



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Mariane Aparecida Freitas
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-258-0029-5

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604>

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal” demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***” nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Julio Robson Azevedo Gambarra

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206041>

CAPÍTULO 2..... 13

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Alexandre Souza de Oliveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206042>

CAPÍTULO 3..... 25

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

J. Michael Shaughnessy

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043>

CAPÍTULO 4..... 42

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos

Angel Hasely Silva Mechato

Ronald Marlon Lozano Reátegui

Vitelio Asencios Tarazona

Manuel Ricardo Guerrero Ochoa

Iris Olivia Ruiz Yance

Weninger Pinedo Chambi

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206044>

CAPÍTULO 5..... 55

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Henrique Kuller dos Santos

Joyce Jaquelinne Caetano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206045>

CAPÍTULO 6..... 65

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Francisco Neto Lima de Souza

Giselle Costa de Sousa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206046>

CAPÍTULO 7..... 75

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Rosângela Teixeira Guedes

Marcos Felipe de Oliveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206047>

CAPÍTULO 8..... 90

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Joe Widney Lima da Silva

Elisângela Dias Brugnera

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206048>

CAPÍTULO 9..... 102

IDENTIDADES POLINOMIAIS z_2 -GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2×2

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206049>

CAPÍTULO 10..... 107

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Raquel Sousa Oliveira

Américo Junior Nunes da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060410>

CAPÍTULO 11..... 133

***R/EXAMS* COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS**

Luzia Pedroso de Oliveira

Denise Helena Lombardo Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060411>

CAPÍTULO 12..... 143

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Caroline Saemi Lima Fujimoto

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060412>

CAPÍTULO 13..... 165

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Amanda Souza Araújo

Simone Damm Zogaib

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060413>

CAPÍTULO 14.....	178
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO	
Cristiano Santana Freitas Lucília Batista Dantas Pereira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060414	
CAPÍTULO 15.....	195
UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Cassia Bordim Santi	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060415	
CAPÍTULO 16.....	202
O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA	
Fernanda Luciano Fernandes Rosangela Minto Simões Carla Corrêa Pacheco Gomes Vanilza Maria Rangel de Moraes Maristela Athayde Rohr	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060416	
CAPÍTULO 17.....	216
EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Fernanda Gonzalez Anhõn André Ribeiro da Silva	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060417	
CAPÍTULO 18.....	228
RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS	
Lênio Fernandes Levy	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060418	
CAPÍTULO 19.....	239
ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA	
João Socorro Pinheiro Ferreira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060419	
CAPÍTULO 20.....	263
O USO DE <i>PODCAST</i> NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO	
Deyse Mara Nieto Lyrio	

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes

Valdinei Cezar Cardoso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060420>

CAPÍTULO 21..... 278

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Maria Carla Ferreira Pereira Tavares

Rudimar Luiz Nós

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060421>

CAPÍTULO 22..... 296

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS

Josimar da Silva Rocha

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060422>

CAPÍTULO 23..... 305

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Daniela dos Santos Vargas

Victor Hugo de Oliveira Henrique

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060423>

CAPÍTULO 24..... 312

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Gaspar Soares

Márcio Rufino Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060424>

CAPÍTULO 25..... 323

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ana Paula dos Santos Stelle

Joyce Jaqueline Caetano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060425>

CAPÍTULO 26..... 331

IDENTIDADES POLINOMIAIS G-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES $n \times n$ SOBRE UM CORPO FINITO

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060426>

CAPÍTULO 27.....	336
UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA Francisco Odecio Sales Maria Aliciane Martins Pereira da Silva  https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060427	
SOBRE O ORGANIZADOR	355
ÍNDICE REMISSIVO.....	356

IDENTIDADES POLINOMIAIS Z_2 -GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2×2

Data de aceite: 01/03/2022

Data de submissão: 23/02/2022

Mateus Eduardo Salomão

Universidade Federal de São Carlos –
Departamento de Matemática
São Carlos – SP

<http://lattes.cnpq.br/9042467665583924>

Evandro Riva

Universidade Federal de São Carlos –
Departamento de Matemática
São Carlos – SP

<http://lattes.cnpq.br/4157173099755399>

RESUMO: Este artigo aborda o conceito de álgebras de Jordan e de suas identidades polinomiais. Mais ainda, apresenta a classificação de todas as Z_2 -gradações não triviais para a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em um corpo de característica diferente de 2, bem como apresenta uma base formada pelas identidades polinomiais Z_2 -graduadas para todas estas Z_2 -gradações.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebras de Jordan, Gradações, Identidades Polinomiais.

Z_2 -GRADED POLYNOMIAL IDENTITIES FOR THE JORDAN ALGEBRA OF 2×2 UPPER TRIANGULAR MATRICES

ABSTRACT: This article addresses the concept of Jordan algebras and their polynomial identities. Furthermore, it presents the classification of all

non-trivial Z_2 -gradings for the algebra of upper triangular matrices with entries in a field of characteristic different from 2, as well as presents a basis formed by the Z_2 -graded polynomial identities for all these Z_2 -gradings.

KEYWORDS: Jordan álgebras, Gradings, polynomial identities.

1 | INTRODUÇÃO

O conceito de identidades em uma estrutura algébrica é bastante geral. As leis de comutatividade, associatividade e distributividade dos números reais que aprendemos no ensino básico, são exemplos de identidades. Vagamente falando, uma identidade é uma expressão simbólica envolvendo uma ou várias operações e uma ou várias variáveis, que é identicamente satisfeita quando as variáveis são substituídas por elementos de uma estrutura algébrica. Neste contexto, surge a teoria de PI-álgebras, que estuda identidades polinomiais para as álgebras, que são estruturas de significativa importância na Teoria de Anéis. O estudo de PI-álgebras é algo de grande relevância, pois as identidades polinomiais dão informações significativas a respeito da álgebra em questão.

Neste artigo, explanaremos a respeito de identidades polinomiais Z_2 -graduadas para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de

2. Tais identidades foram descritas em [5] e [6].

Para um estudo mais detalhado a respeito de identidades polinomiais, indicamos as referências [1], [2] e [3].

Ao longo de todo o texto, K denotará um corpo de $\text{char}(K) \neq 2$, onde $\text{char}(K)$ denota a característica de K . Além disso, todas as álgebras consideradas serão sobre K . Mais ainda, denotaremos a cardinalidade de K por $|K|$.

2 | ÁLGEBRAS DE JORDAN

Nesta seção, vamos definir alguns conceitos e propriedades referentes a estrutura de uma álgebra de Jordan, que é uma classe muito importante de álgebras. Iniciamos com a definição de associador.

Definição 1 (Associador): Seja A uma álgebra e $a, b, c \in A$, dizemos que

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

é o associador de a, b e c , nesta ordem.

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra de Jordan.

Definição 2 (Álgebra de Jordan): Uma álgebra comutativa A é chamada de álgebra de Jordan se

$$(\alpha^2, b, a) = 0$$

para todos $\alpha, b, a \in A$.

Podemos criar uma álgebra de Jordan a partir de uma álgebra associativa como segue: se A é uma álgebra associativa, equipada com o produto \cdot , então o espaço vetorial A equipado com um novo produto \circ , chamado *produto de Jordan*, que é definido por

$$a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a),$$

onde $a, b \in A$, é uma álgebra de Jordan, denotada por $A^{(+)}$.

Por fim, definiremos identidade polinomial para álgebras de Jordan. Os polinômios em questão, são elementos da álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por um conjunto de variáveis X , que é denotada por $J(X)$.

Definição 3 (Identidade Polinomial): Sejam A uma álgebra de Jordan unitária e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in J(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A . Se $T(A) = \{0\}$, dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

3 | A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

Nesta seção, definiremos e apresentaremos algumas propriedades da álgebra de Jordan $U_{J_2}(K)$. Esta álgebra é nosso objeto de estudo ao longo deste artigo. Antes de definir $U_{J_2}(K)$, precisamos relembrar alguns conceitos e fixar algumas notações. Denote a álgebra associativa unitária das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K munido

como operação usual de produto por $UT_n(K)$. Destacamos nesta álgebra a matriz unitária e_{ij} , cuja entrada (i, j) é igual a 1 e as demais entradas são iguais a 0.

Definição 4 (A álgebra de Jordan $U_{j_2}(K)$): A álgebra de Jordan $U_{j_2}(K)$ é o espaço vetorial $U_{j_2}(K)$ munido com o produto de Jordan \circ .

Antes de prosseguir, relembramos brevemente que uma álgebra de Jordan A é G -graduada, onde G um grupo qualquer, se A pode ser escrita como soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$.

Por simplicidade, denotaremos

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad \alpha = e_{11} - e_{22} \quad \text{e} \quad b = e_{12}.$$

Observe que o conjunto $\{1, \alpha, b\}$ é uma base $U_{j_2}(K)$. No artigo [6], Koshlukov e Martino descreveram todas as possíveis Z_2 -gradações da álgebra de Jordan $U_{j_2}(K)$. Destacamos este fato na sequência de resultados abaixo.

Lema 1: Escrevendo $j = U_{j_2}(K)$, temos que as seguintes decomposições $j = j_0 \oplus j_1$ são Z_2 -gradações de j , onde $Z_2 = \{0, 1\}$

1. A gradação associativa: $j_0 = K \oplus Kb, j_1 = Ka$.
2. A gradação escalar: $j_0 = K, j_1 = Ka \oplus Kb$.
3. A gradação clássica: $j_0 = K \oplus Ka, j_1 = Kb$.

Aqui, identificamos K com as matrizes escalares em j .

A próxima proposição garante que as únicas Z_2 -gradações de $U_{j_2}(K)$ são as três descritas no lema anterior. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [6, Proposition 4].

Proposição 1: As três gradações do Lema 1 são, a menos de isomorfismos graduados, as únicas Z_2 -gradações não triviais em $U_{j_2}(K)$.

4 | IDENTIDADES Z_2 -GRADUADAS PARA $U_{j_2}(K)$

Nesta seção, descreveremos todas as identidades polinomiais Z_2 -graduadas para a álgebra de Jordan $U_{j_2}(K)$ conforme as Z_2 -gradações apresentadas no Lema 1.

4.1 A Gradação Associativa

Nesta subseção, descreveremos o conjunto $T_{Ass}(U_{j_2}(K))$ de todas as identidades polinomiais Z_2 -graduadas para $U_{j_2}(K)$ com a gradação associativa. As demonstrações dos resultados desta subseção são bastante longas e podem ser encontradas em [5].

O primeiro resultado descreve $T_{Ass}(U_{j_2}(K))$ para o caso em que K é um corpo infinito

de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 1: Se K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2$ então $T_{Ass}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{Z_2} -ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (z_1, y_1, z_2), (z_1, z_2, z_3) \text{ e } (z_1 z_2, z_3, z_4).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 2: Se K é um corpo finito com $|K|=q$ elementos e $\text{char}(K) \neq 2$, então $T_{Ass}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{Z_2} -ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (z_1, y_1, z_2), (z_1, z_2, z_3), (z_1 z_2, z_3, z_4), \\ (y_1^q - y_1)(y_2^q - y_2), z_1^q - z_1 \text{ e } (y_1^q - y_1)z_1.$$

4.2 A Graduação Escalar

Nesta subseção, descreveremos o conjunto $T_{Sca}(U_{j_2}(K))$ de todas as identidades polinomiais Z_2 -graduadas para $U_{j_2}(K)$ com a graduação escalar. As demonstrações dos resultados desta subseção são um tanto extensas e podem ser encontradas em [5].

O próximo resultado descreve $T_{Sca}(U_{j_2}(K))$ para o caso em que K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 3: Se K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2$ então $T_{Sca}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{Z_2} -ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (y_1, z_1, z_2) \text{ e } z_1(z_2, z_3, z_4).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 4: Se K é um corpo finito com $|K|=q$ elementos e $\text{char}(K) \neq 2$, então $T_{Sca}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{Z_2} -ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (y_1, z_1, z_2), z_1(z_2, z_3, z_4), y_1^q - y_1 \text{ e } (z_1^q - z_1)z_2.$$

4.3 A Graduação Clássica

Nesta subseção, descreveremos o conjunto $T_{Cla}(U_{j_2}(K))$ de todas as identidades polinomiais Z_2 -graduadas para $U_{j_2}(K)$ com a graduação clássica. As demonstrações dos resultados desta subseção são um tanto extensas e podem ser encontradas em [5].

O próximo resultado descreve $T_{Cla}(U_{j_2}(K))$ para o caso em que K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 5: Se K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2$ então $T_{Cla}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{Z_2} -ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), z_1 z_2 \text{ e } (y_1, z_1, y_2).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 6: Se K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e $\text{char}(K) \neq 2$, então $T_{\text{Cla}}(U_{j_2}(K))$ é gerado, como um T_{z_2} -ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), \quad z_1 z_2, \quad (y_1, z_1, y_2) \text{ e } y_1^q - y_1.$$

Para finalizar o texto, destacamos que o estudo das identidades ordinárias de $U_{j_2}(K)$ (em outras palavras, as identidades Z_2 -graduadas para a gradação trivial) sobre qualquer corpo K de $\text{char}(K) \neq 2$, foi iniciado em [6] e concluído, recentemente, em [4].

REFERÊNCIAS

- [1] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.
- [2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.
- [3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [4] GONÇALVES, D. J.; KOSHLUKOV, P.; SALOMÃO, M. Polynomial identities for the Jordan álgebra of upper triangular matrices. **Journal of Algebra**. v. 593, p. 477–506, 2022.
- [5] GONÇALVES, D. J.; SALOMÃO, M. E. -graded polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2011.11116>.
- [6] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Al-Biruni 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74

A lei da alavanca de Arquimedes 278

Álgebras de Jordan 102, 103

Algoritmos evolutivos 296

Aplicações 75, 76, 89, 94, 98, 134, 135, 141, 143, 153, 164, 184, 220, 226, 269, 296, 306, 307, 331, 339, 342

Aprendizagem 1, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 70, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 159, 160, 164, 166, 169, 175, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 193, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 230, 233, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 319, 320, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 337, 338, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 348, 349, 350, 352

B

BNCC 8, 91, 93, 99, 100, 134, 144, 154, 159, 162, 166, 168, 169, 214, 218, 222, 266, 269, 273, 274, 278, 279, 280

Brechó 195, 196, 197, 198, 199, 200

C

Combinatória 73, 296, 297, 351

Concepções docentes 165

Conhecimentos docentes 107

Consistência 239, 249, 252, 253, 254, 258, 259, 260, 342

Convergência 239, 249, 252, 253, 254, 256, 258, 260, 339

Convivência 18, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 238

Cotidiano 12, 18, 63, 91, 118, 153, 154, 164, 184, 196, 203, 204, 206, 208, 210, 221, 225, 236, 238, 264, 265, 270, 271, 306, 312, 313, 314, 316, 317, 326, 329, 346

Covid-19 42, 43, 52, 96, 141, 266

Currículo 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 56, 63, 95, 107, 110, 111, 122, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 142, 168, 176, 212, 213, 269, 308, 342

Currículo crítico-emancipatório 13, 14, 15, 17, 18

Curva 48, 49, 50, 51, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Curvatura 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89

D

Desarrollo analítico 42, 45, 51, 52

Dificuldades 8, 10, 108, 122, 163, 175, 181, 189, 190, 198, 222, 265, 268, 306, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 339, 348, 349, 351

Direitos de aprendizagem 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 348

Distribution, inference 25

E

Educação a distância 135, 141, 142, 275, 312

Educação infantil 3, 165, 166, 167, 173, 175, 176, 177, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 269, 346

Educação matemática 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 67, 90, 93, 100, 101, 107, 108, 109, 128, 129, 132, 133, 166, 176, 185, 193, 196, 200, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 238, 264, 275, 277, 294, 306, 310, 323, 324, 325, 330, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 355

Eixo das Abscissas 143, 144, 146, 147, 155, 157

Ensino 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 141, 142, 143, 144, 154, 159, 160, 162, 163, 164, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 314, 315, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 355

Ensino de matemática 1, 7, 10, 92, 95, 121, 124, 195, 201, 209, 217, 222, 224, 228, 229, 230, 231, 234, 278, 305, 308, 310, 319, 327, 328, 330, 336, 337, 343, 353

Ensino médio 8, 58, 98, 134, 142, 143, 154, 159, 162, 164, 178, 179, 180, 186, 192, 193, 195, 196, 197, 200, 210, 221, 222, 224, 226, 227, 263, 265, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 346, 349, 353

Estabilidade 239, 240, 242, 245, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 258, 259, 260

Estratégias didáticas 305

Expectation 25, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 40

F

Feedback automático 133, 134, 136, 141

Filosofia 74, 94, 112, 122, 200, 228, 229, 230, 231, 232, 236, 237, 238, 355

Formação de professores 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 21, 23, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 225, 268, 277, 310, 312, 315, 316, 343, 353, 354, 355

Formação docente 7, 13, 18, 22, 23, 115, 131, 132, 165, 175, 268, 277

Formação para o trabalho 312, 321

Função afim 90, 96, 97, 98, 99, 100

Funções polinomiais de 2º grau 143, 144, 152, 154, 158, 163

G

Geogebra 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 134, 293, 294, 345

Geogebra 3D 87, 88

Geometria 73, 75, 76, 81, 89, 91, 126, 133, 134, 135, 144, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194, 211, 212, 214, 215, 278, 279, 280, 285, 294, 340

Geometria plana 178, 179, 180, 183, 185, 192, 193, 278, 279

Graduações 102, 104, 331

H

Hélice 75, 76, 86, 87, 88, 89

História da matemática 65, 66, 67, 73, 74, 234

I

Identidades polinomiais 102, 103, 104, 105, 331, 332, 333, 334

J

Jogos 170, 201, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 343, 345, 350, 352

John Dewey 159, 228, 229, 236, 238

L

Leveque 250, 261

Lúdico 114, 132, 202, 203, 205, 208, 209, 213, 234, 236, 238, 272, 276, 278

M

Matemática 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 24, 42, 44, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 66, 67, 70, 73, 74, 75, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144, 153, 154, 158, 161, 164, 166, 169, 170, 172, 175, 176, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 197,

198, 200, 201, 202, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 249, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 285, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355

Matemática financeira 196, 197, 198, 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 277

Matemática Islâmica 65, 66

Metodologia 1, 6, 7, 10, 67, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 109, 113, 116, 121, 136, 141, 159, 160, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 193, 195, 198, 208, 231, 238, 271, 300, 305, 308, 325, 326, 328, 338, 340, 349, 351

Múltiplas tentativas 133, 136

N

Norma-2 239, 245, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260

Novas tecnologias 133, 272, 273, 275, 277, 312

O

O princípio de Cavalieri 278, 281, 283, 289

P

Planejamento 100, 126, 161, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 196, 210, 216, 217, 218, 222, 225, 238, 269, 279, 280, 337, 338, 339, 343, 344, 347, 348, 349, 350, 351

Plano cartesiano 143, 144, 153, 157, 340

Podcast 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277

Polígonos mágicos 296, 297, 300, 301, 303

Polígonos mágicos degenerados 296, 297

Políticas públicas 8, 9, 10, 18, 21, 315, 316

Pragmatismo 228, 229, 230

R

Resolução de problemas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 121, 174, 175, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 188, 192, 193, 224, 234, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 327, 328, 340, 350

S

Sampling 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39

Simulated annealing 296, 299, 300, 302, 303

Software geogebra 42, 52, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 90

Statistical investigation processes 25

Statistics education 25, 26, 28, 30, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41

T

Territórios virtuais 312, 313, 314

V

Variability 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

Variáveis 96, 102, 103, 135, 143, 144, 146, 152, 153, 185, 209, 216, 217, 218, 301, 303

Vértices da função 143

Visualización gráfica 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2