Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Mariane Aparecida Freitas
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0029-5
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um "novo normal" demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***" nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 21

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/03/2022

Maria Carla Ferreira Pereira Tavares
http://lattes.cnpq.br/7068841451400574

Rudimar Luiz Nós
http://lattes.cnpq.br/4377393528295346

RESUMO: Apresentamos neste trabalho duas estratégias para provar a relação para o cálculo do volume da esfera no Ensino Médio: o princípio de Cavalieri e a lei da alavanca de Arquimedes. Empregamos o software gratuito GeoGebra 3D para comprovar dinamicamente a relação para o volume e propomos atividades, lúdico-manipulativas e computacionais, para a sala de aula baseadas nessas duas estratégias. Concluímos que o aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra 3D é uma ferramenta eficaz para construir figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como para comparar áreas e volumes dessas figuras, e que as atividades propostas contemplam o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de matemática.

PALAVRAS-CHAVE: A lei da alavanca de Arquimedes. O princípio de Cavalieri. Ensino de matemática. GeoGebra 3D. BNCC.

JUSTIFYING THE VOLUME OF THE SPHERE IN MATHEMATICS CLASSROOM

ABSTRACT: We present in this work two strategies to prove the formula to calculate the volume of the sphere in High School: Cavalieri's principle and Archimedes' law of the lever. The free software GeoGebra 3D is used to dynamically verify the formula to the volume and activities, ludic-manipulative and computational, are proposed for the classroom based on these two strategies. We concluded that dynamic geometry app GeoGebra 3D is an effective tool to build two-dimensional and three-dimensional figures, as well as to compare areas and volumes of these figures, and that the proposed activities comply whit what the Curricular Common National Base (BNCC) proposes for mathematics teaching.

KEYWORDS: Archimedes' law of the lever. Cavalieri's principle. Mathematics teaching. GeoGebra 3D. BNCC.

1 I INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, as reformas educacionais propostas para o ensino de matemática na Educação Básica evidenciam a importância do ensino de geometria plana e geometria espacial. A BNCC (BRASIL, 2018) de matemática para o Ensino Fundamental enfatiza o desenvolvimento de competências através de cinco unidades temáticas correlacionadas, sendo a geometria uma delas. Para o Ensino Médio, o objetivo é ainda mais amplo, pois busca-se a construção de uma visão integrada da disciplina com a realidade. Além disso, a BNCC de Matemática e suas Tecnologias propõe o uso de ferramentas tecnológicas e programas computacionais.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BRASIL, 2018, p. 536).

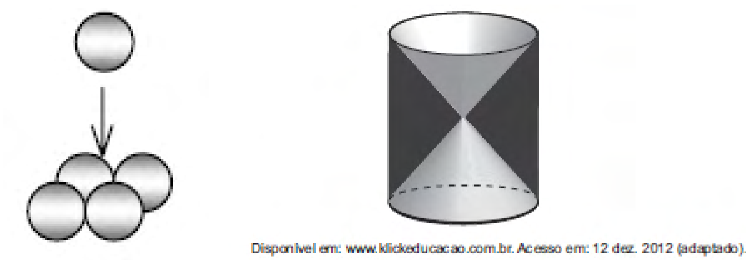
A geometria está presente em todos os documentos que orientam o planejamento e o desenvolvimento da matemática nos vários níveis educacionais (BRASIL, 2018; SEED, 2008), sendo aplicada tanto de forma direta quanto transversal, de maneira a contribuir para que o estudante desenvolva uma visão espacial. Quanto às habilidades em geometria e medidas, a BNCC estabelece para o Ensino Médio:

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 545).

Além disso, a geometria é base de conhecimento para outras áreas da ciência e tecnologia, como por exemplo, a física e as engenharias, reforçando seu caráter multidisciplinar no processo educacional. Tal importância é evidenciada pela quantidade expressiva de questões de geometria plana e de geometria espacial no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Nos mais de vinte anos de existência desse exame (INEP, 2019), podemos elencar na prova de Matemática e suas Tecnologias muitas questões envolvendo o cálculo de áreas e de volumes (NÓS; FERNANDES, 2019, 2018; TAVARES, 2019).

Nas questões de geometria espacial do ENEM, destacamos várias abordando a esfera (TAVARES, 2019). Essas questões são tanto de cunho aplicado, como o cálculo do volume – Figura 1(a), quanto de cunho conceitual – Figura 1(b). A questão ilustrada na Figura 1(b) aborda um aspecto da demonstração da relação para o cálculo do volume da esfera através do princípio de Cavalieri.

O volume da esfera é comumente abordado nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio através da simples apresentação da relação . Os estudantes não são estimulados a comprovar/justificar essa relação. Contudo, a BNCC estabelece como competência específica 5 para Matemática e suas Tecnologias:



(a) (b)

Figura 1 – Questões do ENEM envolvendo a esfera: (a) questão 02 de 1998; (b) questão 170 da Prova Amarela de 2018

Fonte: INEP (2019).

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

Dessa forma, apresentamos neste trabalho estratégias e atividades que o professor de matemática do Ensino Médio pode utilizar para comprovar a relação para o cálculo do volume da esfera (NÓS; TAVARES, 2021), e empregamos nas estratégias o aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra 3D (GEOGEBRA3D, 2021; NÓS; SILVA, 2020, 2019), alinhando assim o planejamento de atividades para a sala de aula ao que estabelece a BNCC.

2 | O VOLUME DA ESFERA

Podemos definir a esfera como sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional que distam uma medida *r* de um ponto O considerado. A Figura 2 ilustra uma esfera ε de centro O e raio *r*, cujo volume é definido pelo Teorema 1.

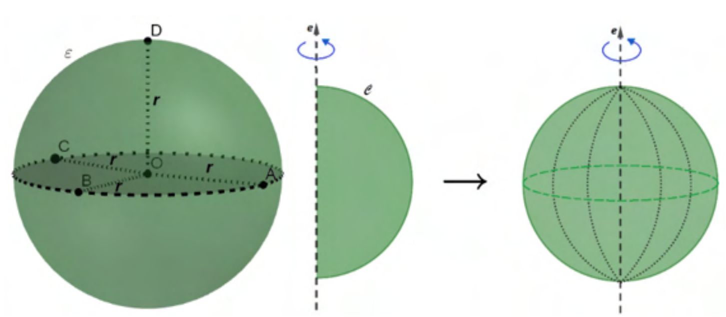


Figura 2 – Esfera de centro O e raio r e sua concepção como sólido de revolução.

Fonte: Tavares (2019, p. 39).

Teorema 1. *O volume V da esfera ε de raio r é dado por*

$$V(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Segundo Lima (2011), dentre as estratégias que o professor de matemática do Ensino Médio pode empregar para justificar a relação determinada pelo Teorema 1 estão o princípio de Cavalieri e a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes.

2.1 O princípio de Cavalieri

O Princípio 1 ou princípio de Cavalieri[1] (LIMA, 2011; LIMA et al., 2006; PATERLINI, 2010), ilustrado na Figura 3, pode ser apresentado aos estudantes do Ensino Médio como um postulado, ressaltando-se a necessidade de se comprovar a equivalência das seções. Para Lima (2011), o uso do princípio de Cavalieri "permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume" (LIMA, 2011, p. 96).

Princípio 1. *Se todo plano paralelo ao plano das bases de dois sólidos, de bases equivalentes e alturas congruentes, determina nos dois sólidos seções equivalentes, então os dois sólidos são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.*

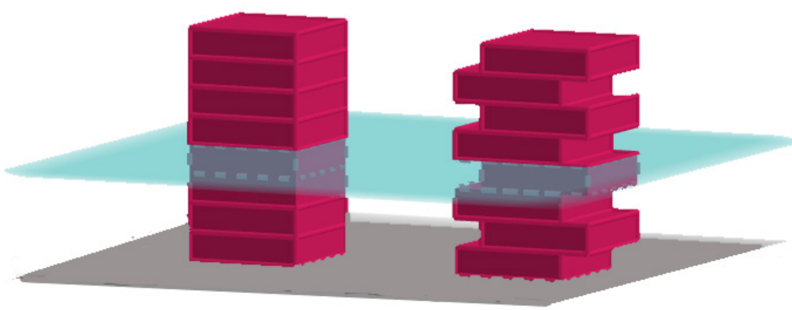


Figura 3 – Sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes intersectados por um plano paralelo às bases que determina em ambos seções equivalentes

Fonte: Tavares (2019, p. 40).

Dessa forma, para usar o princípio de Cavalieri no cálculo do volume de um sólido, precisamos comparar este sólido com um sólido de volume conhecido. No caso da esfera, esse sólido é a anticlépsidra - Figura 4: um cilindro equilátero de base congruente ao círculo máximo da esfera, do qual foram retirados dois cones retos de bases congruentes à base do cilindro e de alturas iguais ao raio da esfera. Mostremos então, usando o princípio de Cavalieri, que a esfera e a anticlépsidra, ou a semiesfera e a semianticlépsidra, de mesmo raio têm o mesmo volume.

1 Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647): sacerdote e matemático italiano, discípulo de Galileu. É considerado um dos precursores do cálculo integral.

Figura 4 – Anticlépsidra e um dos cones que formam a clépsidra confeccionados em aço carbono

Fonte: Nós (2019).

Demonstração

Sejam a semianticlépsidra A_s e a semiesfera E_s, ambas de raio r, e β um plano paralelo ao plano α que contém as bases de A_s e E_s. O plano β secciona A_s e A_s a uma distância d, $d<r$, dos centros das bases dos dois sólidos, como ilustra a Figura 5.

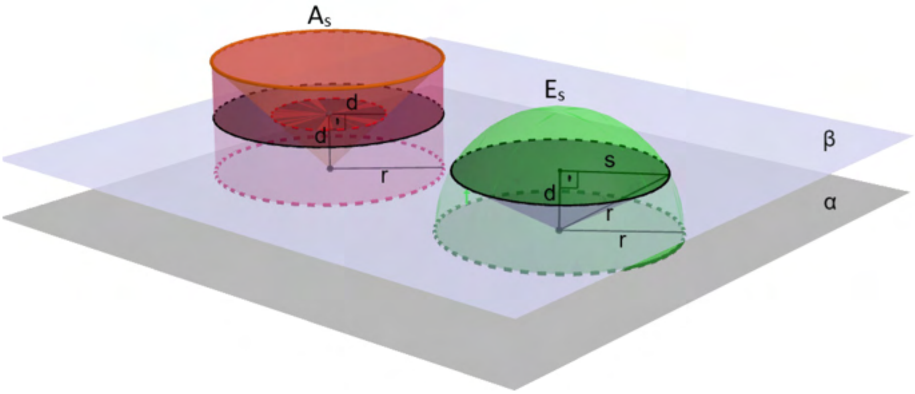


Figura 5 – Semianticlépsidra e semiesfera equivalentes Fonte: Tavares (2019).

Na semiesfera E_s, o plano β determina um círculo de raio s. Como

$$r^2 = d^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = r^2 - d^2,$$

a área da seção circular é igual a:

$$A(seção\ circular) = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2). \tag{1}$$

Na semianticlépsidra A_s, o plano β determina uma coroa circular de raio externo r

e de raio interno *d*, medida esta comprovada por semelhança de triângulos (caso ângulo-ângulo). Dessa maneira, a área da seção na semianticlépsidra é igual a:

$$A(coroa\ circular) = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2). \tag{2}$$

As áreas (1) e (2) das seções que o plano β determina em E_s e A_s, respectivamente, são iguais independentemente da distância *d*, desde que β seja paralelo à α. Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que E_s e A_s são equivalentes. Portanto:

$$V(E_s) = V(A_s) = V(semicilindro) - V(cone);$$

$$V(E_s) = \pi r^2 r - \frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{2}{3}\pi r^3. \tag{3}$$

Como o volume da esfera ε é igual a duas vezes o volume da semiesfera E_s, multiplicando o resultado (3) por dois temos que

$$V(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

o que confirma a tese do Teorema 1.

2.2 O segundo teorema de Arquimedes

O princípio de Cavalieri, apesar de intuitivo, não pode ser demonstrado de maneira elementar (LIMA, 2011). Assim, o teorema de Arquimedes[2] é outra abordagem que pode ser adotada no Ensino Médio.

Na obra *O Método* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014), Arquimedes descreve uma estratégia mecânica para investigar volumes tais como o da esfera – Teorema 2.

Teorema 2. *O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera.*

Para provar o volume da esfera segundo Arquimedes (AABOE, 2013; ARCHIMEDES; HEATH, 1953; ASSIS; MAGNAGHI, 2014; ÁVILA, 1986; HELLMEISTER, 2013; TAVARES, 2019), precisamos da lei da alavanca ou princípio de equilíbrio proposta por Arquimedes na obra *Sobre o equilíbrio de figuras planas*.

Princípio 2. *Uma alavanca está em equilíbrio se o produto do peso A pela distância a entre o fulcro*[3] *e o ponto de suspensão de A for igual ao produto do peso B e sua distância b do fulcro, isto é,*

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow A.a = B.b. \tag{4}$$

2 Arquimedes de Siracusa (287 AEC – 212 AEC): matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. A ele são atribuídas as leis do empuxo e da alavanca.
3 Ponto fixo.

A Figura 6 mostra uma alavanca em equilíbrio, ou seja, uma alavanca onde a relação (4) é verificada.

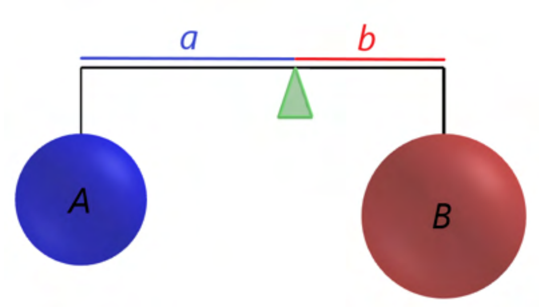
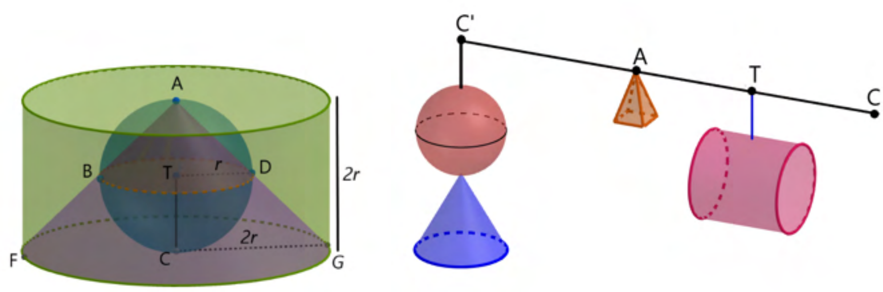


Figura 6 – Alavanca em equilíbrio

Fonte: Tavares (2019).

Utilizando o Princípio 2, podemos mostrar que o cilindro de raio e altura *2r*, a uma distância *d* do fulcro da alavanca, equilibra o cone de raio e altura *2r* e a esfera de raio *r*, ambos a uma distância *2d* do fulcro da alavanca, situação ilustrada na Figura 7.

Desta maneira, usando os sólidos ilustrados na Figura 7(a) na alavanca ilustrada na Figura 7(b), concluímos que:



(a) (b)

Figura 7 – (a) Esfera, cone e cilindro; (b) alavanca de Arquimedes em equilíbrio

Fonte: (a) Tavares (2019, p. 54); (b) Tavares (2019, p. 53).

$$V(cilindro).d = [V(cone) + V(esfera)].2d;$$

$$V(esfera) = \frac{1}{2}V(cilindro) - V(cone) = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 2r - \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2r = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

o que corrobora a tese do Teorema 1.

3 I ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

3.1 O princípio de equilíbrio de Arquimedes

A maior contribuição de Arquimedes para a geometria está no trabalho *O Método*, no qual explora a determinação de volumes através do Princípio 2 ou lei da alavanca, que define um sistema mecânico de equilíbrio de pesos em uma alavanca (ARCHIMEDES; HEATH, 1953; ASSIS; MAGNAGHI, 2014), ilustrado na Figura 8.

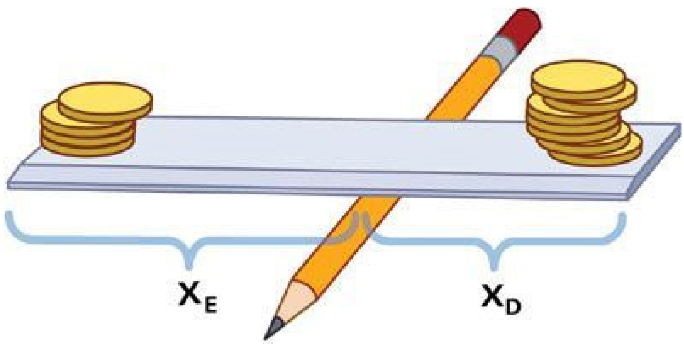


Figura 8 – Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes

Fonte: Antônio (2015).

Como a matemática grega era essencialmente geométrica, Arquimedes não determinou a relação para o cálculo do volume da esfera. Entretanto, demonstrou a proporcionalidade entre as massas de dois sólidos através da lei da alavanca, o que nos possibilita deduzir a relação. Em sua obra *Sobre a esfera e o cilindro* (ARCHIMEDES; HEATH, 1953), Arquimedes demonstrou o Teorema 2 utilizando um método semelhante ao da exaustão (NÓS; SANO; TAVARES, 2021).

O objetivo desta atividade é estabelecer a relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro descrita no Teorema 2 empregando a lei da alavanca, também denominada princípio de equilíbrio de Arquimedes.

Etapas da atividade

1. Orientar os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 9: uma esfera de raio *r*, um cone reto de raio e altura *r* e um cilindro equilátero de raio *r*.

Figura 9 – Sólidos em acrílico

Fonte: Play (2010).

2. Desprezando-se o volume de acrílico nos três sólidos, a razão entre os volumes pode ser representada pela razão entre as massas. Dessa forma, usando uma barra de madeira e um ponto de apoio (fulcro) para construir uma alavanca similar àquela ilustrada na Figura 8, os estudantes devem comparar as massas dos três sólidos, dois a dois, estabelecendo o equilíbrio na alavanca e anotando na Tabela 1 a distância dos sólidos comparados em relação ao ponto de apoio.

Sólidos comparados	Distância dos sólidos em relação ao ponto de apoio
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Tabela 1 – Atividade 1: distância dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Fonte: Tavares (2019, p. 109).

3. Com os dados da Tabela 1, os estudantes devem calcular a razão entre as distâncias dos sólidos em relação ao ponto de apoio da alavanca e anotar os resultados na Tabela 2.

Sólidos comparados	Razão entre as distâncias em relação ao ponto de apoio
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Tabela 2 – Atividade 1: razão entre as distâncias dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Fonte: Tavares (2019, p. 109).

4. A partir das razões anotadas na Tabela 2, espera-se que os estudantes concluam que:

a) o ponto de apoio da alavanca não é equidistante dos objetos comparados e que o equilíbrio ocorre de forma inversamente proporcional à medida das massas, isto é, o objeto de maior massa está mais próximo do ponto de apoio enquanto o de menor massa está mais distante;

b) as seguintes relações são válidas:

$$V(cilindro) = 6V(cone);$$

$$V(esfera) = 4V(cone);$$

$$V(esfera) = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

$$V(cilindro) = \frac{3}{2}V(esfera); \qquad (5)$$

$$\frac{V(cone) + V(esfera)}{V(cilindro)} = \frac{5}{6}. \qquad (6)$$

5. Os estudantes podem finalmente comprovar a relação (6) comparando os três sólidos na alavanca. Reescrevendo (6) como

$$6[V(cone) + V(esfera)] = 5V(cilindro),$$

temos que o cone e a esfera, a uma distância de *6 uc* do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro, este a uma distância de *5 uc* do fulcro da alavanca.

Observações

1. Estimular os estudantes a investigar se a massa de acrílico dos sólidos interfere nos resultados da atividade. Pinto (2005) propõe usar uma esfera de raio *r* e um cilindro de raio e altura *r*, ambos de madeira maciça, na alavanca de Arquimedes para calcular o volume da esfera.

2. Esta atividade permite que o professor explore conceitos físicos em sala de aula, promovendo a interdisciplinaridade.

3. Os estudantes podem investigar graficamente na atividade a inscrição e circunscrição de sólidos. Por exemplo, a relação (5) pode ser construída no GeoGebra 3D. A Figura 10 ilustra essa construção.

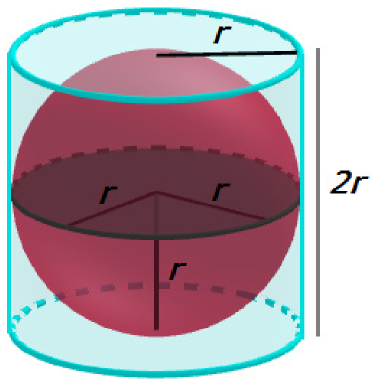


Figura 10 – Esfera inscrita em um cilindro equilátero

Fonte: Tavares (2019, p. 50).

4. Na seção sobre o segundo teorema de Arquimedes, mostramos que, para uma esfera de raio *r*, um cone reto de raio e altura *2r* e um cilindro reto de raio e altura *2r*, a lei da alavanca estabelece que:

$$\frac{V(cone)+V(esfera)}{V(cilindro)}=\frac{1}{2};$$

$$2[V(cone)+V(esfera)]=V(cilindro). \quad (7)$$

Dessa forma, pela relação (7) temos que o cone e a esfera, a uma distância *d* do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro a uma distância $\frac{d}{2}$ do fulcro da alavanca. As Figuras 11 e 12 ilustram a relação (7) para r=2,5cm e d=30cm, na balança de Arquimedes em equilíbrio e desequilíbrio, respectivamente. O cilindro, o cone e a esfera presentes nessas figuras foram confeccionados em impressora 3D.

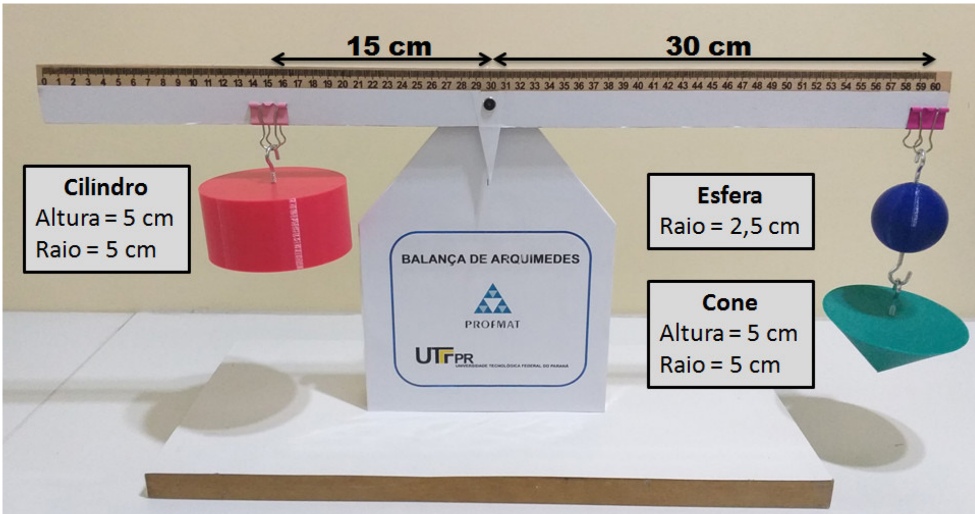


Figura 11 – Lei da alavanca de Arquimedes: a esfera e o cone equilibram o cilindro

Fonte: Tavares (2019, p. 111).

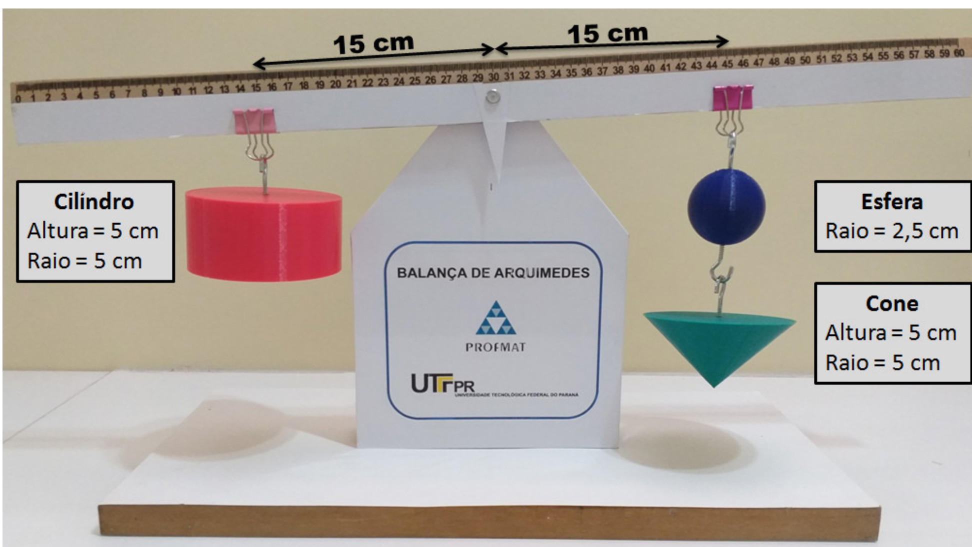


Figura 12 – Lei da alavanca de Arquimedes: a esfera e o cone não equilibram o cilindro

Fonte: Tavares (2019, p. 111).

3.2 O princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D

O objetivo da atividade é construir uma sequência didática no GeoGebra 3D para comprovar o volume da esfera empregando o princípio de Cavalieri.

Etapas da atividade

1. Construir uma semiesfera de raio *3 cm* através da função $z = f(x, y) =$

$\sqrt{9-(x-x_A)^2-(y-y_A)^2}$. Marcar o centro A do círculo máximo da semiesfera (Z_A=0) e o raio $\overline{AB}$ perpendicular ao plano desse círculo. Finalizar traçando duas retas, a primeira passando pelo ponto B e a segunda paralela ao raio $\overline{AB}$ e perpendicular à primeira, como mostra a Figura 13.

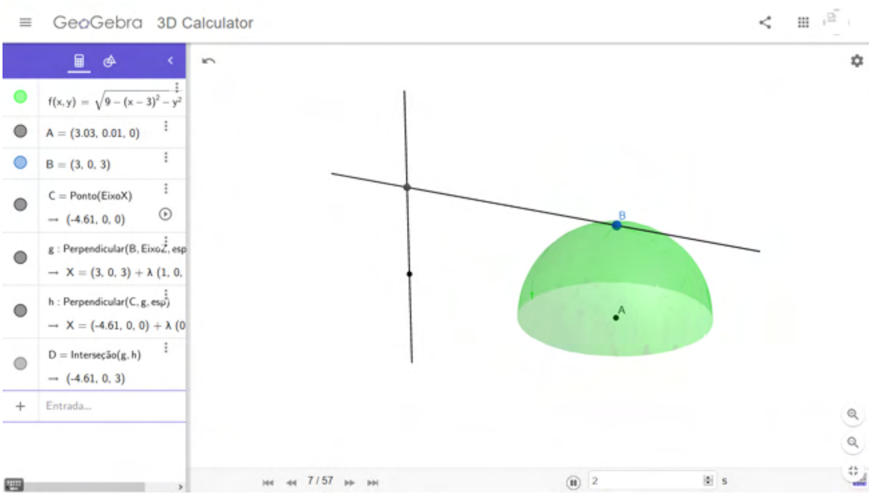


Figura 13 – Construção da semiesfera de raio *AB*=3*cm*

Fonte: Tavares (2019, p. 112).

2. Construir o cilindro circular reto de altura $\overline{AB}$ e raio *3 cm* cujo eixo é a segunda reta traçada na primeira etapa, como ilustra a Figura 14. O eixo do cilindro deve distar mais de *6 cm* da reta suporte de $\overline{AB}$.

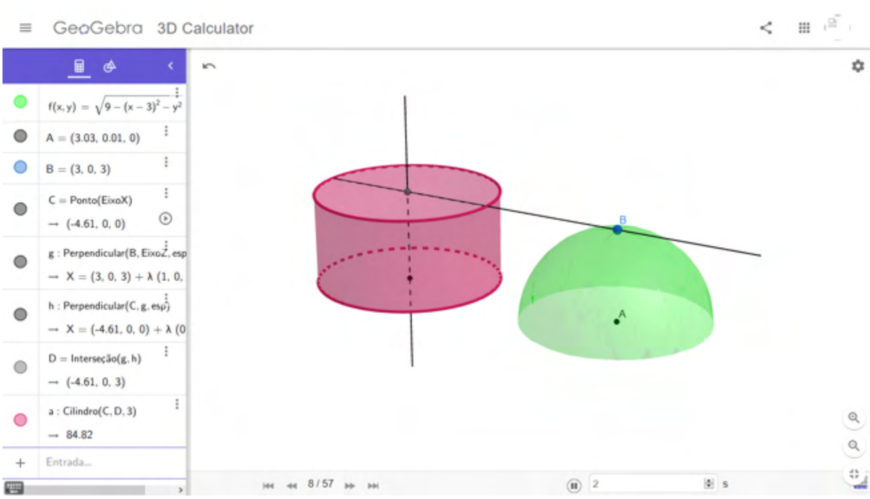


Figura 14 – Construção do cilindro de altura AB=3*cm* e raio *r*=3*cm*

Fonte: Tavares (2019, p. 112).

3. Construir um cone reto de altura $\overline{AB}$ e raio *3 cm*, cujo vértice é o centro da base inferior do cilindro construído na segunda etapa, como na Figura 15. O sólido formado pelo cilindro menos o cone é a semianticlépsidra.

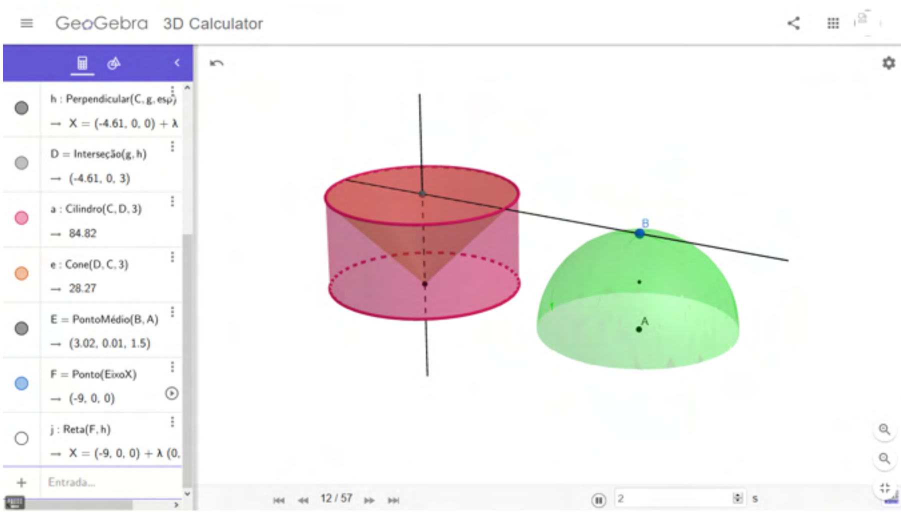


Figura 15 – Construção da semianticlépsidra

Fonte: Tavares (2019, p. 113).

4. Determinar o ponto médio de $\overline{AB}$ e traçar o plano secante à semianticlépsidra e à semiesfera que passa pelo ponto médio e é perpendicular ao eixo do cilindro, como mostra a Figura 16.

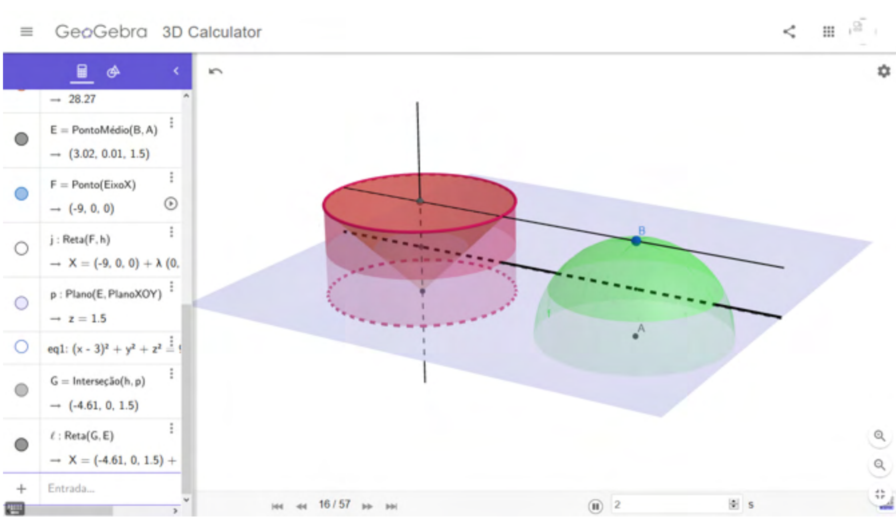


Figura 16 – Construção do plano secante à semianticlépsidra e à semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 113).

5. Destacar a intersecção do plano secante com a semianticlépsidra, uma coroa circular, e com a semiesfera, um círculo, como ilustra a Figura 17.

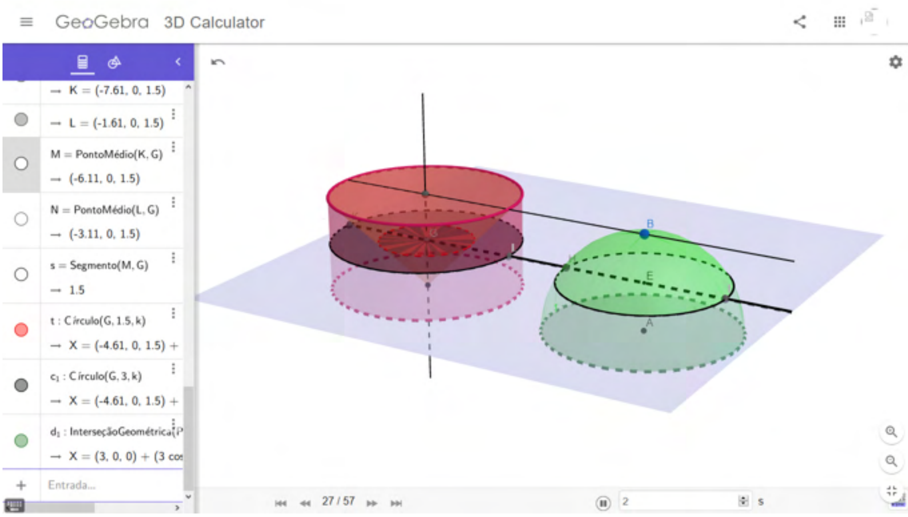


Figura 17 – Seções na semianticlépsidra e na semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 114).

6. Calcular a área das seções na semianticlépsidra e na semiesfera e concluir que as seções são equivalentes, como mostra a Figura 18.

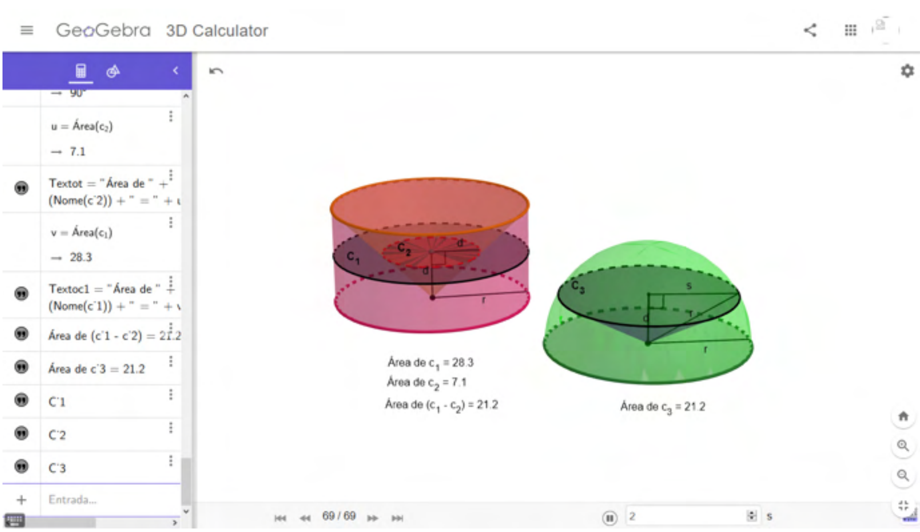


Figura 18 – Área das seções na semianticlépsidra e na semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 114).

7. Calcular o volume da semianticlépsidra e da semiesfera, como na Figura 19.

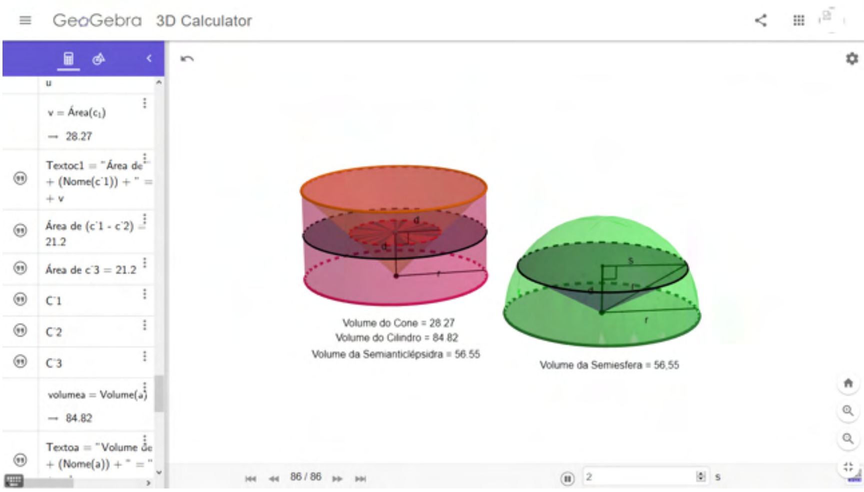


Figura 19 – Volume da semianticlépsidra e da semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 115).

Observações

1. A animação descrita nesta atividade está disponível em

https://www.geogebra.org/3d/dd4eh7dz.

2. Usando três sólidos vazados de acrílico, um cone reto de raio e altura *r*, um cilindro equilátero de raio *r* e uma esfera de raio *r*, podemos mostrar que a esfera de raio *r* é equivalente à anticlépsidra de raio *r*. Iniciamos enchendo o cilindro equilátero de água. Em seguida, despejamos a água do cilindro no cone até enchê-lo. Descartamos essa água e enchemos o cone novamente. Despejamos agora na esfera a água que restou no cilindro. Os estudantes devem observar que a esfera ficou completamente cheia e que, portanto,

$$V(esfera) = V(anticlépsidra) = V(cilindro) - 2V(cone) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

As estratégias/atividades para comprovar a relação para o cálculo do volume da esfera presentes neste trabalho foram apresentadas em 2019 aos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio do CPM, no qual a autora é professora de matemática. Concluímos que as atividades foram relevantes para consolidar conceitos relativos ao cálculo do volume da esfera, do cone e do cilindro e contribuíram à preparação dos estudantes para o ENEM.

Esperamos que este trabalho motive os professores de matemática da Educação Básica a elaborar atividades e experimentos para comprovar/justificar relações geométricas, ao invés de simplesmente apresentá-las aos estudantes, como também a utilizar aplicativos de geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D, nas aulas de geometria.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANTÔNIO, J. C. **Alavancas e equilíbrio**. Instituto Claro, 2015. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/alavancas-e-equilibrio/. Acesso em: 03 set. 2021.

ARCHIMEDES; HEATH, T. L. **The works of Archimedes**. New York: Dover, 1953.

ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O método ilustrado de Arquimedes**: utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade. Montreal: Apeiron, 2014.

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, n. 10, 1986.

BRASIL – Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 03 set. 2021.

GEOGEBRA3D. **GeoGebra 3D calculator**. 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/3d. Acesso em: 03 set. 2021.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

INEP. **Provas e gabaritos do ENEM**. 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 03 set. 2021.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. v. 2, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NÓS, R. L. **Acervo de material didático da disciplina geometria espacial**. UTFPR: Curitiba, 2019.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121-137, 2019. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1805.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 38, 2018, Campinas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2. São Carlos: SBMAC, 2018. p. 010272-1 – 010272-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0272.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 39, 2019, Uberlândia. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1. São Carlos: SBMAC, 2020. p. 010364-1 – 010364-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2020.007.01.0364.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos. **C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 53-70, 2019. DOI: https://doi.org/10.21167/cqdvol16201923169664rlnvmrs5370.

NÓS, R. L.; TAVARES, M. C. F. P. Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática do Ensino Médio. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 40, 2021, evento virtual. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 8, n. 1. São Carlos: SBMAC, 2021. p. 010387-1 – 010387-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2021.008.01.0387.

NÓS, R. L.; SANO, M.; TAVARES, M. C. F. P. Using Bernoulli numbers to generalize a limit of finite sum arising from volume computations with the squeeze theorem. **Revisem**, 6(3): 77-96, 2021.

PATERLINI, R. R. Os “teoremas” de Cavalieri. **Revista do Professor de Matemática**, n. 72, p. 43-47, 2010.

PINTO, F. de A. Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera. **Revista do Professor de Matemática**, n. 58, p. 18-20, 2005.

PLAY, J. **Sólidos geométricos em acrílico**. 2010. Disponível em: https://www.jottplay.com.br/produto/solidos-geometricos-acrilico/530. Acesso em: 03 set. 2021.

SEED. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Curitiba: Governo do Paraná/SEED/DEB, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1. Acesso em: 03 set. 2021.

TAVARES, M. C. F. P. **Superfícies e sólidos esféricos.** 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2019. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4697.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

N

O

P

R

S

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022