABSTRACT: This work focuses on the study of robust methodologies for singular spectral analysis, whose proposal is the decomposition, filtering and reconstruction of time series. Moreover, it is relevant in the treatment of events that can cause significant effects on the dynamics of the data and, consequently, on the structure of their dependence. Examples commonly found in practical applications are the influence of outliers, structural breaks, volatility, among others. Such events can have significant consequences on data modeling and significantly influence decisions based on fitted models. The effect of outliers causes a significant impact on the estimation of parameters and on the prediction of future data. The theoretical and empirical results presented in the literature encouraged the study of robust techniques based on M-type estimators for the treatment of problems caused by events

external to the nature of the set of observations. The interest of this study is to verify the performance of a robust methodology using M-estimators in scenarios with data contaminated by atypical data of the additive type. The empirical study carried out shows the performance of the estimators in practical situations. The results obtained indicate a superiority of the robust methodology in relation to the classic one.

KEYWORDS: Atypical data; Singular decomposition; M-estimator; LITERS-estimator; Singular spectral analysis.

1 | INTRODUÇÃO

A análise espectral singular (*singular spectrum analysis* ou SSA, na sigla em inglês) é uma técnica não-paramétrica a partir da qual uma série temporal é decomposta na soma de componentes ortogonais e interpretáveis, as quais representam a tendência, o comportamento oscilatório (componentes periódicas ou quase-periódicas) e uma componente de ruído. Uma vez determinadas estas componentes, as mesmas são selecionadas para reconstruir uma aproximação da série sem ruído, podendo, em seguida, ser utilizadas para realizar previsão (GOLYANDINA & ZHIGLJAVSKY, 2013).

A SSA é uma ferramenta muito útil que pode ser utilizada para encontrar tendências de diferentes naturezas, para realizar alisamento ou suavização nos dados, para extrair componentes de sazonalidade, para extrair simultaneamente componentes cíclicas com pequenos e grandes períodos, para extrair periodicidades com amplitudes diferentes, para verificar a estrutura em séries temporais curtas, para detectar mudanças estruturais, para prever séries temporais univariadas ou multivariadas, entre outras.

A SSA foi desenvolvida para modelar séries temporais lineares ou não-lineares, estacionárias ou não-estacionárias, assim como conjuntos de dados pequenos com estrutura de dependência temporal e com muita variabilidade no processo de ruído Hassani (2007). Na atualidade, o método da SSA tem-se tornado popular em várias áreas do conhecimento como Medicina (DE ALBUQUERQUE PEREIRA & MACIEL 2001; SANEI & HASSANI 2015), Engenharia (CHAO & LOH 2014; LOH ET AL. 2013), Geologia (CHEN & SACCHI 2013), Economia e Finanças (HASSANI ET AL. 2009, 2013, LISI & MEDIO 1997, SILVA & HASSANI 2015). A superioridade do SSA comparada com outras técnicas de análise de séries temporais tem sido demonstrada empiricamente nos trabalhos de Mahmoudvand et al. (2013), Hassani (2007), Hassani & Thomakos (2010), entre outros.

A SSA se inicia pela incorporação dos dados em uma matriz, que é comumente chamada de matriz trajetória. Realiza-se, então, o processo de aproximação de matrizes com posto reduzido, isto é, realiza-se a redução do posto da matriz trajetória seguido do cálculo da média das antidiagonais. Entretanto, como a redução do posto é baseada na norma L_2 (também conhecida como norma de Frobenius), o SSA é sensível à presença de dados atípicos ou *outliers*. A presença de dados atípicos afeta todo o processo do SSA, desde a construção da matriz trajetória até o cálculo da média das antidiagonais.

Porém, o seu maior impacto ocorre no processo de aproximação de matrizes com posto reduzido. A existência de dados atípicos faz com que a magnitude dos autovalores cresça, conseqüentemente, aumentando o número de valores singulares e componentes principais, impactando na reconstrução e previsão da série temporal (HASSANI et al. 2014).

Para minimizar os efeitos causados pelos dados atípicos no conjunto de observações foram desenvolvidas metodologias robustas para a SSA baseadas em M-estimadores Chen & Sacchi (2013). A metodologia proposta pelos autores sugere um processo de aproximação de matrizes com posto reduzido, utilizando-se das propriedades robustas das funções com M-estimadores. Além disso, faz-se o uso do método de *iteratively reweighted least-squares* (IRLS) para solucionar tal problemática. Entretanto, não foi proposta nenhuma reconstrução via estimação pontual robusta, e a reconstrução seguiu sendo realizada por meio do cálculo da média das antidiagonais, de acordo com a metodologia clássica da SSA básica. Yarmohammadi & Kalantari (2016) sugeriram a redução do posto da matriz trajetória baseada na norma L_1 e propuseram uma reconstrução via o cálculo da mediana das antidiagonais. Todavia, por falta de precisão teórica e matemática, seus resultados são insatisfatórios.

Visando propor técnicas que ofereçam maior eficiência nas aplicações empíricas, este estudo tem como objetivo propor uma metodologia robusta para a análise espectral singular baseada na aproximação robusta de matrizes com posto reduzido, utilizando um M-estimador com a função de Huber, e na reconstrução via estimação pontual de locação de Huber.

O restante deste documento é dividido em quatro seções. Na Seção 2 é apresentada a metodologia e a base teórica necessária para introduzir, na Seção 3, uma nova versão da SSA. Na Seção 4, investiga-se a performance da metodologia básica da SSA e da nova versão sugerida através de simulações e aplicação à dados reais. Enquanto, na Seção 5, são apresentadas as observações e conclusões adquiridas ao longo do estudo.

2 | METODOLOGIA

O algoritmo para SSA será introduzido de forma concisa neste documento Golyandina & Zhigljavsky (2013).

2.1 Análise Espectral Singular

Seja $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)$ uma série temporal com valores no conjunto dos números reais e de tamanho N , onde $N > 2$ e $x_i \neq 0$, para pelo menos um $i = 1, \dots, N$. Dado o comprimento da janela L ($2 \leq L \leq N - 1$), pode-se construir vetores $\mathbf{X}_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$, $i = 1, \dots, K$, onde $K = N - L + 1$, que formam a matriz trajetória \mathbf{X} , dada por:

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_K] = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_K \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \cdots & x_N \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde os vetores X_i são as colunas da matriz \mathbf{X} . Nota-se que a matriz \mathbf{X} possui elementos iguais em suas antidiagonais, isto é, \mathbf{X} é uma matriz Hankel. As colunas de \mathbf{X} podem ser consideradas como vetores no espaço \mathbb{R}^L . O processo de aproximação de matrizes com posto reduzido da matriz $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ (que é equivalente ao processo da decomposição do valor singular da matriz \mathbf{X}). nos retorna L pares de autovalores e autovetores. Onde uma combinação ao particular de r destes autovetores determina um subespaço \mathcal{L}_r em \mathbb{R}^L , $r < L$. Portanto, os vetores L dimensionais $\{X_1; \dots; X_K\}$ são projetados no subespaço \mathcal{L}_r e, em seguida, é retirada a média das antidiagonais (Hankelização) nos fornecendo uma matriz de Hankel $\tilde{\mathbf{X}}$. A série temporal $(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_N)$, que possui correspondência biunívoca com a matriz $\tilde{\mathbf{X}}$, nos dá uma aproximação da série \mathbf{X} .

2.2 Aproximação de Matrizes com Posto Reduzido na Norma de Frobenius

No método básico de análise espectral singular, a aproximação de matrizes com posto reduzido r se baseia na norma de Frobenius. O objetivo deste processo é encontrar uma matriz $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$ tal que:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(r)} = \arg \min_{\mathbf{t}} \|\mathbf{X} - \mathbf{t}\|_F, \quad (2)$$

onde $\|\mathbf{X} - \mathbf{t}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - t_{ij})^2}$. O problema (2) acima tem mínimo local único, que é global (Srebro & Jaakkola 2003). A solução pode ser obtida de maneira analítica, e é dada pela decomposição do valor singular (SVD). No entanto, a função de perda quadrática faz com que essa solução seja sensível a ruídos não Gaussianos (Cabral et al. 2013). Tal desvantagem, limita a utilização e aplicabilidade do método SSA em situações onde os dados estão contaminados por observações atípicas.

2.3 Hankelização

O cálculo das médias das antidiagonais na SSA é também conhecido como Hankelização. Por conveniência, este processo será representado com a ajuda do operador Hankel, H . Este operador funciona em uma matriz arbitrária $\mathbf{Y}_{L \times K} = (y_{ij})$ da seguinte maneira: para $A_s = \{(l, k) : l + k = s, 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K\}$ e $i + j = s$, o elemento \tilde{y}_{ij} da matriz $H\mathbf{Y}$ é:

$$\tilde{y}_{ij} = \sum_{(l,k) \in A_s} \frac{y_{lk}}{|A_s|}, \quad (3)$$

onde $|A_s|$ denota o número de elementos no conjunto A_s . A Hankelização é um processo de otimização, no sentido de que $H\mathbf{Y}$ é a matriz mais próxima de \mathbf{Y} com respeito a norma L_2 , também chamada de norma de Frobenius.

2.4 Análise Espectral Singular e Observações Atípicas

Como previamente mencionado, a presença de dados atípicos afeta a SSA. Mostra-se, então, nesta seção os principais efeitos causados em diferentes partes da SSA (Hassani et al. 2014).

2.4.1 Matriz Trajetória

Sabe-se que matriz trajetória X é uma matriz Hankel, ou seja, os elementos ao longo de suas antidiagonais são iguais. Logo, a matriz X possui certas características (Mahmoudvand & Zokaei 2011). Sendo uma delas, por exemplo, que a j -ésima observação ao em uma série temporal se repete $w_j^{L:N} = \min \{j; L; N - j + 1\}$ vezes na matriz trajetória X . É importante notar que $w_j^{L:N}$ tem as seguintes propriedades.

1. $w_j^{L:N}$ é uma função côncava em L para todo j , onde $j \in \{1, \dots, N\}$,
2. $w_j^{L:N}$ é uma função côncava em j para todo L , onde $L \in \{2, \dots, N - 1\}$,
3. $w_j^{L:N}$ é uma função simétrica em $(N + 1)/2$ com respeito à j e L .

Portanto, um dado atípico localizado na j -ésima observação em uma série temporal se repetirá $w_j^{L:N}$ vezes na matriz trajetória. Consequentemente, é significativo citar que o posto da matriz trajetória também é afetado, isto é, dados atípicos aumentam o posto da matriz trajetória (Hassani et al. 2014).

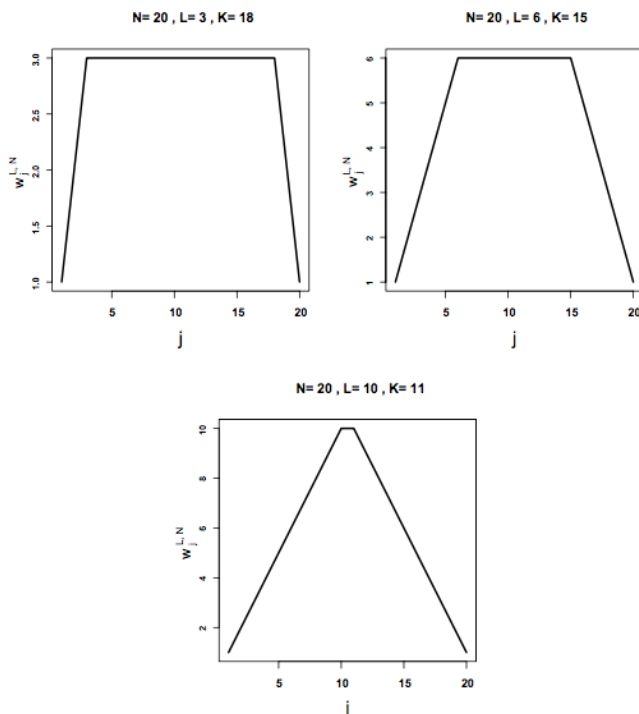


Figura 1 Forma de $w_j^{L:N}$ em função de L para $N = 20$.

2.4.2 Autovalores

A decomposição do valor singular (SVD) fornece uma coleção de L pares de autovalores e autovetores. Verifica-se o efeito da presença de dados atípicos, somando os L autovalores obtidos na SVD da matriz $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Portanto, para um valor L fixo, o traço de $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ é dado por:

$$T_{\mathbf{X}}^{L,N} = \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \sum_{j=1}^L \lambda_j = \sum_{j=1}^N w_j^{L,N} x_j^2, \quad (4)$$

para prova da equação, ver Mahmoudvand & Zokaei (2011).

Assim seja $\mathbf{X}^{(j)}$ a matriz trajetória da série \mathbf{X} após ser contaminada no j -ésimo elemento, isto é, $\mathbf{X}^{(j)} = (x_1, \dots, \delta x_j, \dots, x_N)$. Tem-se, então, que:

$$T_{\mathbf{X}^{(j)}}^{L,N} = T_{\mathbf{X}}^{L,N} + (\delta^2 - 1)w_j^{L,N} x_j^2, \quad (5)$$

onde δ é intensidade do dado atípico. É fácil ver que $w_j^{L,N}$ obtém valor máximo quando $j = L = \text{mediana}\{1, \dots, N\}$, indicando que as observações do meio quando contaminadas afetam com maior intensidade a SSA.

2.5 Aproximação Robusta de Matrizes com Posto Reduzido

Para reduzir os efeitos causados pelos dados atípicos nas observações Chen & Sacchi (2013) sugerem encontrar a matriz $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$ tal que:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(r)} = \arg \min_{\mathbf{t}} \|\mathbf{X} - \mathbf{t}\|_{\rho}, \quad (6)$$

onde $\|\mathbf{X} - \mathbf{t}\|_{\rho} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho(x_{ij} - t_{ij})$, e ρ é uma função simétrica, convexa e $\rho(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Neste caso, em geral, não há expressão analítica para a solução deste problema.

2.6 Hankelização Robusta

É proposto em Kalantari et al. (2016) a ideia de Hankelização robusta. Porém, o mesmo, somente se preocupa em propor a Hankelização para a norma L_1 . Aqui, sugere-se a utilização de qualquer função robusta que possua estimação pontual no procedimento de Hankelização.

Teorema 1 (Hankelização Robusta). *Seja \mathbf{A} uma matriz de dimensões $L \times K$, e $s = i + j$ ($2 \leq s \leq L + K$). Então o elemento \tilde{a}_{ij} da matriz $H[\mathbf{A}]$ com respeito a uma métrica robusta é*

$$\tilde{a}_{ij} = \delta(a_{lk}), \quad (l, k) \in A_s \quad (7)$$

onde δ é a estimação pontual robusta e $A_s = \{(l, k) : l + k = s, 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K\}$.

Prova: Por definição, a matriz Hankel $\mathbf{C} = H[\mathbf{A}]$ com elementos c_{ij} satisfaz as condições $c_{ij} = f_s$, para $i + j = s$ e para um número f_s qualquer. Assim, tem-se:

$$\|\mathbf{A} - \mathcal{H}[\mathbf{A}]\|_{\delta} = \|\mathbf{A} - \mathbf{C}\|_{\delta} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K \delta(a_{ij} - c_{ij}) = \sum_{s=2}^{L+K} \sum_{i+j=s} \delta(a_{ij} - f_s). \quad (8)$$

É evidente observar que o número f_s que minimiza esta relação é uma estimação pontual robusta dos elementos de A_s . Portanto, a Hankelização robusta corresponde em calcular as estimações pontuais robustas das antidiagonais de uma matriz.

3 I ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER

Utilizando a teoria apresentada na seção anterior, faz-se aqui uma rápida introdução à análise espectral singular baseada na função de Huber; destacando as principais mudanças e diferenças em relação à SSA básica e fazendo uma breve introdução ao algoritmo de otimização utilizado.

3.1 Aproximação Huber de Matrizes com Posto Reduzido

Seja ρ a função de Huber dada por:

$$\rho_H(s) = \frac{s^2}{2H} I_{(|s| \leq H)} + (|s| - 0.5H) I_{(|s| > H)}, \quad (9)$$

assim, na aproximação Huber de matrizes com posto reduzido, deseja-se encontrar a matriz $\hat{\mathbf{X}}^{(n)}$ que minimize (6).

Fazendo uso do formato multiplicativo, pode-se reescrever como:

$$\arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}} \|\mathbf{X} - \mathbf{UV}^T\|_{\rho}. \quad (10)$$

A Equação (10), pode ser vista como um problema de regressão bilinear com variáveis \mathbf{U} e \mathbf{V} desconhecidas e pode ser resolvido pelo método de regressão robusta alternada Chen et al. (2008). Para encontrar os valores robustos que minimizem (10), faz-se uso do algoritmo *Fast and Robust Alternating Regression* Feng & He (2017), descrito na próxima subseção.

3.2 Fast and Robust Alternating Regression

3.2.1 Algoritmo

Abaixo, descreve-se brevemente o algoritmo.

Passo 0: Escalação Robusta. A fim de garantir estabilidade numérica e equivalência escalar, realiza-se a escalação robusta para a j -ésima coluna. Tal procedimento é realizado da seguinte forma

$$x_{ij} \leftarrow \frac{x_{ij}}{\text{MAD}_i(x_{ij})},$$

onde $\text{MAD}_j(x_j)$ é o desvio absoluto da médio j -ésima coluna. Este procedimento não

altera o posto da matriz. Caso um dos $MAD_i(x_{ij})$ seja igual a zero, pula-se este passo.

Passo 1: Valores Iniciais. Gere, a partir de uma distribuição uniforme (0, 1), um valor inicial para \mathbf{U}_0 . Contudo, outros valores iniciais podem ser utilizados.

Passo 2: Teste de Estabilidade. M-estimadores com perdas monótonas são robustos contra valores atípicos na variável resposta; porém, essa robustez não é verificada na presença de valores atípicos nas variáveis regressoras. Para isso, o teste de estabilidade usa LTS-estimadores com o intuito de aumentar a robustez contra pontos de alavanca.

Assim dado \mathbf{U}_0 , realiza-se uma regressão das colunas de \mathbf{X} em \mathbf{U}_0 a fim de encontrar ambos M e LTS estimadores; denotados \mathbf{V}_0^M e \mathbf{V}_0^{LTS} , respectivamente. Depois, realiza-se o teste de erro relativo para saber se há diferença significativa entre os elementos de \mathbf{V}_0^M e \mathbf{V}_0^{LTS} . Caso sejam diferentes significativamente, escolhe-se \mathbf{V}_0^{LTS} como \mathbf{V}_0 , do contrário escolhe-se \mathbf{V}_0^M . Com \mathbf{V}_0 fixado, computa-se o M e LTS estimadores para a regressão das linhas de \mathbf{X} em \mathbf{V}_0 , e seguindo o mesmo raciocínio anterior seleciona-se \mathbf{U}_1 , e assim em diante.

O teste de estabilidade continua até que ambos $(\mathbf{U}_m^M, \mathbf{U}_m^{LTS})$ e $(\mathbf{V}_m^M, \mathbf{V}_m^{LTS})$ não apresentem mais diferenças significativas entre seus elementos ou até atingir um número máximo de iterações.

Passo 3: Regressão Huber Alternada. Fixe \mathbf{U}_{m0} , e solucione:

$$v_j = \arg \min \sum_{i=1}^m \rho(x_{ij} - u_i' v_j), j = 1, \dots, n \quad (11)$$

para obter \mathbf{V}_{m0} . Padronizam-se as colunas de \mathbf{V}_{m0} de tal forma que $\mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}_r$. Depois, trate \mathbf{V}_{m0} como fixo, e solucione:

$$u_i = \arg \min \sum_{j=1}^n \rho(x_{ij} - v_j' u_i), i = 1, \dots, m \quad (12)$$

para obter \mathbf{U}_{m0+1} . Continua-se o processo até que se satisfaça as seguintes condições:

1. A diferença entre todos os elementos das matrizes \mathbf{U}_m e \mathbf{U}_{m+1} , \mathbf{V}_m e \mathbf{V}_{m+1} sejam menores que um valor pequeno ϵ_1 ;
2. A mudança na função objetivo $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho(x_{ij} - u_i v_j')$ não ultrapasse um valor pequeno ϵ_2 .

Passo 4: Solução. Uma vez que a iteração no passo 3 acabe, os valores finais \mathbf{U}_m e \mathbf{V}_m são considerados como soluções para o problema.

Assim, a matriz trajetória pode ser escrita como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_r, \quad (13)$$

onde $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$, $i = 1, 2, \dots, r$.

3.2.2 Overfit e Underfit

Dado r , o algoritmo acima, encontra as matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} de posto r que minimizam (10). Porém, como na prática não se conhece r , casos de *overfitting* e *underfitting* podem ocorrer. Chen et al. (2008) detalham as consequências de ambos e conclui que é mais seguro ajustar regressões robustas alternadas em postos de menores magnitudes, uma vez que *overfitting* faz com que o algoritmo tente interpretar as informações errôneas introduzidas pelos dados atípicos. Gerando, assim, problemas de convergência e robustez.

Além disso, Chen et al. (2008) ainda sugerem duas soluções para contornar tal problema. Sendo a primeira: o aumento gradativo de r , aliado à análise dos valores da função de custo para decidir o melhor r . E a segunda: usar a regressão L_1 ponderada de Croux et al. (2003), com pesos baseados no estimador da matriz de covariâncias de determinante mínimo de Rousseeuw (1984), porém deixa claro que o último possui custo computacional elevado.

3.3 Hankelização Huber

A partir do Teorema 1, pode-se utilizar a estimação pontual de localização da função de Huber nas antidiagonais como método de reconstrução. De agora em diante, esse procedimento será denominado de Hankelização Huber.

4 | RESULTADOS EMPÍRICOS

Avalia-se, nesta seção o desempenho do Huber-SSA em séries temporais simuladas e séries temporais reais, ambas contaminadas com dados atípicos. Para isso, adotou-se as medidas de erro quadrático médio (RMSE)

$$\text{RMSE} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2}{n} \right]^{1/2},$$

onde \hat{x}_i e x_i representam respectivamente os valores ajustados e observados no i -ésimo tempo. Tal critério de avaliação é extremamente conhecido e usado frequentemente em análise de séries temporais. Além disso, compara-se os resultados obtidos, com os do SSA básico.

Nos exemplos, escolheu-se a janela de comprimento L e posto r de acordo com os dados, porém seguindo as conclusões obtidas em Atikur Rahman Khan & Poskitt (2013), Hassani & Mahmoudvand (2013), Mahmoudvand et al. (2013), Feng & He (2017), Chen et al. (2008).

4.1 Série simulada

Exemplo 1: Gerou-se uma série AR(1) com $\phi = 0.3$ contendo 72 observações, e adicionou-se à ela as seguintes componentes de senos e cossenos:

$$S_1(t) = 2 \cos(12t\pi/n) + 3 \sin(12t\pi/n),$$

$$S_2(t) = 4 \cos(20t\pi/n) + 5 \sin(20t\pi/n).$$

Além disso, adicionaram-se aleatoriamente três observações atípicas de tipo aditivo nas posições 13, 31 e 66. A Figura 2 mostra o gráfico da série temporal antes e depois da contaminação, onde denominou-se *free* como a série sem contaminação e *cont* a série depois de ter sido contaminada. A fim de obter a melhor performance, escolheu-se L igual a 24 e r igual a 10 como recomendado por Atikur Rahman Khan & Poskitt (2013) e Chen et al. (2008), respectivamente.

Pode-se observar na Figura 3 as dez primeiras componentes reconstruídas para a série *cont* após a aplicação da SSA básica; enquanto na Figura 4, encontram-se as dez primeiras componentes reconstruídas para a SSA robusta. Fica evidente a capacidade de minimizar ruídos gerados pela presença de *outliers* no conjunto de dados. Com exceção das componentes 1, 2 e 3, que são comumente conhecidas como componentes harmônicas, todos apresentam amplitudes inferiores.

Comparou-se as séries reconstruídas por ambos os métodos com a série original livre de contaminação por dados atípicos, *free*. Enquanto a série reconstruída pela SSA básica obteve RMSE igual a 1.09, a série reconstruída pela SSA robusta obteve .90. Uma melhora de aproximadamente 20%.

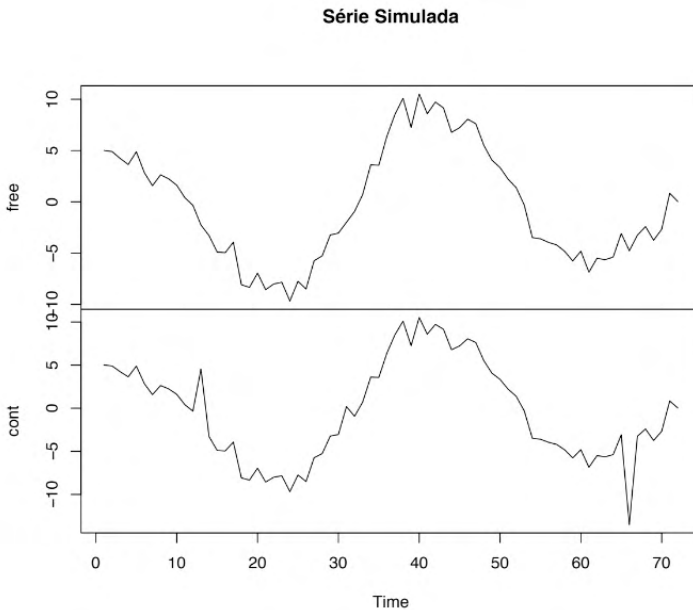


Figura 2 Série AR(1) com $\phi = 0.3$ simulada sem e com contaminação por *outliers*.

Classic Principal Components of Reconstructed TS

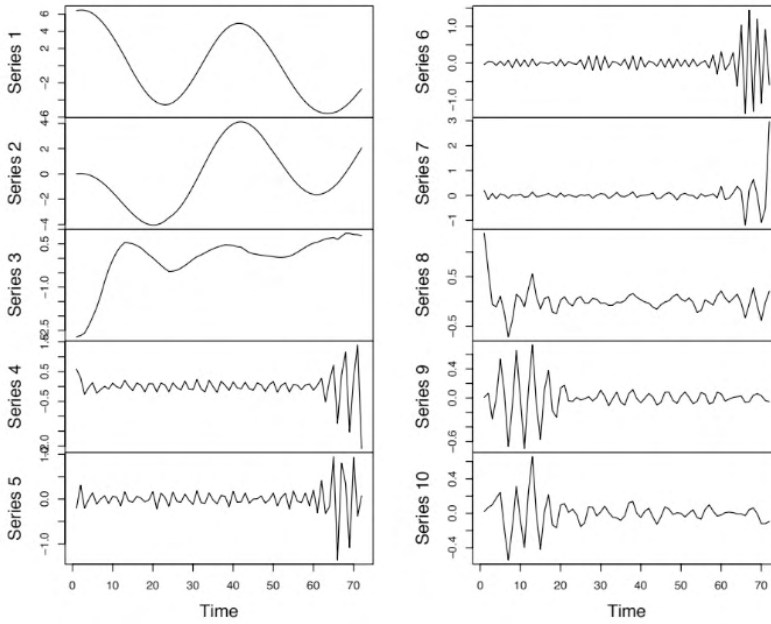


Figura 3 Dez primeiras componentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.3$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA básica.

Robust Principal Components of Reconstructed TS

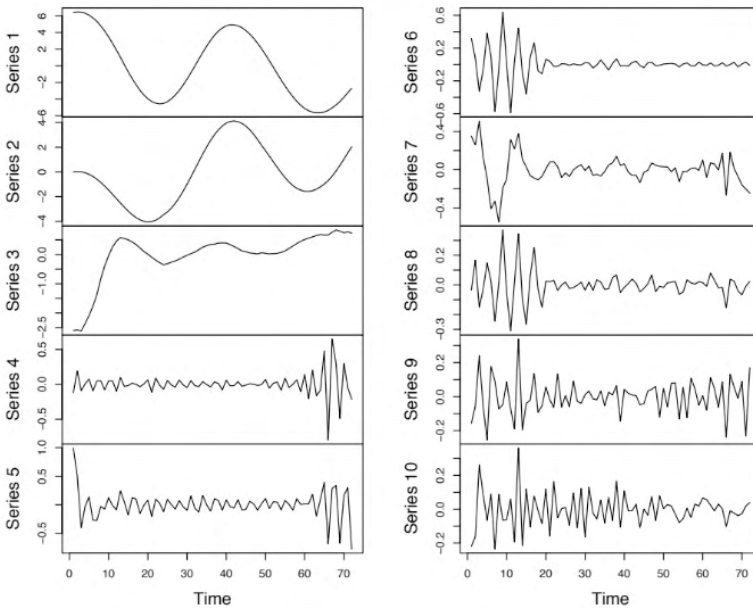


Figura 4 Dez primeiras componentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.3$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA robusta.

Exemplo 2: Simulou-se, neste exemplo, uma série AR(1) com $\phi = 0.9$, também contendo 72 observações, e adicionou-se à ela a seguinte componente de seno e cosseno:

$$S_1(t) = 2 \cos(12t\pi/n) + 3 \sin(12t\pi/n).$$

Foi-se adicionado aleatoriamente um *outlier* na posição 62. Encontram-se na Figura 5, a série original, denominada como *free1*, e a contaminada denominada como *cont1*. Optou-se por escolher L igual a 36 e r igual 10, como sugerido em Mahmoudvand et al. (2013) e Feng & He (2017).

Observa-se nas Figuras 6 e 7 as dez primeiras componentes reconstruídas utilizando a metodologia robusta e a básica, respectivamente. Repare que houve uma troca entre as componentes 6 e 5. É possível notar uma suavização seguida de uma atenuação nas componentes 8, 9 e 10.

Calculou-se o RMSE entre as séries reconstruídas por ambas metodologias e a série *free1*. E verificou-se que a metodologia robusta ofereceu uma melhora de 15%.

4.2 Série real

O conjunto de dados do rio Nilo é uma série temporal bem conhecida, e já foi extensamente analisada. Os dados são examinados com detalhe em Beran (1994), e consiste dos níveis mínimos anuais da água do rio Nilo em metros, entre 622 D.C. à 1281 D.C.



Figura 5 Série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada sem e com contaminação por *outliers*.

Robust Principal Components of Reconstructed TS

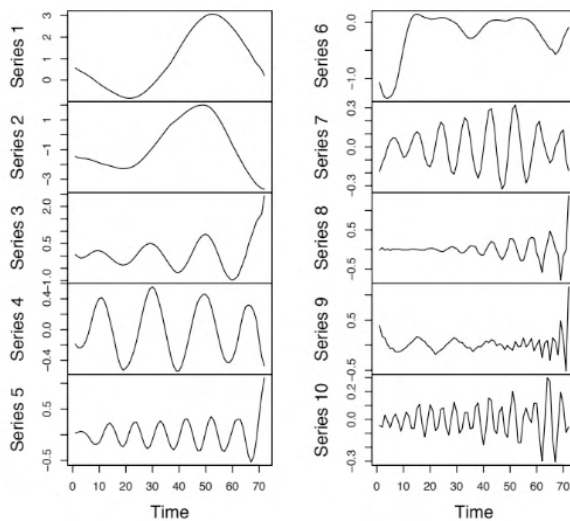


Figura 6 Dez primeiras componentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA robusta.

Várias discussões já ocorreram sobre a existência ou não de dados atípicos neste conjunto de dados. Entretanto, em Chareka et al. (2006) concluiu-se que as observações nos anos 646 D.C., 809 D.C. e 876 D.C. são atípicas do tipo aditivo.

Classic Principal Components of Reconstructed TS

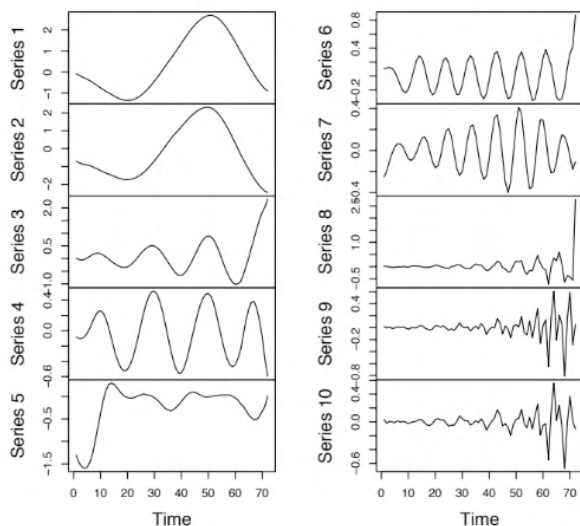


Figura 7 Dez primeiras componentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA básica.

Aplicou-se, então, à esses dados a metodologia da análise espectral singular robusta introduzida na Seção 3. Para isso, escolheu-se um comprimento de janela L igual a 18 e r igual 8, com o intuito de evitar *overfitting* na aproximação Huber de matrizes com posto reduzido.

Encontram-se nas Figuras 9 e 10, as oito primeiras componentes principais da série reconstruída de nível mínimo do rio Nilo utilizando a SSA robusta e a SSA básica, respectivamente. Note que para as quatro primeiras componentes ambos os métodos apresentam resultados semelhantes, porém pode-se observar que a diferença entre os métodos se acentua a partir da quinta componente, destacando-se as componentes 6 e 8. Assim, fica evidente de que a SSA robusta se mostra mais vantajosa em relação ao clássico na atenuação de ruídos em situações onde o conjunto de dados está contaminado por *outliers*.

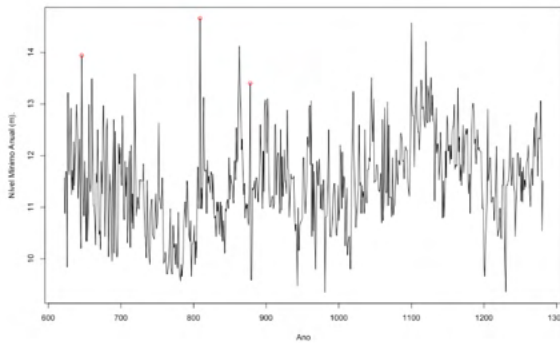


Figura 8 Série de nível mínimo do rio Nilo de 622 D.C. à 1281 D.C., com os dados atípicos identificados.

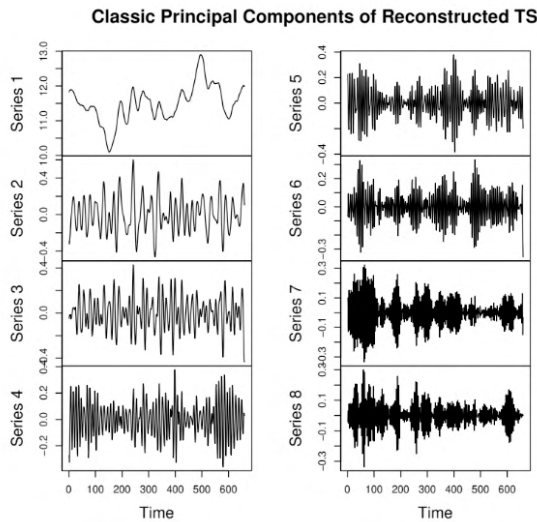


Figura 9 Oito primeiras componentes principais da série reconstruída de nível mínimo do rio Nilo para a SSA robusta.

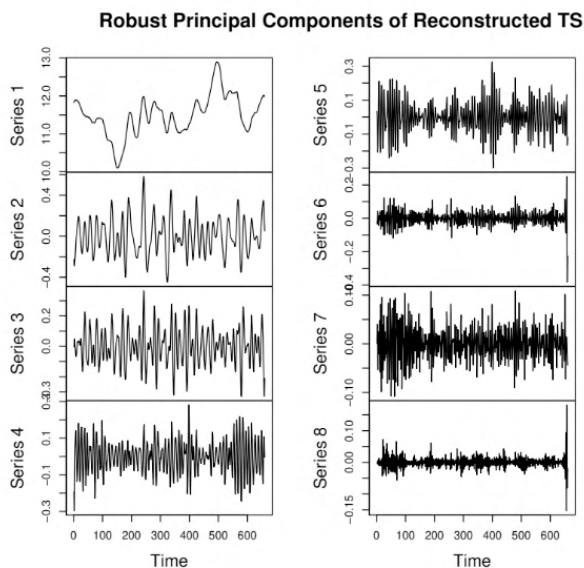


Figura 10 Oito primeiras componentes principais da série reconstruída de nível mínimo do rio Nilo para a SSA básica

5 I CONCLUSÃO

Conclui-se que esta nova metodologia de SSA robusta apresenta ser adequada para a atenuação de ruídos gerados pela presença de observações atípicas no conjunto de dados. Mostrando ser de extrema relevância para o tratamento de séries temporais com *outliers* de tipo aditivo.

Como limitação do estudo, destaca-se o custo computacional elevado para matrizes com maior número de linhas e colunas. Além disso, é importante mencionar a influência que o comprimento de janela L possui no processo. Em algumas ocasiões, o tamanho do L se mostrou fundamental para que a SSA clássica superasse a metodologia robusta.

Sugere-se como continuação a este trabalho, um estudo detalhado da influência que o comprimento da janela L exerce na SSA quando aplicada em séries contaminadas. Também recomenda-se um estudo sobre a performance da SSA robusta para a previsão de observações futuras.





REFERÊNCIAS

Atikur Rahman Khan, M. & Poskitt, D. (2013), 'A note on window length selection in singular spectrum analysis', *Australian & New Zealand Journal of Statistics* **55**(2), 87–108.

Beran, J. (1994), *Statistics for long-memory processes*, Vol. 61, CRC press.

- Cabral, R., De la Torre, F., Costeira, J. & Bernardino, A. (2013), Unifying nuclear norm and bilinear factorization approaches for low-rank matrix decomposition, in 'Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision', pp. 2488–2495.
- Chao, S.-H. & Loh, C.-H. (2014), 'Application of singular spectrum analysis to structural monitoring and damage diagnosis of bridges', *Structure and Infrastructure Engineering* **10**(6), 708–727.
- Chareka, P., Matarise, F. & Turner, R. (2006), 'A test for additive outliers applicable to long-memory time series', *Journal of Economic Dynamics and Control* **30**(4), 595–621.
- Chen, C., He, X. & Wei, Y. (2008), 'Lower rank approximation of matrices based on fast and robust alternating regression', *Journal of Computational and Graphical Statistics* **17**(1), 186–200.
- Chen, K. & Sacchi, M. D. (2013), Robust singular spectrum analysis for erratic noise attenuation, Technical report, CSPG/CSEG/CWLS GeoConvention 2013, Integration: Geoscience Engineering Partnership, 6-12 May 2013, Calgary, AB, Canada.
- Croux, C., Filzmoser, P., Pison, G. & Rousseeuw, P. J. (2003), 'Fitting multiplicative models by robust alternating regressions', *Statistics and Computing* **13**(1), 23–36.
- de Albuquerque Pereira, W. C. & Maciel, C. D. (2001), 'Performance of ultrasound echo decomposition using singular spectrum analysis', *Ultrasound in medicine & biology* **27**(9), 1231–1238.
- Feng, X. & He, X. (2017), 'Robust low-rank data matrix approximations', *Science China Mathematics* **60**(2), 189–200.
- Golyandina, N. & Zhigljavsky, A. (2013), *Singular Spectrum Analysis for time series*, Springer Science & Business Media.
- Hassani, H. (2007), 'Singular spectrum analysis: Methodology and comparison', *Journal of Data Science* **5**, 239–257
- Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2009), 'Forecasting european industrial production with singular spectrum analysis', *International journal of forecasting* **25**(1), 103–118.
- Hassani, H. & Mahmoudvand, R. (2013), 'Multivariate singular spectrum analysis: A general view and new vector forecasting approach', *International Journal of Energy and Statistics* **1**(01), 55–83.
- Hassani, H., Mahmoudvand, R., Omer, H. N. & Silva, E. S. (2014), 'A preliminary investigation into the effect of outlier (s) on singular spectrum analysis', *Fluctuation and Noise Letters* **13**(04), 1450029.
- Hassani, H., Soofi, A. S. & Zhigljavsky, A. (2013), 'Predicting inflation dynamics with singular spectrum analysis', *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)* **176**(3), 743–760.
- Hassani, H. & Thomakos, D. (2010), 'A review on singular spectrum analysis for economic and financial time series', *Statistics and its Interface* **3**(3), 377–397.
- Kalantari, M., Yarmohammadi, M. & Hassani, H. (2016), 'Singular spectrum analysis based on l_1 -norm', *Fluctuation and Noise Letters* **15**(01), 1650009.





- Lisi, F. & Medio, A. (1997), 'Is a random walk the best exchange rate predictor?', *International Journal of Forecasting* **13**(2), 255–267.
- Loh, C.-H., Li, J.-H. & Chao, S.-H. (2013), 'Application of singular spectrum analysis to identify the degrading structure using deteriorating distributed element model', *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **42**(5), 743–761.
- Mahmoudvand, R., Najari, N. & Zokaei, M. (2013), 'On the optimal parameters for reconstruction and forecasting in singular spectrum analysis', *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **42**(4), 860–870.
- Mahmoudvand, R. & Zokaei, M. (2011), 'On the singular values of the hankel matrix with application in singular spectrum analysis', *Chilean Journal of Statistics* **3**(1), 43–56.
- Rousseeuw, P. (1984), 'Least median of squares regression', *Journal of the American Statistical Association* **79**, 871–880.
- Sanei, S. & Hassani, H. (2015), *Singular spectrum analysis of biomedical signals*, CRC Press.
- Silva, E. S. & Hassani, H. (2015), 'On the use of singular spectrum analysis for forecasting us trade before, during and after the 2008 recession', *International Economics* **141**, 34–49.
- Srebro, N. & Jaakkola, T. (2003), 'Weighted low-rank approximations, paper presented at 20th international conference on machine learning, assoc. for the adv. of art', *Intell., Washington, DC*.
- Yarmohammadi, M. & Kalantari, M. (2016), Robust singular spectrum analysis, in 'International Conference on Robust Statistics', p. 1.

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em



matemática e suas aplicações

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em



matemática e suas aplicações