Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2

Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Maiara Ferreira
	Mariane Aparecida Freitas
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão:	Os autores
Organizador:	Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0029-5
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal” demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***” nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 1

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Julio Robson Azevedo Gambarra

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206041

CAPÍTULO 2 13

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Alexandre Souza de Oliveira

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206042

CAPÍTULO 3 25

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

J. Michael Shaughnessy

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043

CAPÍTULO 4 42

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos
Angel Hasely Silva Mechato
Ronald Marlon Lozano Reátegui
Vitelio Asencios Tarazona
Manuel Ricardo Guerrero Ochoa
Iris Olivia Ruiz Yance
Weninger Pinedo Chambi

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206044

CAPÍTULO 5 55

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Henrique Kuller dos Santos
Joyce Jaquelinne Caetano

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206045

CAPÍTULO 6 65

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Francisco Neto Lima de Souza
Giselle Costa de Sousa

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206046

CAPÍTULO 7 75

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Rosangela Teixeira Guedes

Marcos Felipe de Oliveira

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206047

CAPÍTULO 8 90

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Joe Widney Lima da Silva

Elisangela Dias Brugnera

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206048

CAPÍTULO 9 102

IDENTIDADES POLINOMIAIS z_2-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2x2

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206049

CAPÍTULO 10 107

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Raquel Sousa Oliveira

Américo Junior Nunes da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060410

CAPÍTULO 11 133

R/EXAMS COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS

Luzia Pedroso de Oliveira

Denise Helena Lombardo Ferreira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060411

CAPÍTULO 12 143

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Caroline Saemi Lima Fujimoto

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060412

CAPÍTULO 13 165

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Amanda Souza Araújo

Simone Damm Zogaib

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060413

CAPÍTULO 14...178

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO

Cristiano Santana Freitas

Lucília Batista Dantas Pereira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060414

CAPÍTULO 15...195

UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Cassia Bordim Santi

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060415

CAPÍTULO 16...202

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA

Fernnanda Luciano Fernandes

Rosangela Minto Simões

Carla Corrêa Pacheco Gomes

Vanilza Maria Rangel de Moraes

Maristela Athayde Rohr

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060416

CAPÍTULO 17...216

EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Fernanda Gonzalez Anhõn

André Ribeiro da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060417

CAPÍTULO 18...228

RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Lênio Fernandes Levy

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060418

CAPÍTULO 19...239

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA

João Socorro Pinheiro Ferreira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060419

CAPÍTULO 20...263

O USO DE *PODCAST* NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Deyse Mara Nieto Lyrio

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes
Valdinei Cezar Cardoso
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060420

CAPÍTULO 21..278

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA
Maria Carla Ferreira Pereira Tavares
Rudimar Luiz Nós
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060421

CAPÍTULO 22..296

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS
Josimar da Silva Rocha
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060422

CAPÍTULO 23..305

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM
Daniela dos Santos Vargas
Victor Hugo de Oliveira Henrique
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060423

CAPÍTULO 24..312

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
Débora Gaspar Soares
Márcio Rufino Silva
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060424

CAPÍTULO 25..323

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL
Ana Paula dos Santos Stelle
Joyce Jaquelinne Caetano
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060425

CAPÍTULO 26..331

IDENTIDADES POLINOMIAIS *G*-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES nXn SOBRE UM CORPO FINITO
Mateus Eduardo Salomão
Evandro Riva
https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060426

CAPÍTULO 27..336

UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Francisco Odecio Sales

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060427

SOBRE O ORGANIZADOR 355

ÍNDICE REMISSIVO..356

CAPÍTULO 19

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA

Data de aceite: 01/03/2022

João Socorro Pinheiro Ferreira
Professor de Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP)
Doutorando do Programa de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
http://lattes.cnpq.br/2283642558933703
https://orcid.org/0000-0002-3711-3602

RESUMO: Este trabalho apresenta os resultados teóricos e práticos (aplicação) de como estabelecer a solução e a estabilidade de sistemas de EDO, por meio do Método de Diferença Finita (MDF), com base na fórmula centrada para a segunda derivada. Inicialmente são discutidas as condições de contorno, onde o valor da própria solução é especificado, são denominadas Condições de contorno de Dirichlet. Veremos que para estabelecer a convergência, devemos verificar se o sistema apresenta consistência e estabilidade, mas para isto ocorrer, o Erro de Truncamento Local (τ) e o Erro Global do espaço *h* devem ter acurácia (precisão) de segunda ordem no espaço, $O(h^2)$, tendo em vista que o problema aqui estudado está em uma única dimensão (direção).

PALAVRAS-CHAVE: Consistência, Estabilidade, Convergência, LeVeque, Norma-2.

STATIONARY STATES OF INITIAL VALUE PROBLEMS WITH FINITE DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT: This paper presents the theoretical and practical results (application) of how to establish the solution and stability of ODE systems, through the Finite Difference Method (FDM) based on the formula centered for the second derivative. Initially discussed the contour conditions, where the value of the solution itself is specified, are called Dirichlet Contour Conditions. We will see that to establish convergence, we must verify that the system has consistency and stability, but for this to occur, the Local Truncation Error and the Global Space (τ) Error *h* must have second-order accuracy (accuracy) in space, considering that the problem studied here is in a $O(h^2)$ single dimension (direction).

KEYWORDS: Consistency, Stability, Convergence, LeVeque, Norm-2.

1 I INTRODUÇÃO

A presente proposta traz em seu bojo a resolução de um Problema de Valor Inicial (PVI), de segunda ordem, u"(x)=f(x), no intervalo (0,1), com as condições de contorno u(0) = α e u(1) = *β*, , com a fonte de calor a função $f(x)=x^2$ que está sendo desenvolvida no lado direito da EDO. A malha é uniforme, somente no espaço, com largura h=1/(m+1), em que m é o número de pontos na malha a serem utilizados. Quanto maior for o valor de m, menor será a largura da malha. Este processo é denominado de refinamento da malha, com o intuito de diminuir o erro da aproximação U_j, para j=1,2,...,m.

O objetivo é apresentar aos estudantes quais os procedimentos necessários para solucionar o PVI, por meio do MDF e verificar a sua estabilidade.

Como se trata de uma solução numérica, é de suma importância a utilização de um aplicativo computacional e de uma planilha eletrônica, a fim de que se obtenha com mais rapidez os resultados procurados e neste caso, utilizamos o Wolfran Mathematica, *Octave* e o Excel.

A estrutura do trabalho está organizada em Fundamentação Teórica (revisão de literatura), Aplicação (um exemplo resolvido) e Considerações Finais. As discussões orbitam na verificação da estabilidade do sistema, utilizando-se diversas técnicas.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vamos primeiro considerar as equações diferenciais ordinárias (EDOs) que são colocadas em algum intervalo $\alpha<x<b$, junto com algumas condições de contorno em cada extremidade do intervalo. Os problemas considerados neste capítulo são geralmente problemas de estado estacionário em que a solução varia apenas com a coordenada espacial, mas não com o tempo.

Problemas de estado estacionário são frequentemente associados a algum problema dependente do tempo que descreve o comportamento dinâmico e o problema do valor fronteira ou contorno (PVC) de 2 pontos ou equação elíptica que resulta da consideração do caso especial em que a solução é estável no tempo, e, portanto, os termos derivados do tempo são iguais a zero, simplificando as equações.

2.1 A equação do calor

Como um exemplo específico, considere o fluxo de calor em uma haste feita de algum material condutor de calor, sujeito a alguma fonte de calor externa ao longo de seu comprimento e algumas condições de contorno em cada extremidade. Se assumirmos que as propriedades do material, a distribuição inicial da temperatura e a fonte variam apenas com x, a distância ao longo do comprimento, e não através de qualquer seção transversal, então esperamos que a distribuição da temperatura, a qualquer momento, varie apenas com x e podemos modelar isso com uma equação diferencial em uma dimensão espacial. Desde que a solução possa variar com o tempo, designaremos u(x,t) como a temperatura no ponto x no tempo t, onde $\alpha<x<b$ ao longo de algum comprimento finito da barra. A solução é então governada pela equação do calor

$$u_t(x,t) = \left(\kappa\,(x)u_x(x,t)\right)_x + \psi(x,t), \tag{2.1}$$

onde K(x) é o coeficiente de condução do calor, que pode variar com x, e $\psi(x,t)$ é a fonte de calor (ou dissipador, se $\psi < 0$).

A equação (2.1) é frequentemente chamada de equação de difusão, uma vez que modela processos de difusão de forma mais geral, e a difusão de calor é apenas um exemplo. Presume-se que a teoria básica desta equação seja familiar ao leitor. Veja os livros específicos de EDP, como Kevorkian (2009) para uma dedução e mais introdução. Em geral, é extremamente valioso entender de onde vem a equação que se está tentando resolver, desde uma boa compreensão da física (ou biologia, etc.) é geralmente essencial para a compreensão do desenvolvimento e comportamento dos métodos numéricos para resolver a equação.

2.2 Condições de contorno

Se o material for homogêneo, então $K(x)\equiv k$ é independente de x e a equação de calor (2.1) se reduz a

$$u_t(x,t) = \kappa u_{xx}(x,t) + \psi(x,t). \tag{2.2}$$

Junto com a equação, precisamos das condições iniciais,

$$u(x,0) = u^0(x),$$

e as condições de contorno, por exemplo, a temperatura pode ser especificada em cada extremidade,

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t). \tag{2.3}$$

Essas condições de contorno, onde o valor da própria solução é especificado, são chamadas Condições de Contorno de Dirichlet. Alternativamente, uma extremidade, ou ambas as extremidades, podem ser isoladas, no caso em que há fluxo de calor zero nessa extremidade e, portanto, u_x=0 nesse ponto. Esta condição de fronteira, que é uma condição na derivada de u e não no próprio u, é chamada de Condição de Contorno de Neumann. Para começar, vamos considerar o problema de Dirichlet para (2.2) com as condições de contorno (2.3).

2.3 O problema do estado estacionário

Em geral, esperamos que a distribuição da temperatura mude com o tempo. No entanto, se ψ(x,t), α(t) e β(t) são independentes do tempo, então podemos esperar que a solução eventualmente permaneça inalterada em momentos posteriores. Normalmente, haverá um tempo transitório inicial, como os dados iniciais $u^0(x)$ com uma abordagem u(x) (a menos que $u^0(x)\equiv u(x)$), mas se estivermos interessados apenas em calcular a solução de estado estacionário em si, então podemos definir u_t=0 em (2.2) e obter um EDO em x para resolver para u(x):

$$u(a) = a, \qquad u(b) = \beta \tag{2.5}$$

Observação: ter duas condições de contorno não garante necessariamente que haja existência de uma solução única para uma equação geral de segunda ordem.

O problema (2.4) e (2.5) são chamados de PVC de 2-pontos, uma vez que uma condição é especificada em cada um dos dois pontos finais do intervalo onde a solução é desejada. Se, em vez disso, dois valores de dados foram especificados no mesmo ponto, digamos, u(α)=α e u´(α)=σ, e queremos encontrar a solução para t≥α, então teríamos um Problema de Valor Inicial (PVI).

Uma abordagem para calcular uma solução numérica para um problema de estado estacionário é escolher alguns dados iniciais e avançar no tempo usando um método numérico para EDP (2.2) dependente do tempo. No entanto, esta normalmente não é uma maneira eficiente de calcular a solução de estado estacionário se esta for tudo o que queremos. Em vez disso, podemos discretizar e resolver o PVC de 2-pontos dado por (2.4) e (2.5) diretamente. Este é o primeiro PVC que estudaremos em detalhes, começando na próxima seção. Neste estudo, não consideraremos alguns outros PVCs, incluindo os não lineares que são equações mais desafiadoras.

2.4 Um método de diferença finita simples

Como um primeiro exemplo de um método de diferença finita para resolver uma equação diferencial, considere a EDO de segunda ordem discutida acima,

$$u''(x) = f(x) \qquad \text{para } 0 < x < 1, \tag{2.6}$$

com as seguintes condições de contorno

$$u(0) = \alpha \qquad \text{e} \qquad u(1) = \beta. \tag{2.7}$$

A função f(x) é especificada e desejamos determinar u(x) no intervalo0<x<1. Este problema é chamado de Problema de Valor de Contorno (PVC) de *2-pontos*, uma vez que as condições de contorno são dadas em dois pontos. Este problema é tão simples que podemos resolvê-lo explicitamente (integrar f(x) duas vezes e determinar as duas constantes de integração para que as condições de contorno sejam satisfeitas)[1], mas estudar métodos de diferenças finitas para esta equação simples irá revelar algumas das características essenciais de todas essas análises, particularmente a relação do erro global (E) com o erro de truncamento local (τ) e o uso de estabilidade ao fazer esta conexão.

Tentaremos calcular uma função de grade consistindo de valores U_0, U_1,..., U_m, U_{m+1} onde U_j é nossa aproximação para a solução u(x_j). Aqui x_j=jh, a distância entre os pontos da grade e h=1/(m+1) é a *largura da malha*. Das condições de fronteira sabemos que U_0=α e U_{m+1}=β, e assim temos m valores desconhecidos U_1,..., U_m para calcular. Se substituirmos u"(x) in (2.6) pela aproximação da diferença centrada

$$D^2U_j = \frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right),$$

então nós obtemos um conjunto de equações algébricas

1 Este PVI descrito entre parênteses encontra-se resolvido no Apêndice A deste artigo.

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m. \tag{2.8}$$

Observe que a primeira equação (j=1) envolve o valor $U_0=\alpha$ e a última equação (j=m) envolve o valor $U_{m+1}=\beta$.

A partir da Equação (2.8), como forma introdutória de compreensão do que estamos estudando, vamos escrever algumas equações algébricas, para j=1,2,...,m:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}(U_0 - 2U_1 + U_2) = f(x_1)\\
&\frac{1}{h^2}(U_1 - 2U_2 + U_3) = f(x_2)\\
&\frac{1}{h^2}(U_2 - 2U_3 + U_4) = f(x_3)\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&\frac{1}{h^2}(U_{m-2} - 2U_{m-1} + U_m) = f(x_{m-1})\\
&\frac{1}{h^2}(U_{m-1} - 2U_m + U_{m+1}) = f(x_m)
\end{aligned} \tag{2.8a}$$

Podemos organizar as equações (2.8a), sob a forma de um sistema linear com equações:

$$\begin{cases}
\frac{1}{h^2}U_0 - \frac{2}{h^2}U_1 + \frac{1}{h^2}U_2 + \cdots + 0 + 0 + 0 + 0 = f(x_1)\\
0 + \frac{1}{h^2}U_1 - \frac{2}{h^2}U_2 + \frac{1}{h^2}U_3 + \cdots + 0 + 0 + 0 = f(x_2)\\
0 + 0 + \frac{1}{h^2}U_2 - \frac{2}{h^2}U_3 + \frac{1}{h^2}U_4 + \cdots + 0 + 0 = f(x_3)\\
\vdots\\
0 + 0 + 0 + \cdots + \frac{1}{h^2}U_{m-2} - \frac{2}{h^2}U_{m-1} + \frac{1}{h^2}U_m + 0 = f(x_{m-1})\\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{h^2}U_{m-1} - \frac{2}{h^2}U_m + \frac{1}{h^2}U_{m+1} = f(x_m)
\end{cases} \tag{2.8b}$$

Para melhorar a compreensão e escrita matricial, vamos passar para o segundo membro do sistema acima os termos de U_0 e U_{m+1}:

$$\begin{cases}
-\frac{2}{h^2}U_1 + \frac{1}{h^2}U_2 + \cdots + 0 + 0 = f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2}\\
\frac{1}{h^2}U_1 - \frac{2}{h^2}U_2 + \frac{1}{h^2}U_3 + \cdots + 0 = f(x_2)\\
0 + \frac{1}{h^2}U_2 - \frac{2}{h^2}U_3 + \frac{1}{h^2}U_4 + \cdots + 0 = f(x_3)\\
\vdots\\
0 + 0 + \cdots + \frac{1}{h^2}U_{m-2} - \frac{2}{h^2}U_{m-1} + \frac{1}{h^2}U_m = f(x_{m-1})\\
0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{h^2}U_{m-1} - \frac{2}{h^2}U_m = f(x_m) - \frac{\beta}{h^2}
\end{cases} \tag{2.8c}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}
-2 & 1 & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & \\
 & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -2 & 1\\
 & & & & 1 & -2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1\\ U_2\\ U_3\\ \vdots\\ U_{m-1}\\ U_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2}\\ f(x_2)\\ f(x_3)\\ \vdots\\ f(x_{m-1})\\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}. \tag{2.8d}$$

Temos um sistema linear de equações para incógnitas, que podem ser escritas na forma

$$AU = F, \tag{2.9}$$

onde U é o vetor das incógnitas $U=[U_1, U_2,..., U_m]^T$

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}. \qquad (2.10)$$

Este sistema linear tridiagonal não é singular e pode ser facilmente resolvido para U de qualquer lado direito F.

Vamos fazer uma pequena simulação com m=3, para escrever a matriz A e o vetor F. O valor de h=0,25, as condições de fronteira α=0, β=1, e a fonte de calor $f(x)=x^2$:

$$A = \begin{bmatrix} -32 & 16 & 0 \\ 16 & -32 & 16 \\ 0 & 16 & -32 \end{bmatrix} \text{e} \qquad F = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.25 \\ -15.4375 \end{bmatrix}.$$

A solução de (2.9) é o vetor $U=A^{-1}F$. A inversa da matriz simétrica A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/64 & -1/32 & -1/64 \\ -1/32 & -1/16 & -1/32 \\ -1/64 & -1/32 & -3/64 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{bmatrix} 0.230469 \\ 0.464844 \\ 0.714844 \end{bmatrix}.$$

Quão bem U se aproxima da função u(x)? Nós sabemos que a diferença centrada a aproximação D^2, quando aplicada a uma função suave conhecida u(x), dá uma segunda ordem de aproximação precisa para u"(x). Mas aqui estamos fazendo algo mais complicado – sabemos os valores de u" em cada ponto e estamos calculando todo um conjunto de valores discretos U_1,..., U_m com a propriedade de que a aplicação de D^2 a esses valores discretos dá o valor desejado $f(x_j)$. Embora possamos esperar que este processo também forneça erros que são $O(h^2)$ (e na verdade, é verdade), isso certamente não é óbvio.

Primeiro, devemos esclarecer o que queremos dizer com o erro nos valores discretos U_1,..., U_m em relação à verdadeira solução u(x), que é uma função. Uma vez que Uj é suposta aproximação de $u(x_j)$, é natural usar os erros pontuais Uj-$u(x_j)$. Se denominarmos Û seja o vetor de valores verdadeiros

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{m-1}) \\ u(x_m) \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

então o vetor de erros global E é definido por

$E = U - \hat{U}$

contém os erros em cada ponto da grade.

Nosso objetivo agora é obter um limite para a magnitude desse vetor, mostrando que ele é $O(h^2)$ quando h→0. Para medir a magnitude deste vetor, devemos usar alguma norma, por exemplo, a norma máxima

$$\|E\|_\infty = \max_{1\le j\le m} |E_j| = \max_{1\le j\le m} \left|U_j - u(x_j)\right|.$$

Este é apenas o maior erro no intervalo. Se pudermos mostrar que $\|\underline{E}\|_\infty=O(h_2)$, então segue que cada erro pontual também deve ser O(h²).

Outras normas são frequentemente utilizadas para medir as funções da grade, seja porque são mais apropriadas para um determinado problema ou simplesmente porque são mais fáceis de vincular, uma vez que algumas técnicas matemáticas funcionam apenas com uma norma particular. Outras normas que frequentemente são usadas incluem a norma-1

$$\|E\|_1 = h\sum_{j=1}^{m} |E_j|$$

e a norma-2[2]

$$\|E\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{m} |E_j|^2\right)^{1/2}.$$

Observe o fator h que aparece nessas definições. Consulte o Apêndice A (LeVeque, 2007, p. 245) para uma análise mais completa discussão das normas da função de grade e como elas se relacionam com as normas vetoriais padrão.

Agora, vamos voltar ao problema de estimar o erro em nossa solução de diferença finita ao PVC obtido resolvendo o sistema (2.9). A técnica que usaremos é absolutamente básica à análise de métodos de diferenças finitas em geral. Envolve duas etapas principais. Nós primeiro calcularemos o *erro de truncamento local* (LTE) do método e em seguida, usaremos alguma forma de estabilidade para mostrar que o *erro global* pode ser limitado em termos de LTE.

O erro global simplesmente se refere ao erro *U*-Û que estamos tentando limitar. O LTE se refere ao erro em nossa aproximação de diferença finita de derivadas e, portanto, é algo que pode ser facilmente estimado usando as expansões da série de Taylor, como no Anexo A. A estabilidade é o ingrediente mágico que nos permite ir a partir desses facilmente calculados limites o erro local às estimativas que realmente queremos para o erro global. Vamos olhar para cada um deles por sua vez.

2.5 Erro Local de Truncamento (LTE)

O LTE é definido substituindo U_j pela solução verdadeira $u(x_j)$ na fórmula (2.8) de diferença finita. Em geral, a verdadeira solução $u(x_j)$ não vai satisfazer esta equação exatamente e a discrepância é o LTE, que denotamos por :

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - f(x_j) \tag{2.12}$$

para j=1,2,...,m. Claro, na prática, não sabemos qual é a verdadeira solução u(x) é, mas se assumirmos que é suave, então pelas expansões da série de Taylor (1.5a) (ver Anexo A), sabemos que

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(2u(x_j) + h^2u''(x_j) + \frac{2}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5) - 2u_j\right) - f(x_j)\,.$$

Cancelar os termos simétricos $2u(x_j)$ e $-2u_j$:

2 Também denominada de Norma Euclidiana.

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(1h^2u''(x_j) + \frac{1}{12}h^4u''''(x_j) + O(h^5)\right) - f(x_j)\ .$$

Dividir por h^2:

$$\tau_j = \left[u''(x_j) + \frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)\right] - f(x_j)\ . \qquad (2.13)$$

Usando nossa equação diferencial original (2.6), isso se torna

$$\tau_j = +\frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)\ .$$

Embora *u''''* em geral seja desconhecida, é alguma função fixa (constante) dependente de h, e assim $\tau_j=O(h^2)$ quando h→0.

Por exemplo, para a função u(x)=$\frac{x^4}{12}$+x, a sua quarta derivada é *u''''*(x)=2, que é uma função constante, então a sua função erro de truncamento é

$$\tau_j = \frac{1}{6}h^2 + O(h^2), \qquad (2.13a)$$

confirmando que o ETL tem acurácia de segunda ordem quando h→0.

Se definirmos ser o vetor τ com componentes τ_j, então

$$\tau = A\hat{U} - F,$$

onde o Û é o vetor da solução verdadeira (2.11), e assim

$$A\hat{U} = F + \tau. \qquad (2.14)$$

2.6 Erro global

Para obter uma relação entre o erro local e o erro global *E*=*U*-Û, nós subtraímos (2.14) de (2.9) que define U, obtendo

$$AE = -\tau. \qquad (2.15)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &A\hat{U} - AU = \tau \\ &A(\hat{U} - U) = \tau \\ &A(-(U - \hat{U})) = \tau \\ &A(-E) = \tau \\ &AE = -\tau\ . \end{aligned}$$

Esta é simplesmente a forma matricial do sistema de equações

$$\frac{1}{h^2}\left(E_{j-1} - 2E_j + E_{j+1}\right) = -\tau(x_j), \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m$$

com as condições de limite

$$E_0 = E_{m+1} = 0$$

uma vez que estamos usando os dados de contorno exatos $U_0=\alpha$ e $U_{m+1}=\beta$.

$$\frac{1}{h^2}(E_0 - 2E_1 + E_2) = -\tau(x_1), \qquad \text{mas } E_0 = 0,$$
$$\frac{1}{h^2}(-2E_1 + E_2) = -\tau(x_1)$$
$$\frac{1}{h^2}(E_1 - 2E_2 + E_3) = -\tau(x_2)$$
$$\frac{1}{h^2}(E_2 - 2E_3 + E_4) = -\tau(x_3), \qquad \text{mas } E_4 = 0,$$
$$\frac{1}{h^2}(E_2 - 2E_3) = -\tau(x_3)$$

Um exemplo para m=3:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau(x_1) \\ -\tau(x_2) \\ -\tau(x_3) \end{bmatrix},$$

para h=0.25 e $\tau(x_j)$=0.010417, para j=1,2,3:

$$16\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -32 & 16 & 0 \\ 16 & -32 & 16 \\ 0 & 16 & -32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.046875 & -0.031250 & -0.015625 \\ -0.031250 & -0.062500 & -0.031250 \\ -0.015625 & -0.031250 & -0.046875 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.046875 & -0.031250 & -0.015625 \\ -0.031250 & -0.062500 & -0.031250 \\ -0.015625 & -0.031250 & -0.046875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$

E o vetor erro global é:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015625 \\ 0.020833 \\ 0.015625 \end{bmatrix}.$$

Nós vemos que o erro global satisfaz um conjunto de equações de diferenças finitas que tem exatamente a mesma forma que nossas equações de diferença originais para U, exceto que o lado direito é dado por -τ em vez de F.

A partir disso, deve ficar claro por que esperamos que o erro global seja aproximadamente da mesma magnitude que o erro local. Podemos interpretar o sistema (2.15) como uma discretização da EDO

$$e''(x) = -\tau(x), \qquad \text{para } 0 < x < 1 \tag{2.16}$$

com as seguintes condições de contorno

$$e(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad e(1) = 0.$$

Desde que $\tau \approx \frac{1}{12} h_2 u''''(x)$, integrar duas vezes mostra que o erro global deve ser aproximadamente

$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2 u''(x) + \frac{1}{12}h^2\left(u''(0) + x\big(u''(1) - u''(0)\big)\right)$$

e, portanto, o erro deve ser $O(h^2)$.

Por exemplo, para $u(x)=\frac{x^4}{12}+x$ a segunda derivada é $u''(x)=x^2$. O valor de $u''(0)=0$ e u''(1)=1. Substituindo-os na equação acima, tem-se:

$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2(x^2) + \frac{1}{12}h^2\left(\left(0 + x(1-0)\right)\right)$$
$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2(x^2) + \frac{1}{12}h^2(x)$$
$$e(x) \approx \frac{1}{12}h^2(x - x^2). \tag{2.16a}$$

Se h→0, então e(x)→0.

Portanto, a Equação (2.16a) é a função do erro global para u(x)= $\frac{x^4}{12}$ +x.

2.7 Estabilidade

O argumento acima não é totalmente convincente porque estamos contando com a suposição que resolver as equações de diferença dá uma aproximação decente para a solução das equações diferenciais subjacentes (na verdade, o inverso agora, que a solução para o diferencial da equação (2.16) dá uma boa indicação da solução para as equações de diferença (2.15)). Uma vez que é exatamente essa suposição que estamos tentando provar, o raciocínio é bastante circular.

Em vez disso, vamos olhar diretamente para o sistema discreto (2.15), que iremos reescrever no formato

$$A^h E^h = -\tau^h. \tag{2.17}$$

onde o expoente indica que estamos em uma grade com espaçamento de malha h. Isso serve como um lembrete de que essas quantidades mudam à medida que refinamos a grade. Em particular, a matriz A^h é uma matriz m×m com h=$\frac{1}{m+1}$ de modo que sua dimensão cresce à medida que h → 0.

Seja $(A^h)^{-1}$ a inversa da matriz. Então a solução do sistema (2.17) é

$$E^h = -(A^h)^{-1}\tau^h$$

e cuja norma é

$$\begin{aligned} \|E^h\| &= \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \\ &\leq \|(A^h)^{-1}\|\|\tau^h\|. \end{aligned}$$

Sabemos que $\|\tau^h\|=O(h^2)$ e esperamos que o mesmo seja verdade para $\|E^h\|$. É claro o que precisamos para que isso seja verdade: precisamos que $\|(A^h)^{-1}\|$ seja limitado por alguma constante independente de h como h → 0:

$\|(A^h)^{-1}\|\leq C$, para todo h suficientemente pequeno.

Então teremos

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\| \tag{2.18}$$

e assim $\|E^h\|$ vai para zero pelo menos tão rápido quanto $\|\tau^h\|$. Isso motiva a seguinte definição de estabilidade para Problemas de Valor de Contorno (BVPs) lineares.

Definição 2.1. Suponha que um método de diferença finita para um PVC linear dê uma sequência de equações matriciais da forma $A^hU^h=F^h$, onde h é a largura da malha.

Dizemos que o método é estável se $(A^h)^{-1}$ existir para todo h suficientemente pequeno (para $h < h_0$, digamos) e se existe uma constante C, independente de h, de modo que

$$\|(A^h)^{-1}\| \leq C \qquad \text{para todo } h < h_0. \tag{2.19}$$

2.8 Consistência

Dizemos que um método é *consistente* com a equação diferencial e as condições de contorno se

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0. \tag{2.20}$$

Isso simplesmente diz que temos uma discretização sensata do problema. Normalmente $\|\tau^h\|=O(h^p)$ para algum inteiro p>0, e então o método é certamente consistente.

2.9 Convergência

Um método é considerado convergente se $\|E^h\|\to 0$ quando $h\to 0$. Combinando as ideias apresentadas acima chegamos à conclusão de que

$$consistência \ + estabilidade = \ convergência. \tag{2.21}$$

Isso é facilmente provado usando (2.19) e (2.20) para obter o limite

$$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

Embora isso tenha sido demonstrado apenas para o BVP linear, de fato, a maioria das análises de métodos de diferenças finitas para equações diferenciais segue essa mesma abordagem de duas camadas, e a afirmação (2.21) às vezes é chamada de teorema dos métodos de diferenças finitas. Na verdade, como nossa análise acima indica, isso geralmente pode ser reforçado para dizer que

$O(h^p)$ erro local de truncamento + estabilidade $\Rightarrow$ $O(h^p)$ erro global. (2.22)

A consistência (e a ordem de precisão) geralmente é a parte mais fácil de verificar. Verificando a estabilidade é a parte difícil. Mesmo para o BVP linear que acabamos de discutir, não está claro como verificar a condição (2.19), uma vez que essas matrizes se tornam maiores à medida que $h\to 0$. Para outros problemas, pode até não estar claro como definir estabilidade de maneira apropriada. Como veremos, existem muitas definições de "estabilidade" para diferentes tipos de problemas. O desafio de analisar métodos de diferenças finitas para novas classes de problemas, muitas vezes, é encontrar uma definição apropriada de "estabilidade" que permite provar a convergência usando (2.21) ao mesmo tempo que é suficientemente gerenciável para que possamos verificar se ela é válida para métodos específicos de diferenças finitas. Para EDPs não lineares, isso frequentemente deve ser ajustado para cada classe particular de problemas e conta com a teoria matemática existente e técnicas de análise para esta classe de problemas.

Quer se tenha ou não uma prova formal de convergência para um determinado método, é sempre boa prática para verificar se o programa de computador está apresentando comportamento convergente, na taxa esperado. O Apêndice A (LeVeque, 2007) contém uma discussão de como o erro nos resultados calculados pode ser estimado.

2.10 Estabilidade na norma-2

Voltando ao PVC no início do trabalho, vamos ver como podemos verificar a estabilidade e daí a precisão de segunda ordem. A técnica usada depende da norma que desejamos considerar. Aqui, vamos considerar a norma-2 e ver que podemos mostrar a estabilidade explicitamente ao calcular os valores próprios e os vetores próprios da matriz A.

Uma vez que a matriz A em (2.10) é simétrica, a norma-2 de A é igual ao seu raio espectral (ver Seção A.3.2 e Seção C.9, de LeVeque (2007)):

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1\le p\le m} |\lambda_p|.$$

(Observe que *p* se refere ao *p*-ésimo valor próprio da matriz. Os sobrescritos (expoentes) são usados para indexar os autovalores e autovetores, enquanto os subscritos (índice) no autovetor abaixo referem-se a componentes do vetor.)

A matriz A^{-1} também é simétrica e os autovalores de A^{-1} são simplesmente os inversos dos valores próprios de A, então

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_{1\le p\le m} \left|(\lambda_p)^{-1}\right| = \left(\min_{1\le p\le m} |\lambda_p|\right)^{-1}.$$

Então, tudo o que precisamos fazer é calcular os valores próprios de A e mostrar que eles são limitados longe de zero quando h → 0. Claro que temos um conjunto infinito de matrizes A^h a considerar, quando *h* varia, mas como a estrutura dessas matrizes é tão simples, podemos obter uma expressão geral para os autovalores de cada A^h. Para problemas mais complexos, podemos não ser capazes de fazer isso, mas vale a pena examinar em detalhes esse problema, porque geralmente se considera problemas de modelo para os quais tal análise é possível. Também precisaremos saber esses valores próprios para outros propósitos quando discutirmos as equações parabólicas no Capítulo 9 (LEVEQUE, 2007). (Consulte também a Seção C.7 para expressões mais gerais para os valores próprios de matrizes relacionadas.)

Vamos agora nos concentrar em um valor particular de h=1/(m+1) e eliminar o expoente (sobrescrito) h para simplificar a notação. Então os m autovalores de A são dados por

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m. \tag{2.23}$$

O autovetor u^p correspondente ao λ_p tem componentes u^p_j para j=1,2,...,m, através de

$$u_j^p = \sin(p\pi jh). \tag{2.24}$$

Isto pode ser verificado checando que $Au^p=\lambda_p u^p$. A *j-ésima* componente do vetor Au^p é

$$\begin{aligned}(Au^p)_j &= \frac{1}{h^2}\left(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p\right)\\ &= \frac{1}{h^2}(\sin(p\pi(j-1)h) - 2sen\,(p\pi jh) + sen\,(p\pi(j+1)h)\\ &= \frac{1}{h^2}(sen(p\,\pi jh)\cos(p\pi h) - 2sen(p\pi jh) + sen(p\pi jh)\cos(p\pi h))\\ &= \lambda_p u_j^p.\end{aligned}$$

Observe que para j = 1 e j = m, o *j-ésimo* componente de Au^p parece um pouco diferente (o u^p_{j-1} ou u^p_{j+1} acima o termo está faltando), mas a forma acima e as manipulações trigonométricas ainda são válidas, desde que definamos

$$u_0^p = u_{m+1}^p = 0$$

como é consistente com (2.24). De (2.23), vemos que o menor autovalor de A (em magnitude) é (nesta dedução, foi utilizada a expansão da série de Taylor para o cosseno, conforme está registrado no Apêndice B, deste artigo, na Equação B.1)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2}{h^2}(\cos(\pi h) - 1)\\ &= \frac{2}{h^2}\left(1 - \frac{1}{2}\pi^2h^2 + \frac{1}{24}\pi^4h^4 + O(h^6) - 1\right)\\ &= \frac{2}{h^2}\left(-\frac{1}{2}\pi^2h^2 + \frac{1}{24}\pi^4h^4 + O(h^6)\right)\\ &= \left(-\pi^2 + \frac{1}{12}\pi^4h^2 + O(h^2)\right)\\ &= -\pi^2 + O(h^2).\end{aligned}$$

Isso é claramente limitado a zero como h → 0, e assim vemos que o método é estável na norma-2. Além disso, obtemos um limite para o erro com isso:

$$\|E^h\|_2 \le \|(A^h)^{-1}\|_2\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{\pi^2}\|\tau^h\|_2.$$

Desde que $\tau_j^h \approx \frac{1}{12}h^2u''''(x_j)$, esperamos $\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{12}h^2\|u''''\|_2 = \frac{1}{12}h^2\|f''\|_2$. A norma-2 da função f'' aqui significa a norma da função de grade desta função avaliada nos pontos discretos , embora isso seja aproximadamente igual à norma do espaço de funções de f'' definida usando (A.14, de LeVeque (2007)).

Observe que o autovetor (2.24) está intimamente relacionado à autofunção do correspondente operador diferencial $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. As funções

$$u^p(x) = \sin(p\pi x), \qquad p = 1,2\cdots,$$

satisfazer a relação

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\sin(p\pi x)]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\{p\pi\cos(p\pi x)\} = p\pi(-sen(p\pi x)p\pi)\\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) = -p^2\pi^2sen(p\pi x)\\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) = \mu_p u^p(x)\end{aligned}$$

com autovalor $\mu_p = -p^2\pi^2$. Essas funções também satisfazem $u^p(0)=u^p(1)=0$, e portanto, são autofunções de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ em [0,1] com condições de contorno homogêneas.

A aproximação discreta para este operador dada pela matriz A tem apenas *m* autovalores em vez de um número infinito, e os autovetores correspondentes (2.24) são simplesmente os primeiros *m* autofunções de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avaliado nos pontos da grade. O autovalor λ_p não é exatamente o igual a u_p, mas pelo menos para pequenos valores de p é quase o mesmo, uma vez que a série de Taylor expansão do cosseno em (2.23) dá

$$\begin{aligned}\lambda_p &= \frac{2}{h^2}\left(-\frac{1}{2}p^2\pi^2h^2 + \frac{1}{24}p^4\pi^4h^4 + \cdots\right)\\ &= -p^2\pi^2 + O(h^2) \quad \text{quando } h \to 0 \text{ para } p \text{ fixo.}\end{aligned}$$

Essa relação será ilustrada posteriormente quando estudarmos métodos numéricos para a equação do calor (2.1).

Com o intuito de uma melhor compreensão do que foi estudado nesta Seção 2, vamos aplicar os conhecimentos adquiridos em um exemplo prático, como comumente é apresentado nos livros acadêmicos e na vida prática, quando o profissional está atuando no mercado de trabalho.

3 I APLICAÇÃO

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \tag{3.1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com *m*+2 pontos, com h=1/(m+1) e x_j=jh. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas[3]

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m. \tag{3.2}$$

com os valores $U_0=\alpha$ e $U_{m+1}=\beta$ prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3.3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o termo independente F $\in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas U $\in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3.3).

b) Defina os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para o método (3.3).

c) Sabendo que os autovalores da matriz A em (3.3) são dados por[4]

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m. \tag{3.4}$$

Mostre que o método (3.3) é estável e convergente na norma-2, determinando sua ordem.

3 Conforme estudado à Equação (2.8).
4 Consulte a Equação (2.23).

3.1 Solução do Item a)

A dedução da matriz A se encontra na Seção 2.4, com as devidas justificativas nas Equações (2.8a), (2.8b), (2.8c) e (2.8d), onde de forma construtiva é deduzido o sistema (2.9). A matriz A e o vetor F estão descritos na Equação (2.10).

Este sistema linear tridiagonal não é singular e pode ser facilmente resolvido para U de qualquer lado direito F.

3.2 Solução do Item b)

3.2.1 *Consistência*

Está definida na Seção 2.8. A norma do ETL elevado ao passo tende a zero quando tende a zero, conforme a Equação (2.20). Simbolicamente:

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

3.2.2 Estabilidade

A estabilidade está relacionada aos erros de truncamento local (τ) e o erro global (E=U-Û), devendo haver uma limitação do E por τ.

Na Definição 2.1, estabelece que a solução do sistema $A^hU^h=F^h$, deva satisfazer a Equação (2.19):

$$\|(A^h)^{-1}\| \leq C \qquad \text{para todo } h < h_0.$$

Então, a estabilidade está relacionada em limitar o erro global pelo erro de truncamento local:

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\|,$$

$$\|E^h\| \to 0 \qquad \text{quando } h \to 0.$$

3.2.3 Convergência

Ou seja,

$$\|E^h\| \to 0 \qquad \text{quando } h \to 0.$$

Consistência + estabilidade ⇒ Convergência.

A convergência está definida na Seção 2.9. Combinando (2.19) com (2.20):

$$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

3.3 Solução do Item c)

A Seção 2.10, contém as definições de estabilidade na norma-2.

Uma vez que a matriz A de (2.10) é simétrica, a norma-2 de A é igual ao seu raio espectral.

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \le p \le m} |\lambda_p|$$

e

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m.$$

Com isto, basta fazermos algumas simulações computacionais para determinar os autovalores e verificar aquele que tem o maior valor absoluto – que será o raio espectral e a norma-2 da matriz A.

3.4 Exemplo

Como forma de esclarecer alguns pontos importantes sobre consistência, estabilidade e convergência, vamos resolver um exemplo, com os seguintes dados: $ax = 0$, $bx = 0$, $u(0) = \alpha = 0, u(1) = \beta = 1$, m = 9 e $f(x) = x^2$, para a EDO de segunda ordem abaixo:

$$u''(x) = x^2. \tag{3.5}$$

A solução exata de (3.5) para as condições iniciais u(0)=0 e u'(0)=1 é a função

$$u(x) = \frac{1}{12}x^4 + x. \tag{3.6}$$

m	ax	bx	h	h^2	$1/h^2$	j	$x_j = jh$	α	β	$f(x) = x^2$	$F(x_j)$	$\hat{U} = u(x_j)$
										0.00		
						1	0.1			0.01	0.01	0,100008
						2	0.2			0.04	0.04	0,200133
						3	0.3			0.09	0.09	0,300675
						4	0.4			0.16	0.16	0,402133
9	0	1	0.1	0.01	100	5	0.5	0	1	0.25	0.25	0,505208
						6	0.6			0.36	0.36	0,610800
						7	0.7			0.49	0.49	0,720008
						8	0.8			0.64	0.64	0,834133
						9	0.9			0.81	−99.19	0,954675
										1.00		

Tabela 3. 1 – Valores numéricos de $f(x_i) = x^2$ e $u(x_j) = \frac{1}{12}x^4 + x, x \in (0,1)$

Fonte: elaborada pelo autor.

Com os dados da Tabela 3.1, vamos escrever o seguinte sistema, com base em (2.8d):

$$\begin{bmatrix} -200 & 100 & & & & & & & \\ 100 & -200 & 100 & & & & & & \\ & 100 & -200 & 100 & & & & & \\ & & 100 & -200 & 100 & & & & \\ & & & 100 & -200 & 100 & & & \\ & & & & 100 & -200 & 100 & & \\ & & & & & 100 & -200 & 100 & \\ & & & & & & 100 & -200 & 100 \\ & & & & & & & 100 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \\ 0.36 \\ 0.49 \\ 0.64 \\ -99.19 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a matriz simétrica seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} -200 & 100 & & & & & & & \\ 100 & -200 & 100 & & & & & & \\ & 100 & -200 & 100 & & & & & \\ & & 100 & -200 & 100 & & & & \\ & & & 100 & -200 & 100 & & & \\ & & & & 100 & -200 & 100 & & \\ & & & & & 100 & -200 & 100 & \\ & & & & & & 100 & -200 & 100 \\ & & & & & & & 100 & -200 \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

As normas da matriz A, são:

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 400$, neste caso, como *j* fixo e *i* variando, temos que a norma-1, é a soma dos elementos absolutos por coluna (soma máxima da coluna).

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = 400$, agora, como *i* fixo e *j* variando, temos que a norma-2, é a soma dos elementos absolutos por linha

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(A^T A)\}} = 390.21$, que é o raio espectral da matriz A.

A inversa da matriz A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.009 & -0.008 & -0.007 & -0.006 & -0.005 & -0.004 & -0.003 & -0.002 & -0.001 \\ -0.008 & -0.016 & -0.014 & -0.012 & -0.010 & -0.008 & -0.006 & -0.004 & -0.002 \\ -0.007 & -0.014 & -0.021 & -0.018 & -0.015 & -0.012 & -0.009 & -0.006 & -0.003 \\ -0.006 & -0.012 & -0.018 & -0.024 & -0.020 & -0.016 & -0.012 & -0.008 & -0.004 \\ -0.005 & -0.010 & -0.015 & -0.020 & -0.025 & -0.020 & -0.015 & -0.010 & -0.005 \\ -0.004 & -0.008 & -0.012 & -0.016 & -0.020 & -0.024 & -0.018 & -0.012 & -0.006 \\ -0.003 & -0.006 & -0.009 & -0.012 & -0.015 & -0.018 & -0.021 & -0.014 & -0.007 \\ -0.002 & -0.004 & -0.006 & -0.008 & -0.010 & -0.012 & -0.014 & -0.016 & -0.008 \\ -0.001 & -0.002 & -0.003 & -0.004 & -0.005 & -0.006 & -0.007 & -0.008 & -0.009 \end{bmatrix}.$$

As normas são:

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \frac{1}{8}, \qquad \text{(soma máxima da coluna).}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \frac{1}{8}, \qquad \text{(soma máxima da linha)}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(A^{-T} A^{-1})\}} = 0.1022$$

O número de condicionamento[5] da matriz A é determinado por:

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

Neste exemplo:

5 O condicionamento de um sistema linear é um conceito relacionado à forma como os erros se propagam dos dados de entrada para os dados de saída. No contexto de um sistema linear *AU=F*, temos que a solução *U* depende dos dados de entrada *F*..

$$\kappa_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 = 400 \times \frac{1}{8} = 50.$$

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 390.21 \times 0.1022 = 39.863.$$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty = 400 \times \frac{1}{8} = 50.$$

O menor número de condicionamento é o da norma-2.

O número da condição desempenha um papel na taxa de convergência de muitos métodos iterativos para resolver um sistema linear com a matriz A. Dentre os três calculados, o menor é o da norma-2.

O vetor das incógnitas é determinado por $U=A^{-1}F$:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \\ 0.36 \\ 0.49 \\ 0.64 \\ -99.19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.091750 \\ 0.183600 \\ 0.275850 \\ 0.369000 \\ 0.463750 \\ 0.561000 \\ 0.661850 \\ 0.767600 \\ 0.879750 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O erro global é determinado por: $E=U$-Û. Com os dados da Tabela 3.1 e do vetor (3.8), temos:

$$E = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ u(x_4) \\ u(x_5) \\ u(x_6) \\ u(x_7) \\ u(x_8) \\ u(x_9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}008258 \\ -0{,}016533 \\ -0{,}024825 \\ -0{,}033133 \\ -0{,}041458 \\ -0{,}049800 \\ -0{,}058158 \\ -0{,}066533 \\ -0{,}074925 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E^h = \begin{bmatrix} 0.5887 + 0.1913i \\ 0.6310 + 0.2050i \\ 0.6572 + 0.2135i \\ 0.6764 + 0.2198i \\ 0.6918 + 0.2248i \\ 0.7046 + 0.2289i \\ 0.7156 + 0.2325i \\ 0.7253 + 0.2357i \\ 0.7340 + 0.2385i \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A norma-máxima[6] do erro global é:

$$\|E\|_\infty = \max_{1\le j\le 9}|E_9| = 0{,}074925.$$

Este é apenas o maior erro no intervalo. Se pudermos mostrar que $\|E\|_\infty=O(h^2)$, então segue que cada erro pontual também deve ser $O(h^2)$.

$\|E\|_\infty = 0{,}074925 = 7.5 \times 10^{-2}$ e $h^2 = 10^{-2}$. Dividindo-se a norma-máx por h^2, temos que, $\|E\|_\infty=7.5h^2$, cuja precisão é $O(h^2)$.

A norma-1[7] do erro global é determinada por:

$$\|E\|_1 = h\sum_{j=1}^{9}|E_j| = 0.1(0{,}373625) = 0{,}0373625 = 3.73 \times 10^{-2} = 3.74h^2.$$

A norma-2:

$$\|E\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{9}|E_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{0.1\sum_{j=1}^{9}|E_j|^2} = \sqrt{0.1(1{,}97 \times 10^{-2})} = 0{,}0444$$

6 No Mathematica, o comando é o seguinte: , porém como a letra E está reservada à constante de Euler, então tivemos que acrescentar o G, e o comando passou a ser: Norm[EG, Infinity].

7 No MATLAB, o comando é: h*norm(E,1); no Mathematica, o comando é h*Norm[EG, 1].

=4.44x10-2=4.44h^2, logo a precisão da norma-2 é de segunda ordem, $O(h^2)$.

O erro global para cada x_j é determinado pela função (2.16a), que é uma função quadrática com máximo global em x_j=0.5, sendo assim, existem dois intervalos: um de crescimento e outro de decrescimento, fazendo com que e(x)→0 quando h→0, somente no segundo intervalo.

As normas 1 e 2, do erro global é calculada a partir das informações da Tabela 3.2:

j	E^h	$\|E^h\|$	$h\|E^h\|$	$\|E^h\|^2$	$h\|E^h\|^2$
1	$0.5887 + 0.1913i$	0.6190	0,0619	0,3832	0,0383
2	$0.6310 + 0.2050i$	0.6635	0,0663	0,4402	0,0440
3	$0.6572 + 0.2135i$	0.6910	0,0691	0,4775	0,0478
4	$0.6764 + 0.2198i$	0.7112	0,0711	0,5059	0,0506
5	$0.6918 + 0.2248i$	0.7274	0,0727	0,5291	0,0529
6	$0.7046 + 0.2289i$	0.7408	0,0741	0,5488	0,0549
7	$0.7156 + 0.2325i$	0.7524	0,0752	0,5661	0,0566
8	$0.7253 + 0.2357i$	0.7626	0,0763	0,5816	0,0582
9	$0.7340 + 0.2385i$	0.7718	0,0772	0,5956	0,0596
Total	–	–	**0.6440**	–	**0,4628**

Tabela 3. 2 – Cálculo da norma-2 do erro global, para h=0.1.

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\|E^h\|_1 = h\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^h\right| = 0.6440. \tag{3.9a}$$

$$\|E^h\|_2 = \left(0.1\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^h\right|^2\right)^{1/2} = \sqrt{0.1\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^{0.1}\right|^2} = \sqrt{0{,}4628} = 0.6803. \tag{3.9b}$$

O ETL é determinado pela Equação (2.13). A segunda derivada de (3.6) é:

$$u''(x) = x^2 \tag{3.10}$$

e a quarta derivada é:

$$u''''(x) = 2. \tag{3.11}$$

Substituir (3.9) e (3.10) na Equação (2.13), temos:

$$\tau_j = \left[x_j^2 + \frac{1}{12}h^2(2) + O(h^4)\right] - x_j^2 \ .$$

Cancelar x_j^2 com - x_j^2:

$$\tau_j = \frac{1}{6}h^2 + O(h^4) \ . \tag{3.11a}$$

$$\tau_j = +\frac{1}{12}(0.01)(2) + O(h^4) = 0{,}00167 = 1.67 \times 10^{-3} = 0.167h^2$$

e a precisão $O(h^2)$ e assim $\tau_j = O(h^2)$ quando h → 0.

O vetor erro de truncamento local τ é:

$$\tau = A\hat{U} - F. \tag{3.12}$$

Assim,

$$\tau = \begin{bmatrix} 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.6 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ 1.7 \times 10^{-3} \\ -8.3317 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau^h = \begin{bmatrix} 0.5285 \\ 0.5285 \\ 0.5253 \\ 0.5285 \\ 0.5285 \\ 0.6229 \\ 0.5285 \\ 0.6236 \\ 1.1757 + 0.3820i \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

A estabilidade é determinada pela Equação (2.17), cuja solução é

$$E = -(A^h)^{-1}\tau^h. \tag{3.14}$$

Devemos observar que se calcularmos a norma do erro global (3.14), nós vamos ter a considerar a condição (2.18).

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\|$$

Com o auxílio do Mathematica[8], nós obtemos a norma de E^h e a de τ^h, que são respectivamente, 6.43974 e 5.45579. Dividir a primeira pela segunda, temos o valor de *C*:

$$C = 1.18035. \tag{3.14a}$$

Sendo assim, a norma de $-(A^h)^{-1}$ deverá ser menor ou igual a C, para que o sistema seja estável.

A norma de $-(A^h)^{-1}$, calculada com o auxílio do Octave[9] é:

$$\|-(A^h)^{-1}\| = 0.7960, \tag{3.15}$$

que é menor de que *C*. Portanto, o sistema da EDO (3.5) é estável.

A consistência é verificada tomando como parâmetro o erro de truncamento local (τ) em relação a variação de h, tendendo a zero. Por isso, vamos fazer algumas simulações com h=o.1,0.05,0.025,0.0125 e 0.0625 para verificar o que acontece. Não devemos esquecer que os resultados devem obedecer a Equação (2.20):

$$\|\tau^h\| \to 0 \text{ quando } h \to 0.$$

A quarta derivada da função (3.6) é função constante:

$$u''''(x) = 2. \tag{3.16}$$

Na Tabela 3.2, vamos verificar se a solução é *consistente*, utilizando a Equação (2.20):

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

Utilizando-se da norma-2, temos a relação da quarta derivada de ser numericamente igual a segunda derivada de f, por isso, vamos utilizar a expressão a seguir para verificar a convergência da solução do PVI.

8 Respectivamente, Norm[EG^h, 1] e Norm[ETL^h, 1].
9 norm(-inv(Ah))

$$\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{12}h^2\|u''''\|_2 = \frac{1}{12}h^2\|f''\|_2. \qquad (3.17)$$

A norma-2 para o vetor τ^h_j é medida por:

$$\|\tau\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{m}|\tau_j|^2\right)^{1/2}.$$

h	$\tau_j^h = +\frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)$	$\frac{\tau_j}{h^2} < C$	$h(\tau_j^h)^2$
0.1	$\tau_j^{0.1} = +\frac{1}{12}(0.1)^2(2) = 1.67 \times 10^{-3}$	$0.167h^2$	2.78×10^{-7}
0.05	$\tau_j^{0.05} = 4.17 \times 10^{-3}$	$0.167h^2$	8,68E-09
0.025	$\tau_j^{0.025}$ =1,04E-04	$0.167h^2$	2,71E-10
0.0125	$\tau_j^{0.0125}$ =2,60E-06	$0.167h^2$	8,45E-14
0.0625	6,50E-06	$0.167h^2$	2,64E-13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$h \to 0$	$\tau \to 0$	$\tau_j = O(h^2)$	$\sum_{j=1}^{9} h\left|\tau_j^h\right|^2 = 2,87 \times 10^{-7}$

Tabela 3. 3 – Estudo da consistência do erro de truncamento local em função de h.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como a quarta derivada de u(x) é constante, então o τ^h_j é o mesmo para j=1,...,9. A norma-2, é a raiz quadra do somatório da última coluna da Tabela 3.3:

$$\|\tau^h\|_2 = (2{,}87 \times 10^{-7})^{1/2} = 5.4 \times 10^{-4}. \qquad (3.17a)$$

$O(h^p)$ erro de truncamento local + estabilidade $\Rightarrow$ $O(h^p)$ erro global.

$$O(h^2) + O(h^2) \Longrightarrow O(h^2)$$
$$0.167h^2 + 3{,}56O(h^2) \Longrightarrow 3{,}73O(h^2)$$

Como a matriz A, Equação (3.7), é simétrica, podemos analisar a estabilidade na norma-2, calculando os autovalores com a Equação (2.23) para p=1,2,...,9 e em seguida verificando se atende a definição:

p	$\lambda_p \approx -p^2\pi^2 + O(h^2) = \mu_p$
1	$\lambda_1 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.1\pi) - 1] = -9{,}7887 \approx -\pi^2$
2	$\lambda_2 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.2\pi) - 1] = -38{,}1965 \approx -4\pi^2$
3	$\lambda_3 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.3\pi) - 1] = -82{,}4428 \approx -9\pi^2$
4	$\lambda_4 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.4\pi) - 1] = -138{,}1964 \approx -16\pi^2$
5	$\lambda_5 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.5\pi) - 1] = -199{,}9997 \approx -25\pi^2$
6	$\lambda_6 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.6\pi) - 1] = -261{,}8031 \approx -36\pi^2$
7	$\lambda_7 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.7\pi) - 1] = -317{,}5567 \approx -49\pi^2$
8	$\lambda_8 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.8\pi) - 1] = -361{,}8031 \approx -64\pi^2$

9	$\lambda_9 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.9\pi) - 1] = -390{,}2112 \approx -81\pi^2$

Tabela 3. 4 – Autovalores e autovetores para estabilidade na Norma-2.

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com as informações da Tabela 3.3, o raio espectral da matriz A, tomando como base a Equação (3.7), é o seguinte:

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \le p \le 9} |\lambda_9| = 390.2112.$$

Então, tudo o que precisamos fazer é calcular os valores próprios de A e mostrar que eles são limitados longe de zero quando h → 0. Portanto, de acordo com os valores da Tabela 3.3, a medida que h → 0, vimos que ρ(A) cresce até limitar-se a 390.2212 e com isto, o sistema é estável nesta região circular.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você percebeu, iniciamos estudando sobre PVC de 2-pontos, com as condições de fronteira de Dirichlet, porém como forma de verificar ou estudar qualitativamente a estabilidade de um sistema, consideramos um PVI, em que as condições iniciais só ocorrem em x_0=0. Ambos, requerem grande conhecimento sobre normas de vetores e de matrizes, para se estabelecer se o erro global (E) é limitado pelo erro de truncamento local (τ).

Com os fundamentos apresentados na Seção 2, pudemos estudar a consistência ($\|\tau^h\|$→0 quando h→0), a estabilidade ($\|E^h\|$→0quando h→0 e a convergência da solução de um PVI por meio do MDF, onde constatamos que a estabilidade está relacionada com os erros Global e Truncamento Local.

De uma maneira geral, precisamos mostrar que erro global é limitado em termos do erro local, por uma constante *C*, tal que $\frac{\|E^h\|}{\|\tau^h\|} \le C$, ou seja, a norma do $\|E^h\| \le C\|\tau^h\|$.

No Exemplo da Subseção 3.4, utilizamos m=9 e realizamos um estudo completo com base no referencial teórico, e calculamos o condicionamento da matriz A, que é igual a 50. O ideal seria refinar a malha aumentando o valor de m, na esperança de que daria um bom condicionamento para a matriz A e os resultados num todo seriam satisfatórios.

Mas não é só o condicionamento da matriz A que determina a estabilidade, mas um conjunto de normas, medidas ou distância dentre um conjunto de valores ou elementos de um vetor erro. Como vimos, na subseção 3.4, o PVI é estável para m=9, por atender as definições de estabilidade, consistência e consequentemente convergência, conforme os resultados obtidos nas Equações (2.16a), (2.18), (3.11a), (3.15), (2.19) e (2.20)

Neste caso, deixamos como proposta implementar um algoritmo para um m>0, positivo e fazer simulações computacionais aumentando os valores de m e consequentemente se h→0.

REFERÊNCIAS

LEVEQUE, Randal J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: SIAM, 2007. Disponível em: http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/mlss/documentos/LeVequeRJ.pdf. Acesso em: 9 ago. 2021.

KEVORKIAN, J. **Partial Differential Equations**. Pacific Corove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DO PVI , $u''(x)=x^2$, $u(0)=0$ e $u'(0)=1$

Para resolver este PVI vamos integrar duas vezes a EDO:

$$u''(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u'[u'(x) = x^2] \quad \Rightarrow \quad u'[u(x) = \frac{x^3}{3} + c_1] \quad \Rightarrow$$
$$u(x) = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2. \tag{A.1}$$

Para determiner as constantes c_1 e c_2, vamos utilizer as condições iniciais.

$$u(0) = 0 + 0 + c_2 = 0, \text{ logo } c_2 = 0.$$

A primeira derivada de (A.1), é:

$$u'(x) = \frac{x^3}{3} + c_1. \tag{A.2}$$

A primeira derivada em $x_0=0$ é:

$$u'(0) = 0 + c_1 = 1, \text{ logo } c_1 = 1.$$

Portanto, a solução da EDO para as condições iniciais dadas é:

$$u(x) = \frac{x^4}{12} + x. \tag{A.3}$$

APÊNDICE B – EXPANSÃO DA SÉRIE DE TAYLOR PARA O COSSENO

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Para $x=\pi h$, temos:

$$\cos(x) = \frac{(-1)^0}{(0)!}(\pi h)^0 + \frac{(-1)^1}{(2)!}(\pi h)^2 + \frac{(-1)^2}{(4)!}(\pi h)^4 + O(h^6).$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + \frac{1}{24}\pi^4 h^4 + O(h^6). \tag{B.1}$$

ANEXO A – EXPANSÃO DA SÉRIE DE TAYLOR

$$u(\bar{x}+h) = u(\bar{x}) + hu(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \tag{1.5a}$$

$$u(\bar{x}-h) = u(\bar{x}) - hu(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \tag{1.5b}$$

$$u(x_j-h) = u(x_j) - hu(x_j) + \frac{1}{2}h^2u''(x_j) - \frac{1}{6}h^3u'''(x_j) + \frac{1}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

$$u(x_j+h) = u(x_j) + hu(x_j) + \frac{1}{2}h^2u''(x_j) + \frac{1}{6}h^3u'''(x_j) + \frac{1}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

$$u(x_j-h) + u(x_j+h) = 2u(x_j) + 1h^2u''(x_j) + \frac{2}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

Expansão de (1.5a) para h=0.1:

$$u(\bar{x}+0.1) = u(\bar{x}) + 0.1u(\bar{x}) + \frac{1}{2}(0.1)^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(0.1)^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \tag{1.5a}$$

$$u(\bar{x}+0.1) = u(\bar{x}) + 0.1u(\bar{x}) + \frac{1}{2}(0.01)u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(0.001)u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$u(\bar{x}+10^{-1}) = u(\bar{x}) + 10^{-1}u(\bar{x}) + 0.005u''(\bar{x}) + 0.0017u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$u(\bar{x}+10^{-1}) = u(\bar{x}) + 10^{-1}u(\bar{x}) + 5\times10^{-3}u''(\bar{x}) + 1.7\times10^{-3}u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

ÍNDICE REMISSIVO

A

Al-Biruni 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74

A lei da alavanca de Arquimedes 278

Álgebras de Jordan 102, 103

Algoritmos evolutivos 296

Aplicações 75, 76, 89, 94, 98, 134, 135, 141, 143, 153, 164, 184, 220, 226, 269, 296, 306, 307, 331, 339, 342

Aprendizagem 1, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 70, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 159, 160, 164, 166, 169, 175, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 193, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 230, 233, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 319, 320, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 337, 338, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 348, 349, 350, 352

B

BNCC 8, 91, 93, 99, 100, 134, 144, 154, 159, 162, 166, 168, 169, 214, 218, 222, 266, 269, 273, 274, 278, 279, 280

Brechó 195, 196, 197, 198, 199, 200

C

Combinatória 73, 296, 297, 351

Concepções docentes 165

Conhecimentos docentes 107

Consistência 239, 249, 252, 253, 254, 258, 259, 260, 342

Convergência 239, 249, 252, 253, 254, 256, 258, 260, 339

Convivência 18, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 238

Cotidiano 12, 18, 63, 91, 118, 153, 154, 164, 184, 196, 203, 204, 206, 208, 210, 221, 225, 236, 238, 264, 265, 270, 271, 306, 312, 313, 314, 316, 317, 326, 329, 346

Covid-19 42, 43, 52, 96, 141, 266

Currículo 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 56, 63, 95, 107, 110, 111, 122, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 142, 168, 176, 212, 213, 269, 308, 342

Currículo crítico-emancipatório 13, 14, 15, 17, 18

Curva 48, 49, 50, 51, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Curvatura 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89

D

Desarrollo analítico 42, 45, 51, 52

Dificuldades 8, 10, 108, 122, 163, 175, 181, 189, 190, 198, 222, 265, 268, 306, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 339, 348, 349, 351

Direitos de aprendizagem 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 348

Distribution, inference 25

E

Educação a distância 135, 141, 142, 275, 312

Educação infantil 3, 165, 166, 167, 173, 175, 176, 177, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 269, 346

Educação matemática 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 67, 90, 93, 100, 101, 107, 108, 109, 128, 129, 132, 133, 166, 176, 185, 193, 196, 200, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 238, 264, 275, 277, 294, 306, 310, 323, 324, 325, 330, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 355

Eixo das Abscissas 143, 144, 146, 147, 155, 157

Ensino 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 141, 142, 143, 144, 154, 159, 160, 162, 163, 164, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 314, 315, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 355

Ensino de matemática 1, 7, 10, 92, 95, 121, 124, 195, 201, 209, 217, 222, 224, 228, 229, 230, 231, 234, 278, 305, 308, 310, 319, 327, 328, 330, 336, 337, 343, 353

Ensino médio 8, 58, 98, 134, 142, 143, 154, 159, 162, 164, 178, 179, 180, 186, 192, 193, 195, 196, 197, 200, 210, 221, 222, 224, 226, 227, 263, 265, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 346, 349, 353

Estabilidade 239, 240, 242, 245, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 258, 259, 260

Estratégias didáticas 305

Expectation 25, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 40

F

Feedback automático 133, 134, 136, 141

Filosofia 74, 94, 112, 122, 200, 228, 229, 230, 231, 232, 236, 237, 238, 355

Formação de professores 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 21, 23, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 225, 268, 277, 310, 312, 315, 316, 343, 353, 354, 355

Formação docente 7, 13, 18, 22, 23, 115, 131, 132, 165, 175, 268, 277

Formação para o trabalho 312, 321

Função afim 90, 96, 97, 98, 99, 100

Funções polinomiais de 2º grau 143, 144, 152, 154, 158, 163

G

Geogebra 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 134, 293, 294, 345

Geogebra 3D 87, 88

Geometria 73, 75, 76, 81, 89, 91, 126, 133, 134, 135, 144, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194, 211, 212, 214, 215, 278, 279, 280, 285, 294, 340

Geometria plana 178, 179, 180, 183, 185, 192, 193, 278, 279

Graduações 102, 104, 331

H

Hélice 75, 76, 86, 87, 88, 89

História da matemática 65, 66, 67, 73, 74, 234

I

Identidades polinomiais 102, 103, 104, 105, 331, 332, 333, 334

J

Jogos 170, 201, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 343, 345, 350, 352

John Dewey 159, 228, 229, 236, 238

L

Leveque 250, 261

Lúdico 114, 132, 202, 203, 205, 208, 209, 213, 234, 236, 238, 272, 276, 278

M

Matemática 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 24, 42, 44, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 66, 67, 70, 73, 74, 75, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144, 153, 154, 158, 161, 164, 166, 169, 170, 172, 175, 176, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 249, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 285, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355

Matemática financeira 196, 197, 198, 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 277

Matemática Islâmica 65, 66

Metodologia 1, 6, 7, 10, 67, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 109, 113, 116, 121, 136, 141, 159, 160, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 193, 195, 198, 208, 231, 238, 271, 300, 305, 308, 325, 326, 328, 338, 340, 349, 351

Múltiplas tentativas 133, 136

N

Norma-2 239, 245, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260

Novas tecnologias 133, 272, 273, 275, 277, 312

O

O princípio de Cavalieri 278, 281, 283, 289

P

Planejamento 100, 126, 161, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 196, 210, 216, 217, 218, 222, 225, 238, 269, 279, 280, 337, 338, 339, 343, 344, 347, 348, 349, 350, 351

Plano cartesiano 143, 144, 153, 157, 340

Podcast 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277

Polígonos mágicos 296, 297, 300, 301, 303

Polígonos mágicos degenerados 296, 297

Políticas públicas 8, 9, 10, 18, 21, 315, 316

Pragmatismo 228, 229, 230

R

Resolução de problemas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 121, 174, 175, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 188, 192, 193, 224, 234, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 327, 328, 340, 350

S

Sampling 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39

Simulated annealing 296, 299, 300, 302, 303

Software geogebra 42, 52, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 90

Statistical investigation processes 25

Statistics education 25, 26, 28, 30, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41

T

Territórios virtuais 312, 313, 314

V

Variability 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

Variáveis 96, 102, 103, 135, 143, 144, 146, 152, 153, 185, 209, 216, 217, 218, 301, 303

Vértices da função 143

Visualización gráfica 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022