



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Mariane Aparecida Freitas
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-258-0029-5

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604>

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal” demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***” nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Julio Robson Azevedo Gambarra

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206041>

CAPÍTULO 2..... 13

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Alexandre Souza de Oliveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206042>

CAPÍTULO 3..... 25

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

J. Michael Shaughnessy

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043>

CAPÍTULO 4..... 42

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos

Angel Hasely Silva Mechato

Ronald Marlon Lozano Reátegui

Vitelio Asencios Tarazona

Manuel Ricardo Guerrero Ochoa

Iris Olivia Ruiz Yance

Weninger Pinedo Chambi


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206044>

CAPÍTULO 5..... 55

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Henrique Kuller dos Santos

Joyce Jaqueline Caetano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206045>

CAPÍTULO 6..... 65

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Francisco Neto Lima de Souza

Giselle Costa de Sousa


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206046>

CAPÍTULO 7..... 75

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Rosângela Teixeira Guedes

Marcos Felipe de Oliveira


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206047>

CAPÍTULO 8..... 90

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Joe Widney Lima da Silva

Elisângela Dias Brugnera

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206048>

CAPÍTULO 9..... 102

IDENTIDADES POLINOMIAIS z_2 -GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2×2

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206049>

CAPÍTULO 10..... 107

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Raquel Sousa Oliveira

Américo Junior Nunes da Silva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060410>

CAPÍTULO 11..... 133

***R/EXAMS* COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS**

Luzia Pedroso de Oliveira

Denise Helena Lombardo Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060411>

CAPÍTULO 12..... 143

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Caroline Saemi Lima Fujimoto


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060412>







CAPÍTULO 13..... 165

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Amanda Souza Araújo


Simone Damm Zogaib

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060413>

CAPÍTULO 14.....	178
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO	
Cristiano Santana Freitas Lucília Batista Dantas Pereira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060414	
CAPÍTULO 15.....	195
UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Cassia Bordim Santi	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060415	
CAPÍTULO 16.....	202
O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA	
Fernanda Luciano Fernandes Rosangela Minto Simões Carla Corrêa Pacheco Gomes Vanilza Maria Rangel de Moraes Maristela Athayde Rohr	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060416	
CAPÍTULO 17.....	216
EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Fernanda Gonzalez Anhõn André Ribeiro da Silva	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060417	
CAPÍTULO 18.....	228
RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS	
Lênio Fernandes Levy	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060418	
CAPÍTULO 19.....	239
ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA	
João Socorro Pinheiro Ferreira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060419	
CAPÍTULO 20.....	263
O USO DE <i>PODCAST</i> NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO	
Deyse Mara Nieto Lyrio	

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes

Valdinei Cezar Cardoso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060420>

CAPÍTULO 21..... 278

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Maria Carla Ferreira Pereira Tavares


Rudimar Luiz Nós

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060421>

CAPÍTULO 22..... 296

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS

Josimar da Silva Rocha


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060422>

CAPÍTULO 23..... 305

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Daniela dos Santos Vargas

Victor Hugo de Oliveira Henrique


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060423>

CAPÍTULO 24..... 312

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Gaspar Soares

Márcio Rufino Silva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060424>

CAPÍTULO 25..... 323

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ana Paula dos Santos Stelle

Joyce Jaqueline Caetano


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060425>


CAPÍTULO 26..... 331

IDENTIDADES POLINOMIAIS G-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES $n \times n$ SOBRE UM CORPO FINITO

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060426>

CAPÍTULO 27.....	336
UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA Francisco Odecio Sales Maria Aliciane Martins Pereira da Silva  https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060427	
SOBRE O ORGANIZADOR	355
ÍNDICE REMISSIVO.....	356

IDENTIDADES POLINOMIAIS G -GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES $n \times n$ SOBRE UM CORPO FINITO

Data de aceite: 01/03/2022

Data de submissão: 24/02/2022

Mateus Eduardo Salomão

Universidade Federal de São Carlos –
Departamento de Matemática
São Carlos – SP

<http://lattes.cnpq.br/9042467665583924>

Evandro Riva

Universidade Federal de São Carlos –
Departamento de Matemática
São Carlos – SP
<http://lattes.cnpq.br/4157173099755399>

RESUMO: Este artigo aborda o conceito de identidades polinomiais para uma álgebra unitária, bem como apresenta o que vem a ser uma G -gradação em uma dada álgebra e suas identidades polinomiais G -graduadas. Mais ainda, apresenta a descrição de todas as identidades polinomiais G -graduadas para a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas pertencentes a um corpo finito.

PALAVRAS-CHAVE: Identidades Polinomiais, Gradações, Corpos finitos, Matrizes.

G-GRADED POLYNOMIAL IDENTITIES
FOR THE ALGEBRA OF UPPER
TRIANGULAR MATRICES $n \times n$ OVER A
FINITE FIELD

ABSTRACT: This article approaches the concept of polynomial identities for a unitary algebra, as

well as presents what is a G -graduation in a given algebra and its G -graded polynomial identities. Furthermore, it presents the description of all G -graded polynomial identities for the algebra of upper triangular matrices $n \times n$ with entries belonging to a finite field.

KEYWORDS: Polynomial Identities, Gradings, Finite Fields, Matrix.

1 | INTRODUÇÃO

Álgebras que satisfazem identidades polinomiais, denominadas PI-álgebras, integram um vasto campo de pesquisa em matemática e são de extrema importância, pois, além de aplicações computacionais, podemos, através de tais álgebras, obter importantes informações sobre sua estrutura. Daí a importância do estudo deste tema.

Neste artigo, será apresentado um conjunto gerador para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo finito. Tal conjunto foi descrito em [4]. O caso do conjunto gerador para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo infinito foi descrito em [1].

Para um estudo mais detalhado a respeito de identidades polinomiais indicamos as referências [2] e [3].

Ao longo de todo o texto, K denotará um corpo e $UT_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de tamanho $n \times n$ com

entradas no corpo K .

2 | IDENTIDADES POLINOMIAIS

Nesta seção, vamos apresentar alguns conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, em especial o conceito de álgebras com identidades polinomiais. Iniciaremos definindo o conceito de álgebra livre.

Definição 1 (Associador): Seja A uma álgebra e $X \subseteq A$. Uma sequência finita de elementos de X , $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ onde $n \geq 0$ e $x_{i_1} \dots x_{i_n} \in X$, será chamada de palavra em X . Considere $Pal(X)$ o conjunto das palavras formadas pelos elementos de X . Se todo elemento em A é uma combinação linear dos elementos em $Pal(X)$, então dizemos que A é gerado por X . Definimos o comprimento da palavra $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ como sendo n . Quando $n=0$, vamos chamar essa palavra de palavra vazia e a denotaremos por 1. Além disso, dizemos que duas palavras $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ e $x_{j_1} \dots x_{j_m}$ são iguais se $n=m$ e $i_1=j_1, \dots, i_n=j_m$.

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra livre.

Definição 2 (Álgebra Livre): Seja V uma classe de álgebras e $A \in V$ uma álgebra gerada por um conjunto X . A álgebra A é chamada livre na classe V , livremente gerada por X , se para qualquer álgebra $R \in V$, toda função $g: X \rightarrow R$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $G: A \rightarrow R$.

Definição 3: Seja X um conjunto enumerável infinito. Denote por $K(X)$ o K -espaço vetorial com base formada por 1 e pelas palavras

$$x_{i_1} \dots x_{i_n},$$

onde $n \geq 0$ e x_{i_1}, \dots, x_{i_n} . Defina a multiplicação entre duas palavras por concatenação, ou seja:

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}) = x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}$$

Estendendo por linearidade este produto para todos os elementos de $K(X)$, então $K(X)$ é álgebra associativa com unidade (palavra vazia) gerada por X .

Proposição 1: A álgebra $K(X)$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias, livremente gerada por X .

Na sequência definiremos o conceito de identidade polinomial para uma álgebra.

Definição 4 (Identidade Polinomial): Sejam A uma álgebra unitária e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

para todos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A . Se $T(A) \neq \emptyset$, dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

Exemplo 1: Dizemos que o polinômio

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 = [x_1, x_2]$$

é o comutador de comprimento 2. Por indução, definiremos o comutador de comprimento n por

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Se A uma álgebra comutativa. Então temos que o comutador $[x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial para A . Logo, A é uma PI-álgebra.

3 I IDENTIDADES POLINOMIAIS G -GRADUADAS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de álgebra G -graduada e identidades polinomiais G -graduadas para álgebras G -graduadas.

Definição 5: Seja A uma álgebra sobre um corpo K , considere a família $A_g, g \in G$ de subespaços de A , onde G é um grupo aditivo, dizemos que A é uma álgebra G -graduada se puder ser escrita como soma direta de subespaços

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$.

Definição 6: Um elemento $a \in U_{g \in G} A_g$ é chamado elemento homogêneo. Se $a \in A_g$, dizemos que a é homogêneo de grau g . Dizemos que uma subálgebra B de A é homogênea na G -gradação de A , se

$$B = \sum_{g \in G} B_g,$$

onde $B_g = B \cap A_g$, neste caso os subespaços $B \cap A_g$ serão denominados de subespaços homogêneos. Se um ideal I de A é uma subálgebra G -graduada dizemos que I é um ideal homogêneo de A .

Exemplo 2: Dada uma n -upla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in G_n$, escreva

$$UT_n(K) = \bigoplus_{g \in G} (UT_n)^g$$

onde $(UT_n(K))^g = \text{span}\{e_{(i,j)} : \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_j = g\}$

Então, $UT_n(K)$ é uma álgebra G -graduada e nós dizemos que tal G -gradação é uma G -gradação elemental para $UT_n(K)$. Esta gradação é muito importante e será usada ao longo do texto.

Na sequência definiremos o conceito de isomorfismo graduado.

Definição 7: Sejam A e B duas álgebras G -graduadas. Um isomorfismo de álgebras $f: A \rightarrow B$ tal que $f(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$ é chamado isomorfismo graduado.

O próximo resultado pode ser encontrado em [5].

Teorema 1: Toda G -gradação de $UT_n(K)$ é elemental, a menos de um isomorfismo graduado.

Definição 8: Para cada $g \in G$ considere $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \dots\}$ conjuntos infinitos dois a dois disjuntos. Seja

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Definimos

$$\deg(1) = e \text{ e } \deg(x_1 x_2 \cdots x_m) = \deg(x_1) \deg(x_2) \cdots \deg(x_m)$$

onde $\deg(x_i) = g$, se $x_i \in X_g$. Consideremos $K(X)$ a álgebra associativa livre, livremente gerada por X e m um monômio de $K(X)$, dizemos que $\deg(m)$

é o G -grau de m . Fazendo

$$K(X)_g = \text{span}\{m; m \text{ é monômio de } K(X), \deg(m) = g\}$$

temos

$$K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g \text{ e } K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{gh}$$

para todos $g, h \in G$. Assim, $K(X)$ é G -graduada chamada de álgebra associativa livre G -graduada. Se $f \in K(X)_g$, dizemos que f é homogêneo de G -grau g e usamos a notação $\deg(f) = g$.

Agora, vamos definir o conceito de identidades polinomiais G -graduadas.

Definição 9: Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G -graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K(X)$ é uma identidade polinomial G -graduada para A se $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ para quaisquer $\alpha_i \in A_{\deg(x_i)}$ com $i = 1, \dots, n$. Se A é uma álgebra G -graduada vamos denotar por $T_G(A) \subset K(X)$ o conjunto das identidades G -graduadas satisfeitas pela álgebra A . Além disso, $T_G(A)$ é um ideal de $K(X)$ invariante por endomorfismos graduados.

Exemplo 3: O polinômio $[x_1, x_2] [x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é uma identidade polinomial G -graduada para $UT_n(K)$ para todos $x_i \in X$.

Definição 10: Seja $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in G^n$. Dizemos que η é uma sequência ε -boa se existe uma sequência de m matrizes unitárias (r_1, \dots, r_m) estritamente triangulares superiores tais que

$$r_1, \dots, r_m \neq 0 \text{ e } \deg_G(r_i) = \eta_i$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Caso contrário, η é chamada de uma sequência ε -ruim.

Definição 11: Seja $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in G^m$. Para cada $j = 1, \dots, m$ defina o conjunto C_j da seguinte forma:

$$C_j = \begin{cases} x_j^{\eta_j} & \text{se } \eta_j \neq 1 \\ \{[x_{2j}^1, x_{2j+1}^1], (x_{2j}^1)^q - x_{2j}^1\} & \text{se } \eta_j = 1. \end{cases}$$

Se $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, \dots, c_m \in C_m$, dizemos que $f_\eta = c_1 c_2 \dots c_m$ é um η -polinômio.

O próximo teorema é o resultado principal deste trabalho e sua demonstração pode ser encontrada em [4]. Aqui, $T_G(UT_n(K), \varepsilon)$ representa o conjunto de todas as identidades polinomiais G -graduadas de $UT_n(K)$ com a G -gradação elementar induzida por ε .

Teorema 2: Seja G um grupo e seja $\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in G^n$. Se $K(X)$ é um corpo finito com q elementos, então $T_G(UT_n(K), \varepsilon)$ é gerado, como T_G -ideal, por todos η -polinômios, onde $\eta=(\eta_1, \dots, \eta_m)$ é ε -ruim e $m \leq n$.

REFERÊNCIAS

[1] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; VALENTI, A. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities.. **Journal of Algebra**, v. 275, n. 2, p. 550–566, 2004.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[4] GONÇALVES, D. J.; RIVA, E. Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field. **Journal of Algebra**. v. 559, p. 625–645, 2020.

[5] VALENTI, A.; ZAICEV, M. V. Group gradings on upper triangular matrices. **Arch. Math. (Basel)**, v. 89, n. 1., p. 33-40.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Al-Biruni 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74

A lei da alavanca de Arquimedes 278

Álgebras de Jordan 102, 103

Algoritmos evolutivos 296

Aplicações 75, 76, 89, 94, 98, 134, 135, 141, 143, 153, 164, 184, 220, 226, 269, 296, 306, 307, 331, 339, 342

Aprendizagem 1, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 70, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 159, 160, 164, 166, 169, 175, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 193, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 230, 233, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 319, 320, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 337, 338, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 348, 349, 350, 352

B

BNCC 8, 91, 93, 99, 100, 134, 144, 154, 159, 162, 166, 168, 169, 214, 218, 222, 266, 269, 273, 274, 278, 279, 280

Brechó 195, 196, 197, 198, 199, 200

C

Combinatória 73, 296, 297, 351

Concepções docentes 165

Conhecimentos docentes 107

Consistência 239, 249, 252, 253, 254, 258, 259, 260, 342

Convergência 239, 249, 252, 253, 254, 256, 258, 260, 339

Convivência 18, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 238

Cotidiano 12, 18, 63, 91, 118, 153, 154, 164, 184, 196, 203, 204, 206, 208, 210, 221, 225, 236, 238, 264, 265, 270, 271, 306, 312, 313, 314, 316, 317, 326, 329, 346

Covid-19 42, 43, 52, 96, 141, 266

Currículo 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 56, 63, 95, 107, 110, 111, 122, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 142, 168, 176, 212, 213, 269, 308, 342

Currículo crítico-emancipatório 13, 14, 15, 17, 18

Curva 48, 49, 50, 51, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Curvatura 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89

D

Desarrollo analítico 42, 45, 51, 52

Dificuldades 8, 10, 108, 122, 163, 175, 181, 189, 190, 198, 222, 265, 268, 306, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 339, 348, 349, 351

Direitos de aprendizagem 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 348

Distribution, inference 25

E

Educação a distância 135, 141, 142, 275, 312

Educação infantil 3, 165, 166, 167, 173, 175, 176, 177, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 269, 346

Educação matemática 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 67, 90, 93, 100, 101, 107, 108, 109, 128, 129, 132, 133, 166, 176, 185, 193, 196, 200, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 238, 264, 275, 277, 294, 306, 310, 323, 324, 325, 330, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 355

Eixo das Abscissas 143, 144, 146, 147, 155, 157

Ensino 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 141, 142, 143, 144, 154, 159, 160, 162, 163, 164, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 314, 315, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 355

Ensino de matemática 1, 7, 10, 92, 95, 121, 124, 195, 201, 209, 217, 222, 224, 228, 229, 230, 231, 234, 278, 305, 308, 310, 319, 327, 328, 330, 336, 337, 343, 353

Ensino médio 8, 58, 98, 134, 142, 143, 154, 159, 162, 164, 178, 179, 180, 186, 192, 193, 195, 196, 197, 200, 210, 221, 222, 224, 226, 227, 263, 265, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 346, 349, 353

Estabilidade 239, 240, 242, 245, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 258, 259, 260

Estratégias didáticas 305

Expectation 25, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 40

F

Feedback automático 133, 134, 136, 141

Filosofia 74, 94, 112, 122, 200, 228, 229, 230, 231, 232, 236, 237, 238, 355

Formação de professores 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 21, 23, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 225, 268, 277, 310, 312, 315, 316, 343, 353, 354, 355

Formação docente 7, 13, 18, 22, 23, 115, 131, 132, 165, 175, 268, 277

Formação para o trabalho 312, 321

Função afim 90, 96, 97, 98, 99, 100

Funções polinomiais de 2º grau 143, 144, 152, 154, 158, 163

G

Geogebra 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 134, 293, 294, 345

Geogebra 3D 87, 88

Geometria 73, 75, 76, 81, 89, 91, 126, 133, 134, 135, 144, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194, 211, 212, 214, 215, 278, 279, 280, 285, 294, 340

Geometria plana 178, 179, 180, 183, 185, 192, 193, 278, 279

Graduações 102, 104, 331

H

Hélice 75, 76, 86, 87, 88, 89

História da matemática 65, 66, 67, 73, 74, 234

I

Identidades polinomiais 102, 103, 104, 105, 331, 332, 333, 334

J

Jogos 170, 201, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 343, 345, 350, 352

John Dewey 159, 228, 229, 236, 238

L

Leveque 250, 261

Lúdico 114, 132, 202, 203, 205, 208, 209, 213, 234, 236, 238, 272, 276, 278

M

Matemática 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 24, 42, 44, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 66, 67, 70, 73, 74, 75, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144, 153, 154, 158, 161, 164, 166, 169, 170, 172, 175, 176, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 197,

198, 200, 201, 202, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 249, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 285, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355

Matemática financeira 196, 197, 198, 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 277

Matemática Islâmica 65, 66

Metodologia 1, 6, 7, 10, 67, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 109, 113, 116, 121, 136, 141, 159, 160, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 193, 195, 198, 208, 231, 238, 271, 300, 305, 308, 325, 326, 328, 338, 340, 349, 351

Múltiplas tentativas 133, 136

N

Norma-2 239, 245, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260

Novas tecnologias 133, 272, 273, 275, 277, 312

O

O princípio de Cavalieri 278, 281, 283, 289

P

Planejamento 100, 126, 161, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 196, 210, 216, 217, 218, 222, 225, 238, 269, 279, 280, 337, 338, 339, 343, 344, 347, 348, 349, 350, 351

Plano cartesiano 143, 144, 153, 157, 340

Podcast 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277

Polígonos mágicos 296, 297, 300, 301, 303

Polígonos mágicos degenerados 296, 297

Políticas públicas 8, 9, 10, 18, 21, 315, 316

Pragmatismo 228, 229, 230

R

Resolução de problemas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 121, 174, 175, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 188, 192, 193, 224, 234, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 327, 328, 340, 350

S

Sampling 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39

Simulated annealing 296, 299, 300, 302, 303

Software geogebra 42, 52, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 90

Statistical investigation processes 25

Statistics education 25, 26, 28, 30, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41

T

Territórios virtuais 312, 313, 314


V

Variability 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

Variáveis 96, 102, 103, 135, 143, 144, 146, 152, 153, 185, 209, 216, 217, 218, 301, 303





Vértices da função 143

Visualización gráfica 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2