Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

2022 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do texto © 2022 Os autores
Copyright da edição © 2022 Atena Editora
Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.
Open access publication by Atena Editora

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial
Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre
Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Maiara Ferreira
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão:	Os autores
Organizador:	Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0116-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

MODELOS MATEMÁTICOS E EPIDEMIAS

Data de aceite: 02/05/2022

Célia Maria Rufino Franco
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité - Paraíba
http://lattes.cnpq.br/1728798138944094

Ivo Dantas de Araújo
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/3069265759080879

Mateus Ferreira Carvalho da Silva
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/6765321340841781

Eduardo da Silva Lima
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité - Paraíba
http://lattes.cnpq.br/3705577178602392

RESUMO: As equações diferenciais são utilizadas com frequência na construção de modelos matemáticos aplicados em várias áreas do conhecimento, tais como: nas engenharias, na física, na química, na biologia, na ecologia e na medicina. Este trabalho tem como objetivo apresentar ferramentas matemáticas para compreender a evolução de uma epidemia. Inicialmente utilizou-se modelos de crescimento exponencial e logístico para descrever a evolução de uma doença. Com isto, foi possível analisar algumas aplicações da teoria da dinâmica populacional no contexto de pandemias e verificar como as equações autônomas são usadas para formular modelos importantes no estudo, controle e enfretamento de pandemias. Em seguida, foi realizado um estudo do modelo matemático clássico em epidemiologia do tipo SIR (suscetível-infectado-removido). O modelo SIR foi resolvido numericamente e aplicado para descrever a evolução da Covid-19 no Brasil. Dados oficiais de infectados pela Covid-19 foram comparados com os dados simulados e a taxa de infecção foi determinada pelo método dos mínimos quadrados. O modelo SIR descreve bem os dados de infectados no Brasil para o período analisado.

PALAVRAS-CHAVE: Simulação, Equações Autônomas, Modelo SIR, Covid-19.

MATHEMATICAL MODELS AND EPIDEMICS

ABSTRACT: Differential equations are frequently used in the construction of mathematical models applied in several areas of knowledge, such as: engineering, physics, chemistry, biology, ecology and medicine. This work aims to present mathematical tools to understand the evolution of an epidemic. Initially, exponential and logistic growth models were used to describe the evolution of a disease. With this, it was possible to analyze some applications of the theory of population dynamics in the context of pandemics and to verify how the autonomous equations are used to formulate important models in the

study, control and coping of pandemics. Then, a study of the classical mathematical model in epidemiology of the SIR type (susceptible-infected-removed) was carried out. The SIR model was numerically solved and applied to describe the evolution of Covid-19 in Brazil. Official data of infected by Covid-19 were compared with simulated data and the infection rate was determined by the least squares method. The SIR model describes well the data of infected people in Brazil for the analyzed period.
KEYWORDS: Simulation, Autonomous Equations, SIR Model, Covid-19.

1 I INTRODUÇÃO

Vários registros na história evidenciam impactos desastrosos de epidemias na humanidade. A peste negra foi uma das maiores pandemias já registradas, tendo início na China e se alastrando pela Europa durante o século XIV. A gripe espanhola, provocada pelo vírus influenza do tipo A H1N1, resultou em milhares de mortes entre 1918 e 1920. Outras doenças também foram registradas tais como: cólera, tuberculose, varíola, gripe, sarampo e malária, que também causaram muitas mortes.

A pandemia da Covid-19 causada pelo vírus Sars-CoV-2, iniciou-se em dezembro de 2019 e espalhou-se pelo mundo. No Brasil, o primeiro caso reportado foi em 25 de fevereiro de 2020 de um morador da cidade de São Paulo que esteve na Itália (OLIVEIRA e ORTIZ, 2020; BATISTA e SILVA, 2020).

Uma epidemia consiste em uma rápida disseminação de uma doença em um curto intervalo de tempo (GIANNELLA e VELHO, 2020). Portanto, os conceitos matemáticos para entender a evolução de uma epidemia envolvem crescimento exponencial e sistemas dinâmicos. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas iniciou-se em 1760, quando Daniel Bernoulli desenvolveu trabalho relativo à Varíola (BOYCE e DIPRIMA, 2015). A área de estudo em epidemiologia matemática surgiu logo após a pandemia da gripe espanhola, tendo adquirido sua forma a partir dos trabalhos realizados entre 1927 e 1933 por dois pesquisadores escoceses, Anderson McKendrick e William Kermack, que desenvolveram os modelos compartimentais do tipo SIR (suscetível-infectado-removido) e do tipo SIRS (suscetível-infectado-removido-suscetível), para descrever infecções endêmicas (KERMARK e MCKENDRICK, 1927; BASSANEZI, 1988; ROCHA, 2012; LUIZ, 2012; TAKAHASHI, 2020; GIANNELLA e VELHO, 2020).

Muitos modelos matemáticos têm sido propostos e estudamos para diversas doenças diferentes com o objetivo de compreender o desenvolvimento em comunidades, regiões e países, e analisar o impacto de medidas de controle, como a vacinação, ou outras medidas imprescindíveis para a sua contenção e erradicação (MORRISON, 2020; MANRIQUE-ABRIL et al., 2020; FRANCO e DUTRA, 2021).

Modelos matemáticos e simulações numéricas são ferramentas úteis para realizar projeções de como uma doença infecciosa se propaga e testar teorias e conjecturas de avaliação quantitativa. Com os modelos matemáticos é possível determinar parâmetros e projetar a evolução de epidemias, como por exemplo da Covid-19.

Deste modo, o presente trabalho tem como objetivo apresentar modelos matemáticos para descrever a evolução de uma epidemia, envolvendo desde a teoria de dinâmica populacional, com modelos de crescimento exponencial e logístico, até o estudo do processo como um sistema dinâmico usando o modelo clássico de epidemiologia do tipo SIR. Os modelos matemáticos abordados foram aplicados no contexto da pandemia da Covid-19.

2 | MODELOS MATEMÁTICOS E APLICAÇÕES

2.1 Crescimento Exponencial

Durante a fase inicial de crescimento, a curva epidêmica pode ser modelada pela função exponencial. Uma função é dita exponencial, quando ela pode ser escrita da seguinte forma: $I(t)=I_0e^{yt}$, onde, I denota os indivíduos infectados, y é a taxa de crescimento exponencial e I_0 é o valor inicial em t=0.

Considerando que uma população total de indivíduos constante igual a pode ser dividida em duas partes: os que tem determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. No instante t, seja $S(t)$ a proporção de indivíduos suscetíveis, e seja $I(t)$ a proporção de indivíduos infectados. Então: $I(t)+ S(t)= N(t)$.

Suponha que a doença espalha-se através do contato entre os indivíduos doentes e os suscetíveis e seja α a taxa de infecção da doença. Os casos de mortalidade em decorrência da doença e os casos de infectados que foram curados são considerados como removidos, onde β denota a taxa de remoção. Dessa forma, a variação de infectados dI/dt ao longo do tempo é a diferença entre o número de novos infectados e a parcela de infectados que foram curados e adquiriram imunidade ou morreram, assim:

$$\frac{dI}{dt}= \alpha\frac{S}{N}I-\beta I = I\left(\alpha\frac{S}{N}-\beta\right) = I\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{S}{N}-1\right) \tag{1}$$

Considerando que no início da pandemia $\frac{S}{N}\approx 1$, tem-se:

$$\frac{dI}{dt}\approx I\beta(R_0-1) \tag{2}$$

onde, $R_0=\alpha/\beta$ é o número básico da reprodução, que mede a velocidade com que a epidemia se propagava. Medidas como distanciamento social e quarentena tem o efeito de diminuir a taxa de infecção α e consequentemente, o R_0.

A Equação (2) é uma Equação Diferencial Ordinária separável, cuja sua solução é dada por:

$$I \approx I_0e^{\beta(R_0-1)t} \tag{3}$$

ou ainda,

$$I \approx I_0 e^{(\alpha-\beta)t} \tag{4}$$

onde $I(0)=I_0$. Note que $y=\beta(R_0-1)$ é a taxa de crescimento exponencial.

Seja D o tempo médio em que um indivíduo permanece infectado, então a taxa de remoção é dada por: $\beta=D^{-1}$. Neste trabalho, considerou-se o período de contágio de 10 dias. Logo, β=0,1. O valor de α pode ser obtido através do método dos mínimos quadrados. A Equação (4) foi ajustada aos dados oficiais de infectados pelo novo Coronavírus no Brasil no período 25/02/2020 a 23/03/2020. Para tanto, utilizou-se o programa *Statística*, considerando os dados iniciais: I_0=1, β=0,1.

A figura (1) mostra a comparação dos dados oficiais de infectados no Brasil, com o modelo exponencial. A taxa de crescimento ajustada foi α=0,371699. O coeficiente de determinação R^2, que é um indicador estatístico que mede a qualidade do ajuste foi 0,996634710. Observa-se que o modelo exponencial descreve bem o período inicial da evolução da Covid-19 no Brasil.

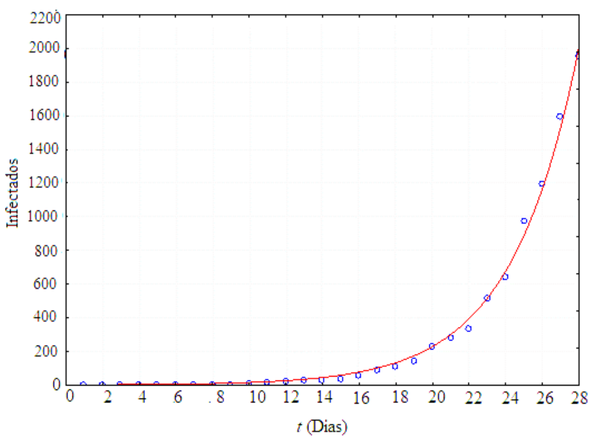

Figura 1 - Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 a 23/03/2020).

FONTE: Autores

2.2 Crescimento Logístico

Como já fora observado anteriormente, a evolução inicial de uma epidemia pode ser descrita pela função exponencial. Porém, com a evolução do tempo, o número de infectados atinge um ponto de inflexão e a partir deste ponto deve ocorrer uma redução na taxa de crescimento até se aproximar do número máximo de infectados (capacidade de suporte). Desta forma, a função logística tem essas características e o processo completo de pandemia pode ser modelado pelo crescimento logístico (GIANELLA e VELHO, 2020).

A Equação de Verhulst ou Equação Logística é dada por (BOYCE e DIPRIMA, 2015):

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \tag{5}$$

onde r e a são parâmetros do modelo. Podemos convenientemente escrever a equação (5) da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y \tag{6}$$

onde $K=r/a$ é a capacidade de suporte. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseca, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de um fator limitador.

A partir da Equação (6) pode-se concluir que quando a grandeza y é muito inferior a capacidade suporte, então y/K se aproxima de zero e o crescimento se aproxima do exponencial. Por outro lado, quando y se aproxima da capacidade suporte, então y/K se aproxima de 1 e a taxa de crescimento se aproxima de zero.

A Equação (6) é separável e sua solução, considerando a condição inicial $y(0)=y_0$, é dada por (BOYCE e DIPRIMA, 2015):

$$y\,(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - \ y_0)e^{-rt}} \tag{7}$$

A Equação dada em (7) é chamada função logística. Note que, se $y_0>0$ e se fizermos $t \to \infty$ em (7), obteremos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{y_0 K}{y_0} = K.$$

Vamos apresentar a seguir, aplicações do modelo logístico na disseminação de uma doença. Para tanto, considere $y(t)$ o número de infectados no tempo t e y_0 é o número de casos no início da doença. A função logística (Equação 7), pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$y(t) \ = \frac{K}{1 + be^{-rt}} \tag{8}$$

onde $b = \frac{K - y_0}{y_0}$.

Suponhamos um caso hipotético onde o número máximo de pessoas doentes é 1000 (tamanho da população), ou seja, a população máxima desse ambiente será igual a 1000 e o processo endêmico começa com apenas uma pessoa infectada e que pode infectar três outras pessoas. Neste caso, K=1000, b=999 e r=3. A Figura 2 mostra a função logística correspondente à simulação de um período de dez dias.

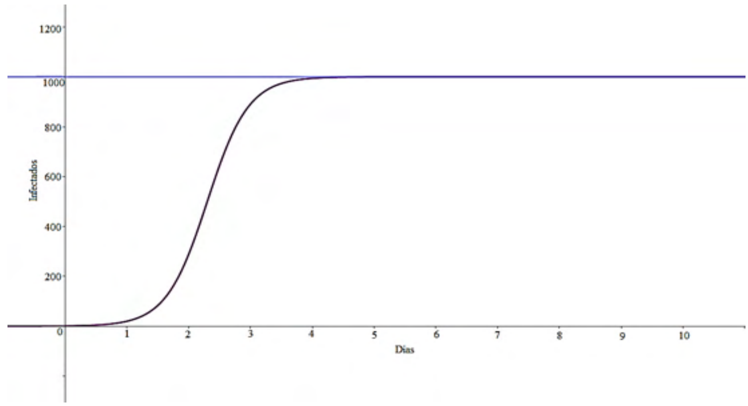

Figura 2 - Gráfico da solução 2 da função logística da Epidemia hipotética

FONTE: Autores

Consideremos, agora, a pandemia da Covid-19. Vamos admitir três possibilidades: (1) o indivíduo pode ser portador do vírus e ser assintomático; (2) o indivíduo pode desenvolver a doença e ser curado e; (3) o indivíduo pode desenvolver a doença e falecer. As pessoas mencionadas em (1) e (2) se tornam imunes ao vírus. Então, assim, a disponibilidade de recursos para o vírus (suscetíveis) vai se reduzindo à medida que ele se espalha e aproximando-se da capacidade suporte.

Assim, a taxa de infectados depende do número de portadores do vírus e, também, do número de pessoas suscetíveis ao vírus. Excluímos dessa conta, gradativamente, o número de pessoas que se tornam imunes, observa-se a redução da disponibilidade do recurso para o vírus. Desta maneira, podemos supor que à medida que o vírus se alastra, ele tende ao crescimento logístico (GONÇALVEZ, 2021). Para ilustrar essa tendência, observe o gráfico comparativo do número de novas pessoas infectadas no Brasil e na China (Figura 3) disponível em Our World In Data (acesso em 26 de agosto de 2021).

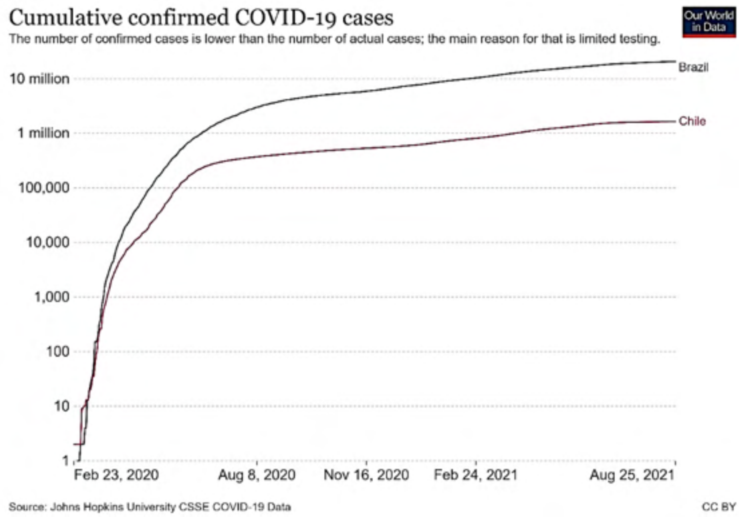

Figura 3 - Número total de casos de Covid-19 confirmados no Brasil e na China.

FONTE: Our World in Data (Acesso: 26 de agosto de 2021).

A Figura 4 mostra os dados de infectados pela Covid-19 na Paraíba no período de 22/08/2020 a 16/11/2020, coletados na webpage da Secretaria de Saúde do Estado. Próximo a data 27 de julho de 2020, observa-se um provável ponto de inflexão e a evolução da doença segue um crescimento logístico.

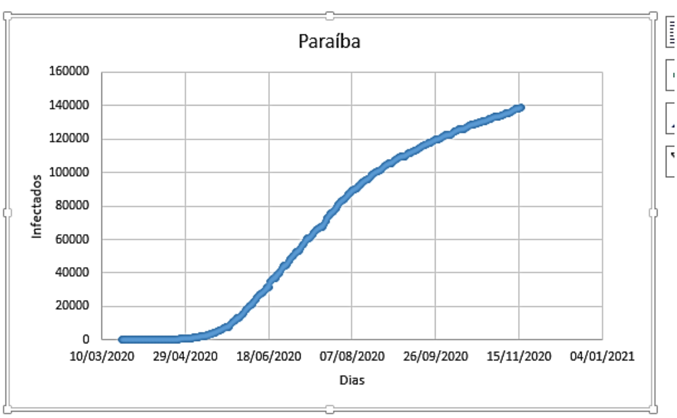

Figura 4 – Casos de Covid-19 na Paraíba no período 22/08/2020 à 16/11/2020.

FONTE: Autores

De acordo com os exemplos apresentados, a equação logística pode ser utilizada no estudo da disseminação de uma doença. Além disso, segundo Boyce e Diprima (2015), o trabalho de Daniel Bernoulli em 1760, baseado na equação logística, tinha como objetivo avaliar o quão efetivo estava sendo um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era um grande problema de saúde pública da época. Usando os melhores dados sobre mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que, se as mortes por varíola pudessem ser eliminadas, poderia adicionar aproximadamente 3 anos à vida média esperada em 1760 de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de vacinação. Seu modelo se aplica igualmente bem a qualquer outra doença que, uma vez adquirida, se o paciente sobreviver, ganha imunidade para o resto da vida.

2.3 Modelo SIR

A classe de modelos epidemiológicos para calcular o número teórico de pessoas infectadas por uma doença contagiosa, ao longo do tempo, é conhecido como modelo do tipo SIR. Este modelo consiste em um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares relacionando o número de indivíduos da população de acordo com seu estado da doença: Suscetíveis $S(t)$, Infectados $I(t)$ e Removidos $R(t)$. Entende-se por removidos os indivíduos que foram curados ou morreram, deixando de influenciar no processo epidêmico. Considera-se que os indivíduos curados ficam imunizados permanentemente, o qual permanece no compartimento dos removidos e não volta ao grupo dos suscetíveis. Na figura 5 tem-se a representação do diagrama compartimental do modelo SIR.

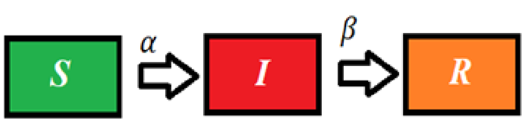

Figura 5: Diagrama compartimental do modelo SIR.

FONTE: Autores

Vamos assumir que o tamanho da população é fixo e o período de incubação do agente infeccioso é instantâneo. Além disso, considera-se atuação igual sobre toda a população (população homogênea). Ao desprezarmos os nascimentos ou imigrações, mortes por causa natural ou outros fatores e os fenômenos migratórios, a população total é considerada fixa como sendo a soma dos indivíduos das classes S, I e R. Esta suposição é aceitável para períodos curtos, onde não há uma mudança muito significativa na população. Assim,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \tag{9}$$

O modelo SIR envolve dois parâmetros importantes: α e β, onde α é a taxa de infecção da doença e β a taxa de remoção. Como a transmissão se dá com o contato entre suscetíveis e infectados, então o número de indivíduos suscetíveis diminui à uma taxa de propagação da doença (αSI). O número de indivíduos infectados aumenta ao longo do tempo na mesma proporção e diminui a partir da cura dos indivíduos. A variação de removidos ao longo do tempo é proporcional ao número de infectados que foram curados e adquiriram imunidade ou morreram. Assim, o retorno à classe de suscetíveis será modelado por (βI). Desta forma, o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica da epidemia é dado por (BASSANEZI et al., 1988; LUIZ, 2012):

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \qquad (10)$$

A dinâmica do modelo é afetada principalmente pelo número básico de reprodução (R_0) e o tempo de infecção (período infeccioso), que é o tempo em que o indivíduo se recupera totalmente do vírus e migra para classe de removidos. Tem-se que $1/\beta$ é o tempo médio no qual um indivíduo permanece infectado, onde β é a taxa de remoção.Um dos pontos fundamentais em nossa análise é verificar se a doença irá ou não se espalhar. Em outras palavras, estabelecer condições em que $dI/dt > 0$ ou $dI/dt < 0$.

Seja N uma população fixa e $I_0 > 0$ a quantidade inicial de indivíduos infectados nessa população. Da segunda equação do sistema (10), no instante t=0, tem-se

$$\frac{dI}{dt}\Big|_{t=0} = \alpha S_0 I_0 - \beta I_0 \begin{cases} > 0 \;\; se \;\; S_0 > \dfrac{\beta}{\alpha} \\ < 0 \;\; se \;\; S_0 < \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases} \qquad (11)$$

Como $\frac{dS}{dt} \leq 0$ e $S \leq S_0$, então, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, tem-se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, de onde segue que:

$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha S - \beta) \leq 0, \forall I \geq 0 \qquad (12)$$

Nesse caso, $I(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e não ocorre uma epidemia.

Por outro lado, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, $I(t)$ aumenta e a doença se propaga, ocorrendo assim uma epidemia, ou seja, $I(t) > I_0$ para algum $t > 0$.

O número básico de reprodução é definido por $R_0 = \frac{\alpha S_0}{\beta}$. Quando $R_0 > 1$, cada pessoa doente irá infectar mais uma pessoa e a epidemia crescerá exponencialmente. Por outro lado, se $R_0 < 1$ cada pessoa doente infectará menos que uma pessoa, causando uma diminuição da epidemia (GIANELLA e VELHO, 2020).

Como aplicação do modelo SIR, utilizamos dados oficiais de infectados por Covid-19 no Brasil, no período de 25 de fevereiro de 2020 a 23 de março de 2020. O valor do parâmetro (α) foi estimado pelo método dos mínimos quadrados, minimizando a função:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{t} (I_{oficial}(n) - I_{modelo}(n))^2 \qquad (13)$$

Para simular computacionalmente o processo, utilizou-se o método de Euler com os dados de entrada: N=S_0=210000000, I_o=1, R_o=1, β=0,1 . O valor obtido para o parâmetro α foi 0,372894371 e a comparação dos dados simulados com os dados oficiais de infectados por Covid-19 são apresentados na Figura 6.

A Figura 7 mostra a projeção da Covid-19 no Brasil para 140 dias, utilizando β=0,1 e α=0,372894371. Observa-se a curva de recuperados segue o crescimento da função logística. A curva simulada de infectados na Figura 7 pode ser associada à curva de pessoas infectadas em um cenário sem medidas de contenção da doença (cenário de circulação livre). Note que o ponto de máximo da curva de infectados corresponde ao ponto de inflexão da curva de recuperados. Modificando o valor o parâmetro é possível simular cenários da epidemia e fazer previsões para que a curva de infectados seja mais suave (ou achatada), indicando uma taxa mais gradual de infecção por um longo período, isto é, um cenário com medidas de contenção da doença (cenário de distanciamento e isolamento social), na ausência de vacinação ou tratamento efetivo.

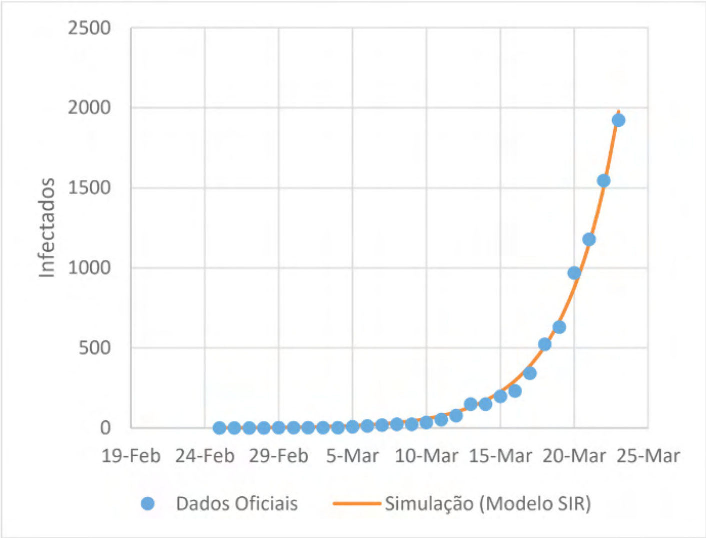

Figura 6: Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 a 23/03/2020).

FONTE: Autores

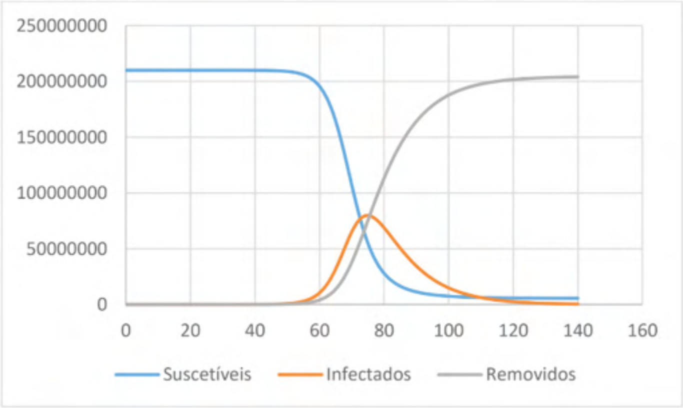

Figura 7: Modelo SIR para Covid-19 no Brasil.

FONTE: Autores

3 I CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados modelos matemáticos para descrever a evolução de uma epidemia. Por meio da modelagem matemática da evolução de uma epidemia é possível projetar cenários do impacto da doença em cada cidade, região e país.

Foi possível mostrar a importância da matemática para entender problemas práticos. Em particular, a função exponencial e a função logística podem ser utilizadas para facilitar o entendimento de alguns aspectos da pandemia.

Podemos concluir que, apesar do modelo SIR utilizado neste trabalho ser o mais simples, o mesmo mostrou-se eficiente para descrever a essência da dinâmica da epidemia da Covid-19 durante o período analisado. A partir do modelo SIR apresentado é possível estudar modelos mais complexos, que incluem outras categorias de indivíduos na população, como o modelo SIRD, que divide as pessoas removidas em recuperadas e mortas. O modelo SIR pode ser modificado considerando a população total não constante. Neste caso, considera-se o recrutamento na classe suscetível, por nascimentos e imigração, além da mortalidade por outros fatores. Uma variação do modelo SIR que torna a modelagem mais próxima da realidade consiste no modelo do tipo SEIR que incorpora o compartimento E (Exposto) que representa o estado de latência (período de incubação), os indivíduos naquele estado têm o agente infeccioso em seu corpo, porém, os sintomas ainda não começaram.

AGRADECIMENTOS

Os autores três e quatro deste trabalho agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelas bolsas que os possibilitaram contribuir com a presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JÚNIOR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: HARBRA, 1988.

BATISTA, A. A.; SILVA, S. H. **Um Modelo Epidemiológico tipo SIR Aplicado à Dinâmica de Disseminação da COVID-19 no Brasil, na Paraíba e em Campina Grande**. ResearchGat, 2020. Doi: 10.13140/RG.2.2.26557.69600.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas e valores de contorno**. 10ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

FRANCO, C. M. R., e DUTRA, R. F. **Modelo SIR para propagação da Covid-19 no Estado da Paraíba (Brasil).** INTERMATHS, 2(2), 39-48. 2021. https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.9696

GIANNELLA, J.; VELHO, L. **Visualização em tempos de Coronavírus**, 2020. Disponível em: https://www.visgraf.impa.br/Data/RefBid/OS_PDF/tr-07-2020/tr-07-2020.pdf. Acesso em: 25 de Agosto de 2021.

GONÇALVES, R. M. M. **A Teoria da Dinâmica de Populações e a pandemia**. https://avr.ifsp.edu.br/files/A%20Teoria%20da%20Dinamica%20de%20Populacoes%20e%20a%20Pandemia.pdf, 2021.

KERMARK, M. and MCKENDRICK, A. **Contributions to the mathematical theory of epidemics. part i**, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, vol. 115, no. 5, pp. 700–721, 1927. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

LUIZ, M. H. R. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MANRIQUE-ABRIL, F. G. et al. **Modelo SIR de la pandemia de COVID-19 en Colombia**. Revista de Salud Pública, Bogotá, v. 22, n. 01, p. 1-9, 2020.

MORRISON, R. E.; CUNHA, A. **Embedded model discrepancy: a case study of zika modeling.: A case study of Zika modeling**. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, v. 30, 051103, 2020. DOI https://doi.org/10.1063/5.0005204

OLIVEIRA, E.; ORTIZ, B. **Ministério da Saúde confirma primeiro caso de coronavírus no Brasil**. Brasília: G1, 26 fev. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/cienciaesaude/noticia/2020/02/26/ministerio-da-saude-fala-sobre-caso-possivel-paciente-comcoronavirus.ghtml. Acesso em: 01 de maio de 2020.

ROCHA, D. I. C. **Modelos matemáticos aplicados à epidemiologia**. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão) - Universidade do Porto, Porto, 2012.

TAKAHASHI, R. **A Matemática da COVID-19**. Ciência e Educação. Disponível em https://blogs.oglobo.gmatematica/post/matematica-da-covid-19.html. Acesso em 04 de junho de 2020.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

R

S

T

W

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022