



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2



Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Mariane Aparecida Freitas
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-258-0029-5

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604>

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal” demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***” nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Julio Robson Azevedo Gambarra

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206041>

CAPÍTULO 2..... 13

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Alexandre Souza de Oliveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206042>

CAPÍTULO 3..... 25

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

J. Michael Shaughnessy

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043>

CAPÍTULO 4..... 42

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos

Angel Hasely Silva Mechato


Ronald Marlon Lozano Reátegui

Vitelio Asencios Tarazona

Manuel Ricardo Guerrero Ochoa

Iris Olivia Ruiz Yance

Weninger Pinedo Chambi


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206044>

CAPÍTULO 5..... 55

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Henrique Kuller dos Santos

Joyce Jaquelinne Caetano


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206045>

CAPÍTULO 6..... 65

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Francisco Neto Lima de Souza

Giselle Costa de Sousa


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206046>

CAPÍTULO 7..... 75

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Rosângela Teixeira Guedes

Marcos Felipe de Oliveira


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206047>

CAPÍTULO 8..... 90

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Joe Widney Lima da Silva

Elisângela Dias Brugnera


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206048>

CAPÍTULO 9..... 102

IDENTIDADES POLINOMIAIS z_2 -GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2×2

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206049>

CAPÍTULO 10..... 107

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Raquel Sousa Oliveira

Américo Junior Nunes da Silva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060410>

CAPÍTULO 11..... 133

***R/EXAMS* COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS**

Luzia Pedroso de Oliveira


Denise Helena Lombardo Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060411>

CAPÍTULO 12..... 143

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Caroline Saemi Lima Fujimoto

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060412>







CAPÍTULO 13..... 165

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Amanda Souza Araújo


Simone Damm Zogaib

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060413>

CAPÍTULO 14	178
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO	
Cristiano Santana Freitas Lucília Batista Dantas Pereira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060414	
CAPÍTULO 15	195
UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Cassia Bordim Santi	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060415	
CAPÍTULO 16	202
O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA	
Fernanda Luciano Fernandes Rosangela Minto Simões Carla Corrêa Pacheco Gomes Vanilza Maria Rangel de Moraes Maristela Athayde Rohr	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060416	
CAPÍTULO 17	216
EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Fernanda Gonzalez Anhõn André Ribeiro da Silva	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060417	
CAPÍTULO 18	228
RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS	
Lênio Fernandes Levy	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060418	
CAPÍTULO 19	239
ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA	
João Socorro Pinheiro Ferreira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060419	
CAPÍTULO 20	263
O USO DE <i>PODCAST</i> NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO	
Deyse Mara Nieto Lyrio	

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes

Valdinei Cezar Cardoso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060420>

CAPÍTULO 21..... 278

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Maria Carla Ferreira Pereira Tavares

Rudimar Luiz Nós

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060421>

CAPÍTULO 22..... 296

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS

Josimar da Silva Rocha


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060422>

CAPÍTULO 23..... 305

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Daniela dos Santos Vargas

Victor Hugo de Oliveira Henrique


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060423>

CAPÍTULO 24..... 312

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Gaspar Soares

Márcio Rufino Silva


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060424>

CAPÍTULO 25..... 323

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ana Paula dos Santos Stelle

Joyce Jaqueline Caetano


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060425>


CAPÍTULO 26..... 331

IDENTIDADES POLINOMIAIS G-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES $n \times n$ SOBRE UM CORPO FINITO

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060426>

CAPÍTULO 27.....	336
UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA Francisco Odecio Sales Maria Aliciane Martins Pereira da Silva  https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060427	
SOBRE O ORGANIZADOR	355
ÍNDICE REMISSIVO.....	356

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Data de aceite: 01/03/2022

Data de submissão: 17/01/2022

Rosangela Teixeira Guedes

Mestrado em Matemática, Universidade
Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio, Paraná
<http://lattes.cnpq.br/6229392665915856>

Marcos Felipe de Oliveira

Licenciatura em Matemática, Universidade
Tecnológica Federal do Paraná
Paraná
<http://lattes.cnpq.br/2883513254095184>

RESUMO: Este artigo tem por objetivo estudar curvas no plano e no espaço e suas aplicações. Para tanto, será realizado um estudo dos conceitos preliminares necessários da Geometria Diferencial. Em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns resultados de curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva não parametrizada pelo comprimento de arco, curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas. Com esse estudo, tornou-se possível desenvolver aplicações com comandos e animações no Software Geogebra sobre Vetor Tangente, Reparametrização da curva, Curva reparametrizada pelo comprimento de arco, Curva que caracteriza uma Hélice, Curvatura da Circunferência, Curvatura da Espiral Logarítmica, Curvatura máxima de uma Curva e o Teorema

Fundamental das Curvas Planas.

PALAVRAS-CHAVE: Curva, Curvatura, Hélice, Aplicações.

CURVES AND ANIMATIONS APPLICATIONS WITH THE GEOGEBRA SOFTWARE

ABSTRACT: This article aims to study curves in the plane and in space and their applications. Therefore, a study of the necessary preliminary concepts of Differential Geometry will be carried out. Then, some results of curve parameterized by arc length, Frenet reference for curve parameterized by arc length, Frenet reference for curve not parameterized by arc length, curvature, torsion and Fundamental Theorem of Plane Curves will be stated and demonstrated. With this study, it became possible to develop applications with commands and animations in Geogebra Software on Tangent Vector, Reparametrization of the curve, Curve reparametrized by the arc length, Curve that characterizes a Helix, Curvature of the Circumference, Curvature of the Logarithmic Spiral, Maximum Curvature of a Curve and the Fundamental Theorem of Plane Curves.

KEYWORDS: Curve, Curvature, Helix, Applications.

1 | INTRODUÇÃO

A história da geometria diferencial começa com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e

Apolônio. O alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) descobrem os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitirão o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

O estudo das propriedades locais de curvas consideradas na Geometria Diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. A Geometria Diferencial consiste no estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies, por meio do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra linear.

Serão abordados resultados de curva parametrizada diferenciável, curva parametrizada pelo comprimento de arco, traço de curva, reparametrização de curva pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, Hélice, Curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Animações com o auxílio do Software Geogebra de vetor tangente em um ponto da curva, reparametrização da curva regular que é circunferência de raio a , catenária parametrizada pelo comprimento de arco, curvatura de curvas, curvatura da Espiral Logarítmica, curva com curvatura máxima, dada uma função diferenciável como determinar a curvatura usando o Teorema Local de Curvas Planas e curva que caracteriza uma Hélice.

2 I RESULTADOS DE CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO E APLICAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Definição 1: Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva α e I é um intervalo de \mathbb{R} e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha'(t)$, $t \in I$ é chamado traço da curva.

Definição 2: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado vetor tangente da curva α em t .

Aplicação 3: (Cardioide e Vetor Tangente)

Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva parametrizada diferenciável que para cada $t \in R$ associa $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t)-1), \sin(t)(2\cos(t)-1))$, tal curva é denominada Cardioide.

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que num ponto qualquer P do Cardioide existe o vetor tangente utiliza os seguintes comandos:

$$\alpha = \text{Curva}(\cos(t)(2\cos(t)-1), \sin(t)(2\cos(t)-1), t, -10, 10)$$

Controles deslizantes s e h de variações $-10 \leq s \leq 10$ e $0 < h \leq 1$ de incremento 0.0001. Digite na caixa de entrada os pontos $P = \alpha(s)$ e $Q = \alpha(s+h)$.

Trace a Reta tangente a P e a curva α e a reta secante pelos ponto P e Q.

A seguir, será construído o vetor tangente da curva α no ponto P.

$$L = \frac{x(Q) - x(P)}{h} \quad (\text{em que } x(Q) \text{ e } x(P) \text{ representam as primeiras coordenadas dos})$$

pontos P e Q).

$M = \frac{y(Q) - x(P)}{h}$ (em que $y(Q)$ e $y(P)$ representam as segundas coordenadas do ponto P e Q); $d=x(P)$; $e=y(P)$.

Inserir na caixa de texto: $x'(d)-L$ e $y'(e)-M$. Editar na caixa de entrada:

$x'(d)-L$ (Escolher este L na caixa de objetos)

$y'(e)-M$ (Escolher este M na caixa de Objetos).

Vetor tangente = (L, M) **(Escolher na caixa de objetos)**

α =Derivada; (α); $A=\alpha(s)$; $O=(0,0)$; \vec{u} =Vetor (O, A) \vec{v} =Transladar (\vec{u}, P);

B =Transladar (P, \vec{v}); Vetor (P, B) (vetor tangente em P a curva α)

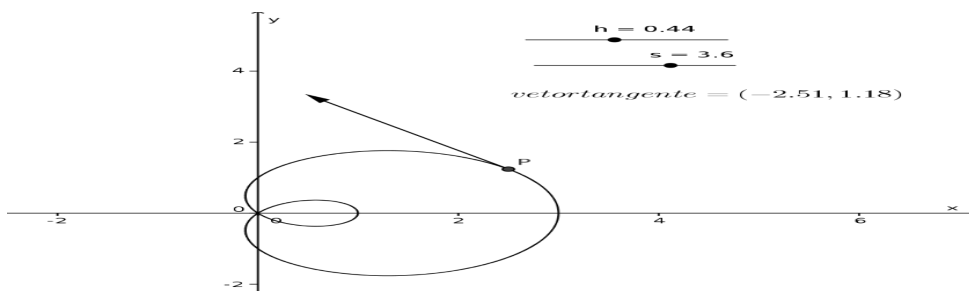


Figura 1: Cardioide e Vetor Tangente.

Fonte: Autoria própria.

Anime o controle deslizante s e observe que em qualquer ponto P do Cardioide existe o vetor tangente, de acordo com a Figura 1.

Definição 4: Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h: J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, que tem o mesmo traço de α que é chamada reparametrização de α por h .

A função h na Definição 4 é dita mudança de parâmetro. E a orientação de uma curva regular plana α é o sentido de percurso do traço de α .

Definição 5: Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 6: Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo $t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponhamos que a curva α seja parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Seja a função $s: I \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada $t \in I$, associa $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$

então $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, para todo $t \in I$. Temos que $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$, o que implica que $\|\alpha'(t)\| = s'(t) = 1$, para todo $t \in I$. (\Leftarrow) Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$. Para cada $t_0, t_1 \in I$ tal que $t_0 \leq t_1$ defina $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$ então $s(t) = t_1 - t_0$ o que prova que a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 7: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s: I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Aplicação 8:(Circunferência) Consideremos a curva regular $\alpha: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$ em que $a > 0$ é constante.

Pelos resultados da Definição 4, Definição 5, Proposição 6 e Proposição 7 determinamos a função h que é a função inversa da função comprimento de arco e esta função é dada $h: [0, 2a\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$ em que $h(s) = \frac{s}{a}$.

E a curva β a reparametrização da curva α por h é a curva

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right).$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a circunferência α e sua reparametrização β tem o mesmo traço utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes a e s de variações $0 < a \leq 5$ e $0 \leq s \leq 2a\pi$.

Digite na caixa de entrada a curva α e a função h :

$$\alpha(t) = \text{Curva}\left(a \cos(t), a \sin(t), t, 0, 2a\pi\right) \text{ e } h(s) = \frac{s}{a}.$$

Determine o ponto $A = \alpha(h(s))$ e habilite o rastro neste ponto. Anime o controle deslizante s , determinando o traço da curva α .

A seguir, digite na caixa de entrada a curva β :

$$\beta(s) = \text{Curva}\left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right), s, 0, 2a\pi\right).$$

Anime o controle deslizante s e observe que a curva $\beta(s) = (\alpha(h(s)))$ tem o mesmo traço que a curva α , de acordo com a Figura 2 e também pela Proposição 6 a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco.

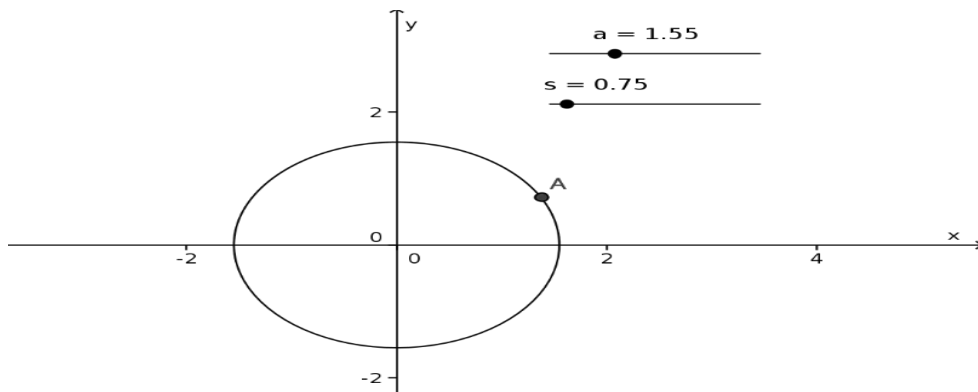


Figura 2: Reparametrização da Circunferência de raio a .

Fonte: Autoria própria.

A aplicação a seguir da Catenária que não é parametrizada pelo comprimento de arco.

Aplicação 9: (Catenária)

Seja $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$. A curva α não é parametrizada pelo comprimento de arco.

Alguns resultados de funções hiperbólicas: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$; $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$
 $(\cosh(t))' = \sinh(t)$; $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

Assim, calculando a derivada da curva α temos que $\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$ e a norma é dada por $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$.

O comprimento de arco da curva α é

$$s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \cosh(t) dt = \sinh(t) \Big|_a^b = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Pela Definição 5 como $s(t) \neq b - a$ então α não é parametrizada pelo comprimento de arco e o comprimento de arco da catenária é $s(t) = \sinh(b) - \sinh(a)$.

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a Catenária não é parametrizada pelo comprimento de arco utiliza os seguintes comandos: Controle deslizante a e b de variações $-5 \leq a \leq b, a \leq b \leq 5$.

Digite os comandos na caixa de entrada:

$$f(s) = s; \alpha = \text{Curva}(t, \cosh(t), t, a, b); \alpha' = \text{Derivada}(\alpha(t)); g(t) = \sqrt{1 + (\sinh(t))^2}; e = b - a.$$

Anime os controles deslizantes a e b e observe que $s(t)$ e $e = b - a$ são diferentes, isto é, a curva α não é parametrizada pelo comprimento de arco.

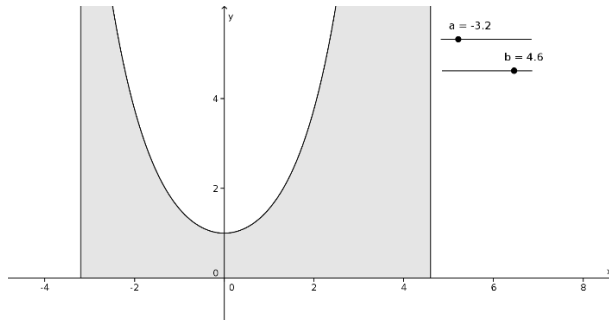


Figura 3: Catenária.

Fonte: Autoria própria.

Consideremos uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$ reparametrizada pelo comprimento de arco. Assim, para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor tangente unitário, o qual denotamos por

$$t(s) = (x'(s), y'(s)) = \alpha'(s)$$

e o vetor normal a curva α é o vetor unitário

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é dito referencial de Frenet da curva α .

Proposição 10: Seja a curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$ parametrizada pelo comprimento de arco e $\{t(s), n(s)\}$ o referencial de Frenet da curva α . Então os vetores $t'(s)$ e $n'(s)$ são paralelos aos vetores $n(s)$ e $t(s)$, respectivamente, e satisfazem as equações

$$t'(s) = K(s)n(s)$$

e

$$n'(s) = -K(s)t(s)$$

que são chamadas de fórmulas de Frenet da curva plana α e o fator de proporcionalidade $K(s)$ é chamado de curvatura de α em s .

Demonstração: Por hipótese a curva α parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$, para todo $s \in I$. Então $\|\alpha'(s)\| = 1$, é ortogonal a $t'(s)$ e como $t(s)$ é ortogonal a $n(s)$ implica que $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Portanto,

$$t'(s) = K(s)n(s).$$

$$\text{Além disso, } K(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Analogamente, como $n(s)$ é unitário então $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto $n'(s)$ é paralelo a $t(s)$. Assim, $\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s)$, donde concluímos que $n'(s) = -K(s)t(s)$.

Agora, vamos considerar uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular de parâmetro $r \in I$ e

$\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco s , isto é, $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, os vetores $t(r)$ e $n(r)$ referencial de Frenet da curva α e a curvatura é $K(r) = K(s(r))$.

A ideia de associar uma curva regular α ao movimento circular do vetor tangente unitário $t(s)$ ou equivalentemente, do vetor unitário normal $n(s)$ é devido a (Gauss, 1965), no início da geometria diferencial. Essa ideia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis.

Aplicação 11:(Curvatura da circunferência) Seja a aplicação $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right)$ em que $a \neq 0$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e a curvatura da curva α é $K = \frac{1}{a}$.

Primeiro vamos determinar o referencial de Frenet que são os vetores $t(s), n(s)$. Assim,

$$t(s) = (x'(s), y'(s)) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$t'(s) = (x''(s), y''(s)) = \left(-\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right), -\frac{1}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) = \left(-\cos\left(\frac{s}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$K(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{a} \cos^2\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{1}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura da circunferência de raio a utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes: a e b com variações, $1 \leq a \leq 8$ e $-5 \leq b \leq 5$.

Digite na caixa de entrada a curva α e a derivada da curva α :

$$\alpha(s) = \text{Curva}\left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right), s, -5, 5\right); \alpha'(s) = \text{Derivada}(\alpha)$$

e os pontos $P = \left(a \cos\left(\frac{b}{a}\right), a \sin\left(\frac{b}{a}\right)\right); Q = \left(-\sin\left(\frac{b}{a}\right), \cos\left(\frac{b}{a}\right)\right); O = (0,0)$
 $L = \left(-\cos\left(\frac{b}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ e os vetores $u = \text{Vetor}(O, Q); t = \text{Transladar}(u, P)(\text{vetor } t(s)),$

$W = \text{Vetor}(O, L); n = \text{Transladar}(w, P)(\text{vetor } n(s))$ a curvatura $K = \text{Curvatura}(P, \alpha);$

$$n = \text{Transladar}(w, P)(\text{vetor } n(s))$$

$$\beta = \text{Ângulo}(t, n)$$

$$M = \left(\frac{-1}{a} \cos\left(\frac{b}{a}\right), \frac{-1}{a} \sin\left(\frac{b}{a}\right)\right); v = \text{Transladar}(v, P) \text{ e } K = t' \cdot n(\text{Curvatura})$$

Considere uma reparametrização de α dado por $\beta(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), -a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right)$ então a curvatura da curva β é determinada por $K = \frac{-1}{a}$. Anime o controle deslizante a e observe que a curvatura da circunferência de raio a é $K = \frac{-1}{a}$, de acordo com a Figura 4.

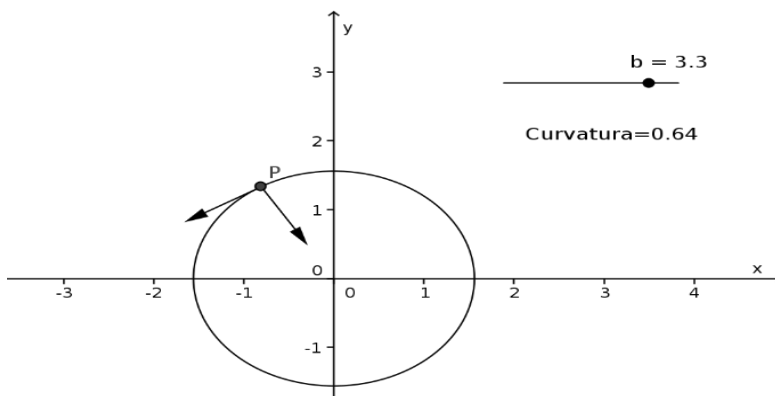


Figura 4: Curvatura da Circunferência de raio a .

Fonte: Autoria própria.

Observação 12: Os vetores do referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A proposição seguinte permite obter a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro, sem precisar reparametrizar a curva pelo comprimento de arco.

Proposição 13: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular então

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad \text{e} \quad K(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$$

Aplicação 14: (Curvatura da Espiral Logarítmica) Seja a equação da espiral logarítmica $\alpha = (e^r \cos(r), e^r \sin(r))$, $r \in \mathbb{R}$. Então a curvatura é $K(r) = \frac{1}{\sqrt{2}e^r}$ e temos que $\alpha'(r) = (e^r \cos(r) - e^r \sin(r), e^r \sin(r) + e^r \cos(r))$

$$\alpha'(r) = (0, 0) \Rightarrow e^r (\cos(r) - \sin(r)) = 0 \Rightarrow \cos(r) = \sin(r)$$

e

$e^r (\sin(r) + \cos(r)) = 0 \Rightarrow \cos(r) = -\sin(r)$. Portanto a curva α é regular pois $\alpha'(r) \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Assim, $\|\alpha'(r)\| = \sqrt{e^{2r}(\cos(r) - \sin(r))^2 + (e^r \sin(r) + e^r \cos(r))^2}$

$$= e^r \sqrt{\cos^2(r) - 2\cos(r)\sin(r) + \sin^2(r) + \sin^2(r) + 2\sin(r)\cos(r) + \cos^2(r)}$$

$= e^r \sqrt{2(\cos^2(r) + \sin^2(r))} = \sqrt{2}e^r \neq 1$, portanto α não é parametrizada pelo comprimento de arco $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Assim, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \neq \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e a curva α não é parametrizada pelo comprimento de arco $\|\alpha'(r)\| \neq 1$. As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura da Espiral Logarítmica

utiliza os seguintes comandos: Digite na caixa de entrada a curva α , a derivada da curva α , as funções f e g e suas derivadas: $\alpha(r)=\text{Curva}(e^r \cos(r), e^r, r, -3, 3)$; $f(r)=e^r \cos(r)$; $g(r)=e^r \sin(r)$ $f'(r)=\text{Derivada}(f)$; $g'(r)=\text{Derivada}(g)$; $f''(r)=\text{Derivada}(f, 2)$; $g''(r)=\text{Derivada}(g, 2)$.

Se a curva α não parametrizada pelo comprimento de arco então a curvatura é dada pelo fórmula:

$$K(r) = \frac{-f''(r)g'(r) + f'(r)g''(r)}{((f'(r))^2 + (g'(r))^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ então } K(s) = \frac{1}{\sqrt{2}e^s}.$$

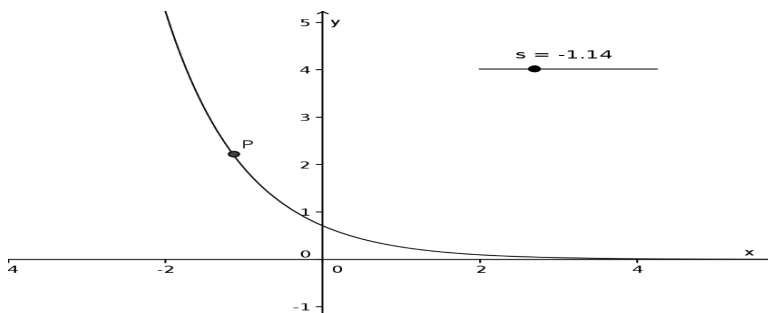


Figura 5: Curvatura da Espiral Logarítmica.

Fonte: Autoria própria.

Controle deslizante s de variação de -3 a 3 e o ponto $P=(s, K(s))$ e habilite rastro em P . Anime o controle deslizante s e observe a curvatura da curva da Espiral Logarítmica, de acordo com a Figura 5. A curva da Espiral Logarítmica não é parametrizada pelo comprimento de arco, mas como é uma curva regular pela Proposição 13 é determinada a curvatura e os vetores referencial de Frenet.

Aplicação 15: (Curvatura Máxima) Considere a curva regular $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t, t^2 - 4t - 3)$, $t \in \mathbb{R}$. Para que valor de t a curvatura da curva α é máxima?

As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura máxima da curva α utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante s de variação $-5 \leq s \leq 5$.

Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{Curva}(t, t^2 - 4t - 3, t, -5, 5); P = (s, s^2 - 4s - 3); K = \text{Curvatura}(P, \alpha);$$

$Q = (S, K)$ e habilite rastro no ponto Q ; curvatura da curva α

$$K_1(s) = \frac{2}{(1 + (2s - 4)^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e o ponto } A = \text{Máximo}(K_1(s), -5, 5).$$

Anime o controle deslizante s e portanto em $t=2$ ocorre a curvatura máxima de α , de acordo com a Figura 6.

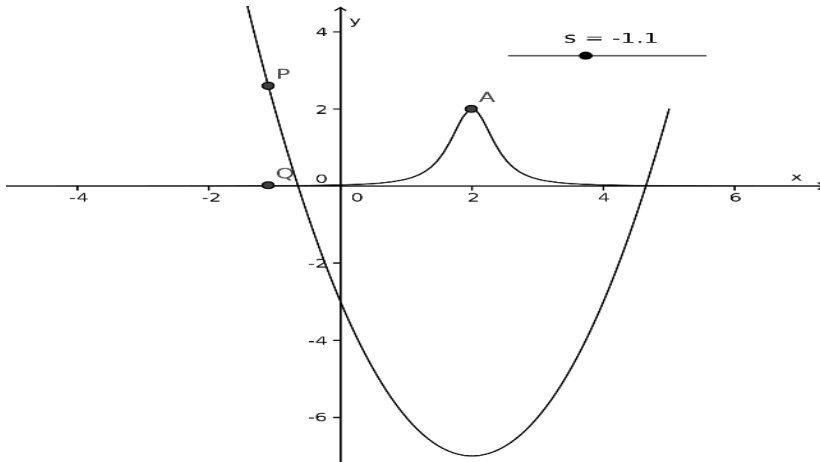


Figura 6: Curvatura Máxima da curva α .

Fonte: Autoria própria.

Teorema 16: (Teorema Fundamental das Curvas Planas)

- a) Dada uma função diferenciável $K(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ existe uma curva regular $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $K(s)$.
- b) A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ em que v_0 é um vetor unitário do \mathbb{R}^2 .
- c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em \mathbb{R}^2 tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas é possível reconstruir uma curva pela sua curvatura, ou seja, a curvatura determina a curva plana, a menos de sua localização no plano.

Aplicação 17: (Curvatura de uma função diferenciável)

Seja a função diferenciável $f(s) = s$, $s \in \mathbb{R}$ então existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é $K(s) = f(s)$.

Pelo Teorema Fundamental das curvas planas, temos que

$$\theta(s) = \int_0^s t dt = \frac{s^2}{2}; \quad \alpha(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \right); \quad t(s) = \alpha'(s) = \left(\cos\left(\frac{s^2}{2}\right), \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) \right);$$

$$t'(s) = \alpha''(s) = \left(-s \sin\left(\frac{s^2}{2}\right), s \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) \right) \text{ e } n(s) = \left(-\sin\left(\frac{s^2}{2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) \right).$$

As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura de uma função diferenciável utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante c de variação $-20 \leq c \leq 20$.

Digitar na caixa de entrada:

$$f(s)=s; g(s)=\cos\left(\frac{s^2}{2}\right); h(s)=\sin\left(\frac{s^2}{2}\right);$$

$$a=\text{Integral}(h,0,c); b=\text{Integral}(g,0,c); P=(a,b); h(s)=\frac{s}{a}$$

$$u=\left(-c \sin\left(\frac{c^2}{2}\right), c \cos\left(\frac{c^2}{2}\right)\right) (\text{vetor } n(s)) (\text{vetor } t'(s))$$

$$v=\left(-\sin\left(\frac{c^2}{2}\right), \cos\left(\frac{c^2}{2}\right)\right) (\text{vetor } n(s)) \text{ e } Q=(c, u \cdot v).$$

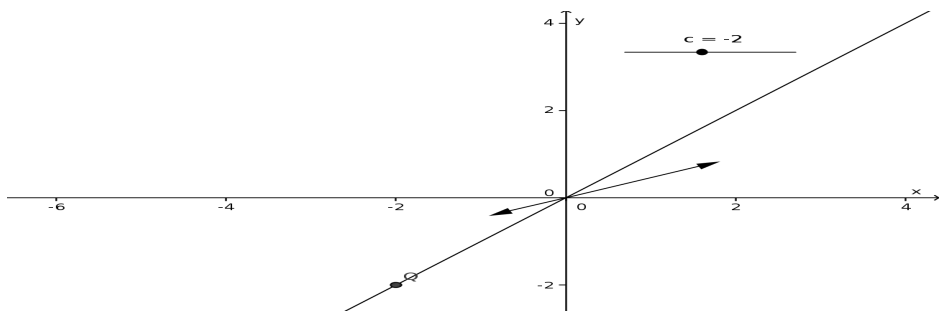


Figura 7: Curvatura de uma função diferenciável.

Fonte: Autoria própria.

Definição 18: Se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é um número real

$$K(s) = \|\alpha'(s)\|$$

(a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominada curvatura da curva α) e $K(s) \geq 0$ para todo $s \in I$.

Geometricamente, visto que $\|t(s)\| = 1$ e $\|K(s)\| = \|t'(s)\|$ a função curvatura é uma medida da variação da direção de t , portanto, da mudança de direção da reta tangente a curva α em $\alpha(s)$. A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2003).

Definição 19: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $K(s) > 0$. O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{K(s)}$$

é denominado vetor normal a α em s .

Observe que os vetores $t(s) = \alpha'(s)$ e $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{K(s)}$ são vetores ortonormais, pois os vetores $t(s)$ e $n(s)$ são unitários e ortogonais.

Definição 20: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de

arco tal que $K(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

em que a operação \times denota o produto vetorial.

O referencial ortogonormal $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ é o triedro de Frenet da curva α em s . O triedro de Frenet forma uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano osculador é o plano determinado pelos vetores $t(s)$ e $n(s)$, o plano retificante é o plano determinado pelos vetores $t(s)$ e $b(s)$ e o plano normal é determinado pelos vetores $n(s)$ e $b(s)$.

Proposição 21: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $K(s) > 0$ então $b(s)$ é paralelo a $n(s)$.

Demonstração: Pela definição de vetor binormal a curva α em s , temos que $b(s) = t(s) \times n(s)$, derivando esta equação resulta em

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s).$$

Temos que $t'(s) \times n(s) = 0$ pois os vetores $b(s) = t(s) \times n(s)$ e $n(s)$ são paralelos pela Proposição 10. Portanto, $b'(s) = t'(s) \times n(s)$ e concluímos que $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como o vetor binormal $b(s)$ é ortonormal então $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$, isto é, $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Logo, $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$.

Definição 22: O número real $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é denominado torção da curva α em s .

A torção $\tau(s)$ é a constante de proporcionalidade em que os vetores $b'(s)$ e $n(s)$ são paralelos pela Proposição 21.

Definição 23: Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice, se existe um vetor unitário que forma um ângulo constante com $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$, isto é, $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante.

Proposição 24: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então α é uma hélice, se e somente se, $\frac{K}{\tau}$ é constante.

Demonstração: (\Rightarrow) Considere a curva α parametrizada pelo comprimento de arco e por hipótese se α é uma Hélice e pela definição 23 existe um vetor unitário v tal que $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante. Como $\|\alpha'(t)\| = 1$ então $\langle \alpha'(t), v \rangle$ é constante e denote por $\langle \alpha'(t), v \rangle = a$. Derivando esta equação em relação a t resulta em

$$\langle \alpha''(t), v \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle K(s)n(s), v \rangle = 0.$$

Sendo K não-nula então $\langle n(s), v \rangle = 0$, o que implica que $n(s)$ é ortogonal a v e v pertence ao plano determinado por $t(s)$ e $b(s)$, para cada $s \in I$. Desta forma, podemos escrever v como combinação linear de $t(s)$ e $b(s)$, isto é, $v = \cos(\theta(s))t(s) + \sin(\theta(s))b(s)$. Derivando a equação anterior e usando as fórmulas de Frenet, temos que

$$-\sin(\theta(s))\theta'(s)t(s) + \cos(\theta(s))t'(s) + \cos(\theta(s))\theta'(s)b(s) + \sin(\theta(s))b'(s) = 0$$

e

$$-\sin(\theta(s))\theta'(s)t(s) + (K(s)\cos(\theta(s)) + \tau(s)\sin(\theta(s)))n(s) + \cos(\theta(s))\theta'(s)b(s) = 0.$$

Portanto, para todo $s \in I$

$$-\operatorname{sen}(\theta(s))\theta'(s)=0, \quad \cos(\theta(s))\theta'(s)=0 \quad \text{e} \quad K(s)\cos(\theta(s))+\tau(s)\operatorname{sen}(\theta(s))=0$$

o que implica que $\theta'(s)=0$, isto é, $\theta(s)=\theta$ (constante).

Além disso,

$$K(s)=\frac{-\tau(s)\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

em que $\cos(\theta) \neq 0$ pois por hipótese $\tau(s) \neq 0$. Assim, $\frac{K(s)}{\tau(s)} = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$ o que prova que $\frac{K}{\tau}$ constante para todo $s \in I$.

(\Rightarrow) Reciprocamente, como $\frac{K(s)}{\tau(s)} = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$ e considere o vetor unitário v dado por $v = \cos(\theta)t(s) + \operatorname{sen}(\theta)b(s)$. Assim, $\langle \alpha'(s), v \rangle = \langle t(s), \cos(\theta)t(s) + \operatorname{sen}(\theta)b(s) \rangle = \cos(\theta)\langle t(s), t(s) \rangle + \operatorname{sen}(\theta)\langle t(s), b(s) \rangle = \cos(\theta)$ em que $\langle t(s), b(s) \rangle = 0$ e $\langle t(s), t(s) \rangle = \|a'(s)\|^2 = 1$.

Portanto $\langle \alpha'(s), v \rangle$ é constante para todo $s \in I$ e pela Definição 23 a curva α é uma Hélice.

Aplicação 25: (Hélice) A curva regular $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ é uma hélice.

De fato, seja $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$ e considere o vetor unitário $m = (\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$ e o produto interno do vetor tangente e do vetor m ,

$$\langle \alpha'(t), m \rangle = \langle (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1), (\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) \rangle = -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t = -1.$$

$$\text{Como } \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{então } \frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{ para todo,}$$

Logo $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante e pela Definição 23 a curva α é uma hélice. As construções no Software Geogebra 3D para mostrar que a curva α é uma Hélice utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante s de variação $0 \leq s < 2\pi$ e digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{Curva}(\cos t, \operatorname{sen} t, t, t, 0, 2\pi) \quad \text{e}$$

$$\alpha'(t) = \text{Derivada}(\alpha(t))$$

e os pontos

$$P = (\cos s, \operatorname{sen} s, s); \quad Q = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 1); \quad O = (0, 0, 0); \quad Q_1 = (\operatorname{sen} s, -\cos s, 0)$$

e os vetores $u = \text{Vetor}(O, Q)$;

$$v = \text{trásladar}(u, P) \text{ (vetor tangente em } P); \quad w = \text{Vetor}(O, Q_1);$$

$m = \text{trásladar}(w, P)$ (vetor unitário em P); e o ângulo entre o vetor tangente e o vetor m unitário é $\beta = \text{Ângulo}(v, m)$.

Anime o Controle deslizante s e observe que o ângulo entre o vetor tangente e o vetor unitário é constante, o que conclui que a curva α é uma Hélice, de acordo com a Figura 8.

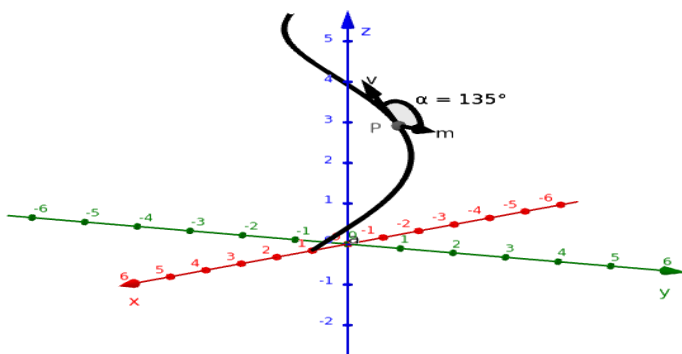


Figura 8: A curva α é uma Hélice.

Fonte: Autoria própria.

A aplicação seguinte usa o resultado da Proposição 24 para mostrar que a curva α da Aplicação 25 é uma Hélice.

Aplicação 26: A curva regular $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ é uma hélice. As construções no Software Geogebra 3D para mostrar que a curva α é uma Hélice utiliza os seguintes comandos, digite na caixa de entrada:

$\alpha = \text{Curva}(\cos t, \sin t, t, t, 0, 2\pi)$ e a curva β é a reparametrização por comprimento de arco da curva α em que $\beta = \alpha \circ h$ e $h = \frac{t}{\sqrt{2}}$ e por mudança de variável $0 \leq t < 2\pi\sqrt{2}$ e a curva β , $\beta = \text{Curva}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}, t, 0, 2\pi\sqrt{2}\right)$. Controle deslizante l de variação $0 \leq l < 2\pi\sqrt{2}$ e o ponto P e a curvatura, $P = \left(\cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), \frac{l}{\sqrt{2}}\right)$ e $K = \text{Curvatura}(P, \beta)$ e os pontos e vetores, $v1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $v = \text{Transladar}(v1, P)$ (Vetor tangente); $v2 = \left(-\cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$; $n = \text{Transladar}(v2, P)$ (vetor normal); $v3 = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$ $ew = \text{Transladar}(v3, P)$ (vetor $b'(l)$) em que $b(l)$ é o vetor binormal; e a torção é dada por $\tau = w \cdot n$ e a razão $d = \frac{K}{\tau}$. Na caixa de texto em LaTeX Fórmula escreva Razão=d. Anime o controle deslizante l e observe que o vetor $b'(l)$ e o vetor normal $n(s)$ são paralelos e a constante de proporcionalidade é a torção.

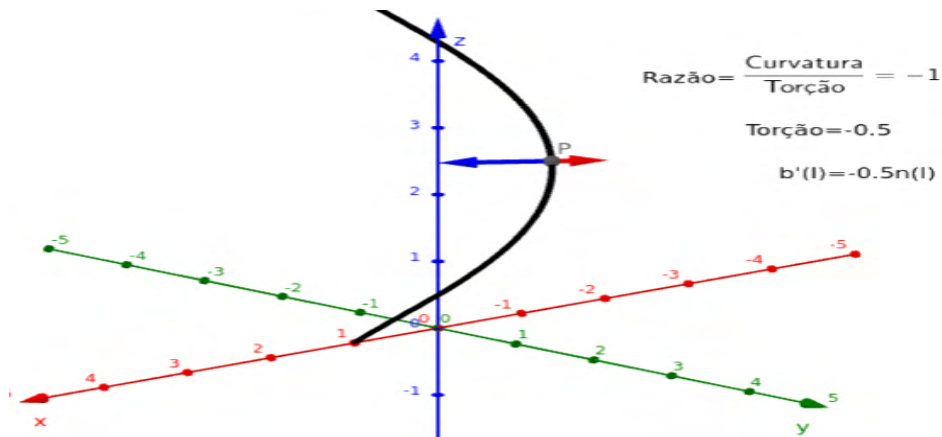


Figura 9: A curva α é uma Hélice.

Fonte: Autoria própria.

As hélices são as únicas curvas do espaço que apresentam curvatura e torção constantes (e não nulas). Esse fato deve-se ao Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas.

3 | CONCLUSÕES

Foram desenvolvidos comandos no Software Geogebra de aplicações e após construção deste comandos foram feitas animações no controle deslizante para observar o vetor tangente a um ponto da curva do cardiode, que a curva reparametrizada tem o mesmo traço da curva, curva parametrizada pelo comprimento de arco implica em vetor tangente unitário, análise de que a curva espacial é uma hélice verificado pela definição e proposição, curvatura da Espiral Logarítmica, curvatura máxima de uma curva e a parte geométrica do Teorema Local das curvas planas de que toda função diferenciável no plano tem curvatura e a curvatura é a própria função diferenciável.

REFERÊNCIAS

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial das curvas e superfícies**. SBM, 2012.
- [2] TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. Blucher, 2008.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Al-Biruni 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74

A lei da alavanca de Arquimedes 278

Álgebras de Jordan 102, 103

Algoritmos evolutivos 296

Aplicações 75, 76, 89, 94, 98, 134, 135, 141, 143, 153, 164, 184, 220, 226, 269, 296, 306, 307, 331, 339, 342

Aprendizagem 1, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 70, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 159, 160, 164, 166, 169, 175, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 193, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 230, 233, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 319, 320, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 337, 338, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 348, 349, 350, 352

B

BNCC 8, 91, 93, 99, 100, 134, 144, 154, 159, 162, 166, 168, 169, 214, 218, 222, 266, 269, 273, 274, 278, 279, 280

Brechó 195, 196, 197, 198, 199, 200

C

Combinatória 73, 296, 297, 351

Concepções docentes 165

Conhecimentos docentes 107

Consistência 239, 249, 252, 253, 254, 258, 259, 260, 342

Convergência 239, 249, 252, 253, 254, 256, 258, 260, 339

Convivência 18, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 238

Cotidiano 12, 18, 63, 91, 118, 153, 154, 164, 184, 196, 203, 204, 206, 208, 210, 221, 225, 236, 238, 264, 265, 270, 271, 306, 312, 313, 314, 316, 317, 326, 329, 346

Covid-19 42, 43, 52, 96, 141, 266

Currículo 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 56, 63, 95, 107, 110, 111, 122, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 142, 168, 176, 212, 213, 269, 308, 342

Currículo crítico-emancipatório 13, 14, 15, 17, 18

Curva 48, 49, 50, 51, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Curvatura 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89

D

Desarrollo analítico 42, 45, 51, 52

Dificuldades 8, 10, 108, 122, 163, 175, 181, 189, 190, 198, 222, 265, 268, 306, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 339, 348, 349, 351

Direitos de aprendizagem 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 348

Distribution, inference 25

E

Educação a distância 135, 141, 142, 275, 312

Educação infantil 3, 165, 166, 167, 173, 175, 176, 177, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 269, 346

Educação matemática 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 67, 90, 93, 100, 101, 107, 108, 109, 128, 129, 132, 133, 166, 176, 185, 193, 196, 200, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 238, 264, 275, 277, 294, 306, 310, 323, 324, 325, 330, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 355

Eixo das Abscissas 143, 144, 146, 147, 155, 157

Ensino 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 141, 142, 143, 144, 154, 159, 160, 162, 163, 164, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 314, 315, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 355

Ensino de matemática 1, 7, 10, 92, 95, 121, 124, 195, 201, 209, 217, 222, 224, 228, 229, 230, 231, 234, 278, 305, 308, 310, 319, 327, 328, 330, 336, 337, 343, 353

Ensino médio 8, 58, 98, 134, 142, 143, 154, 159, 162, 164, 178, 179, 180, 186, 192, 193, 195, 196, 197, 200, 210, 221, 222, 224, 226, 227, 263, 265, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 346, 349, 353

Estabilidade 239, 240, 242, 245, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 258, 259, 260

Estratégias didáticas 305

Expectation 25, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 40

F

Feedback automático 133, 134, 136, 141

Filosofia 74, 94, 112, 122, 200, 228, 229, 230, 231, 232, 236, 237, 238, 355

Formação de professores 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 21, 23, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 225, 268, 277, 310, 312, 315, 316, 343, 353, 354, 355

Formação docente 7, 13, 18, 22, 23, 115, 131, 132, 165, 175, 268, 277

Formação para o trabalho 312, 321

Função afim 90, 96, 97, 98, 99, 100

Funções polinomiais de 2º grau 143, 144, 152, 154, 158, 163

G

Geogebra 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 134, 293, 294, 345

Geogebra 3D 87, 88

Geometria 73, 75, 76, 81, 89, 91, 126, 133, 134, 135, 144, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194, 211, 212, 214, 215, 278, 279, 280, 285, 294, 340

Geometria plana 178, 179, 180, 183, 185, 192, 193, 278, 279

Graduações 102, 104, 331

H

Hélice 75, 76, 86, 87, 88, 89

História da matemática 65, 66, 67, 73, 74, 234

I

Identidades polinomiais 102, 103, 104, 105, 331, 332, 333, 334

J

Jogos 170, 201, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 343, 345, 350, 352

John Dewey 159, 228, 229, 236, 238

L

Leveque 250, 261

Lúdico 114, 132, 202, 203, 205, 208, 209, 213, 234, 236, 238, 272, 276, 278

M

Matemática 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 24, 42, 44, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 66, 67, 70, 73, 74, 75, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144, 153, 154, 158, 161, 164, 166, 169, 170, 172, 175, 176, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 197,

198, 200, 201, 202, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 249, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 285, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355

Matemática financeira 196, 197, 198, 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 277

Matemática Islâmica 65, 66

Metodologia 1, 6, 7, 10, 67, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 109, 113, 116, 121, 136, 141, 159, 160, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 193, 195, 198, 208, 231, 238, 271, 300, 305, 308, 325, 326, 328, 338, 340, 349, 351

Múltiplas tentativas 133, 136

N

Norma-2 239, 245, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260

Novas tecnologias 133, 272, 273, 275, 277, 312

O

O princípio de Cavalieri 278, 281, 283, 289

P

Planejamento 100, 126, 161, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 196, 210, 216, 217, 218, 222, 225, 238, 269, 279, 280, 337, 338, 339, 343, 344, 347, 348, 349, 350, 351

Plano cartesiano 143, 144, 153, 157, 340

Podcast 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277

Polígonos mágicos 296, 297, 300, 301, 303

Polígonos mágicos degenerados 296, 297

Políticas públicas 8, 9, 10, 18, 21, 315, 316

Pragmatismo 228, 229, 230

R

Resolução de problemas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 121, 174, 175, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 188, 192, 193, 224, 234, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 327, 328, 340, 350

S

Sampling 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39

Simulated annealing 296, 299, 300, 302, 303

Software geogebra 42, 52, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 90

Statistical investigation processes 25

Statistics education 25, 26, 28, 30, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41

T

Territórios virtuais 312, 313, 314


V

Variability 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

Variáveis 96, 102, 103, 135, 143, 144, 146, 152, 153, 185, 209, 216, 217, 218, 301, 303





Vértices da função 143

Visualización gráfica 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 @atenaeditora
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

2