Atena Editora

Ano 2022

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena
Editora
Ano 2022

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Cutting-edge research in mathematics and its applications

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C991 Cutting-edge research in mathematics and its applications / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-957-5
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.575221502

1. Mathematics. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

INTRODUCTION

The new coronavirus pandemic took everyone by surprise. Suddenly, at the beginning of 2020, we had to change our life and professional routines and adapt to a “new normal”, where social distancing was put as the main measure to stop the spread of the disease. Several economic segments of society, in the hands of what was put by the health authorities, needed to rethink their activities.

The social, political and cultural context, as highlighted by Silva, Nery and Nogueira (2020), has demanded very particular issues for society. This, in a way, has led managers to look at training spaces with different eyes. Society has changed, in this scenario of inclusion, technology and a “new normal”; with this, it is important to pay attention to training spaces, in a dialogical movement of (re)thinking the different ways of doing science. Research, in the meantime, has become an important place to broaden the view on the numerous problems, especially with regard to mathematical knowledge (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

In this complex and plural society that Mathematics subsidizes the bases of reasoning and the tools to work in other areas; it is perceived as part of a movement of human and historical construction and it is important to help in the understanding of the different situations that surround us and the countless problems that are unleashed daily. It is important to reflect on all of this and understand how mathematicians and the humanistic movement made possible by their work happen.

Teaching Mathematics goes far beyond applying formulas and rules. There is a dynamic in its construction that needs to be noticed. It is important, in the teaching and learning processes of Mathematics, to prioritize and not lose sight of the pleasure of discovery, something peculiar and important in the process of mathematizing. This, to which we referred earlier, is one of the main challenges of the mathematician educator, as D’Ambrósio (1993) asserts. In this sense, the book “Cutting-edge research in mathematics and its applications ” was born: as allowing the different research experiences in Mathematics to be presented and constituted as a training channel for those interested. Here we have gathered articles by authors from different countries.

We hope that this work, in the way we organize it, awaken provocations, concerns and reflections in the readers. After this reading, we can look at Mathematics with different eyes. We therefore wish you a good read.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERENCES

D´AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 5

LA IDEA DE MODELO DE PROBABILIDAD DE UNA POBLACIÓN

Data de aceite: 01/02/2022

Héctor Hevia
Universidad Alberto Hurtado

RESUMEN: Aplicando una metodología fenomenológica, se investigan las naturalezas y conexiones existentes entre los principales objetos de estudio que aparecen como fundamento en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística aplicada, en los tres primeros niveles de educación en el sistema educacional chileno.
PALABRAS CLAVES: Metodología fenomenológica, Enseñanza de las probabilidades y de la estadística, Pensamiento estadístico y probabilístico, Teoría cognitiva de Bruner.

ABSTRACT: Applying a phenomenological methodology, the natures and existing connections between the main objects of study that appear as a foundation in the teaching and learning of applied Statistics are investigated, in the first three levels of education in the Chilean educational system.
KEYWORDS: Phenomenological methodology, Teaching of probabilities and statistics, Statistical and probabilistic thinking, Bruner's cognitive theory.

1 I INTRODUCCIÓN

Según algunos autores, una perspectiva fenomenológica en investigación provee de "… una alternativa radical a la comprensión tradicional acerca de lo que creemos que podemos saber acerca del mundo…" (Langdridge, 2007, p. 9). Este tipo de enfoque investigativo es aplicado en varias ciencias relacionadas con el comportamiento humano; por ejemplo, en la ciencia de la enfermería (Trejo, 2012), en marketing (Green et al, 1988) y en psicología general (Langdridge, 2007).

La fenomenología que se considera en este artículo, refiere a la creada por Edmund Husserl durante su vida, intensamente dedicada a la producción filosófica (1889 – 1938). Aplicado, el método fenomenológico, a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, permitiría operar en las problemáticas propias de esta ciencia, desde una perspectiva integradora que no sólo involucra la tradicional tríada constituida por el profesor, los estudiantes y el saber, sino que también lleva consigo la puesta en escena de la conciencia, centro de toda actividad de conocimiento del ser humano. Atendiendo al perentorio llamado de Husserl: ***¡Volver a las cosas mismas!*** se define una metodología de investigación con métodos específicos de producción: la epojé, la reducción fenomenológica y la variación libre en imaginación. Para una introducción básica acerca de estos métodos ver Capítulo 2 en Langdridge (2007) y, para adentrarse en una visión más teórica, revisar San Martín (2002).

En lo que sigue, se exponen los

principales resultados de un estudio fenomenológico dirigido a la enseñanza y aprendizaje de las nociones fundamentales de la Estadística: experimentos aleatorios, espacio muestral, variables aleatorias y distribuciones de probabilidad, según se presentan en una variedad de textos utilizados en Chile, principalmente en la educación superior.

En este trabajo, se invita al lector a un recorrido donde la práctica de la epojé, "… el proceso mediante el cual intentamos abstenernos de nuestras presuposiciones, esas ideas preconcebidas que podríamos tener acerca de las cosas que nosotros investigamos …" (Langdridge, 2007, p. 17), sea una de sus motivaciones.

2 I EXPERIMENTO, EXPERIMENTO ALEATORIO Y EXPERIMENTO DETERMINÍSTICO

Un *experimento* es un procedimiento replicable que se ejecuta en la realidad, y de cuya realización se obtiene un resultado **observable**[1]. En particular, interesan experimentos denominados *aleatorios*, en los cuales las condiciones experimentales no determinan el resultado; es decir, experimentos *no determinísticos*. Por ejemplo, el experimento que consiste en el lanzamiento al azar de un dado, anotando como resultado el número de puntos que exhibe la cara que queda hacia arriba, es un experimento aleatorio[2]. Sin embargo, si modificamos este experimento, anotando como resultado la suma de los puntos que exhiben las cuatro caras laterales, este último experimento no es aleatorio sino determinístico. La razón obedece a la estructura que siguen las marcas en un dado: marcas en caras opuestas suman siempre 7; por tanto, la suma de los puntos de las caras laterales es igual a (1+2+3+4+5+6)-7=21-7=14.

3 I LA POBLACIÓN DE OBSERVACIONES DE LOS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

Las observaciones de los resultados obtenidos a través de realizaciones de un cierto experimento aleatorio, constituyen la *población de observaciones* de los resultados de ese experimento aleatorio, la que puede entenderse a nivel de la realidad o, a un nivel de mayor abstracción, conceptualmente, como una categoría. Ver Bruner, 1978[3]. Desde una perspectiva constructivista, el concepto "población de observaciones (de los resultados) de un experimento aleatorio" debería tener un rol relevante en el proceso de enseñanza y

1 Experimentos cuyos resultados no son observables, no son de interés. Por ejemplo, se entiende que un dado encerrado en una caja hermética de paredes no traslúcidas, suficientemente amplia como para que el dado gire y se mueva en forma arbitraria, produce resultados aleatorios cada vez que la caja hermética se agita y luego se detiene; sin embargo, este experimento no es de interés ya que sus resultados no son observables. De hecho, la apertura de la caja violaría el diseño original del experimento y, en consecuencia, poco o nada podría decirse respecto a los resultados del experimento originalmente diseñado.

2 Llamaremos a este experimento, "el experimento del dado"

3 A nivel de realidad, la población de observaciones podría estarconstituida por las observaciones ya realizadas; pero,- también es posible hacer abstracción de la realidad y concebir la población como estando constituida por todas aquellas observaciones de los resultados del experimentoaleatorioque resulten de una ejecución del experimento. De esta manera, la población se hace conceptual e infinita; infinita en el sentido que puede ser tan amplia en número como uno quiera.

aprendizaje de la Estadística dado que ésta es la población que se busca modelar. Para este propósito, se utiliza una *muestra* de la población, la que está formada por un número *n*, finito, de estas observaciones. El siguiente supuesto permite considerar a una muestra de tamaño *n* suficientemente grande, como un **laboratorio de la población**. (Se puede demostrar que si *n* es suficientemente grande, no hay razones para objetar la capacidad que tiene una muestra de este tamaño para representar a la población).

4 I EL SUPUESTO DE INDEPENDENCIA DE LAS REALIZACIONES DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

Intuitivamente, consideramos cada experimento aleatorio como constituyendo una unidad aislada, cerrada e independiente; una **mónada**. Por tanto, aceptamos que no hay efecto posible sobre el resultado del experimento aleatorio que no provenga de las condiciones experimentales y que no existe efecto alguno que resulte de la realización del experimento; aceptamos, entonces, que no existe otro tipo de causalidad envuelta en el experimento y que, por tanto, la repetición del experimento aleatorio produce *resultados independientes*. A esta concepción a priori acerca del experimento aleatorio, la denominamos *supuesto de independencia de las realizaciones de un experimento aleatorio*.

5 I LOS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

La definición de cuáles son los resultados de un experimento aleatorio que se estudia, queda enteramente en manos de quienes estudian tal experimento[4]. Estos resultados, denominados *simples*, pueden tener dos naturalezas. Denominamos *resultados fenoménicos*[5] a los resultados del experimento aleatorio que pueden ser observados a través de realizaciones del experimento. Por otro lado, denominamos *resultados teóricos* del experimento aleatorio, a los resultados cuya existencia queda garantizada aceptando ciertos supuestos[6]. Por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado al azar cien veces, anotando como resultado la suma de los cien números obtenidos, el resultado "100", que se obtiene cuando en cada uno de los cien lanzamientos se obtiene "1", podría ser catalogado como teórico, pero posiblemente, no fenoménico.

Los resultados de un experimento aleatorio podrían establecerse utilizando una codificación conveniente. En este caso, es recomendable que la codificación de los resultados se integre a la definición del experimento; experimentos ambiguos son inadecuados para el aprendizaje. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1

Suponga que el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado al azar, anotando

4 Siempre habrá un grado de reducción de la realidad al establecerse qué se entenderá por un resultado de un cierto experimento: **Siempre que se definealgo, hay también algo que se pierde.**

5 Fenoménico: perteneciente o relativo al fenómeno como apariencia o manifestación de algo.

6 **Tener en cuenta que lo que se supone, no siempre es cierto**

“1”, “2”, “3”; según si el número de puntos que se observa es “1” ó “2”; “3” ó “4”; “5” ó “6”; respectivamente. Observe cómo la codificación definida permite decidir si dos lanzamientos producen el mismo resultado; es decir, cuando los resultados obtenidos se consideran “iguales”. En Figura 1, se muestra una representación icónica de este experimento aleatorio en la cual, los trazos entre nodos se corresponden con cada una de las posibles producciones o *casos* del experimento.

Ejemplo 2

Supongamos que se lanzan aleatoriamente dos dados y que sólo interesa si el número obtenido en cada lanzamiento, es par o impar. Así de impreciso el experimento, hay varias alternativas para anotar un resultado. Elijamos, como codificación para los resultados, la letra *p* y la letra *i* para indicar que un dado arrojó un número par, impar; respectivamente. Todavía más, aceptemos que cada letra preservará la identidad del dado que produce su observación; por ejemplo, anotando el resultado de uno de los dados en primer lugar y el resultado del otro dado en segundo lugar. Entonces, hay exactamente cuatro resultados posibles: *pp*, *pi*, *ip*, *ii*. Observe que, si ignoramos las identidades de los dados de los cuales proceden las observaciones, entonces, hay exactamente tres resultados posibles para este experimento: *pp*, *pi* = *ip*, *ii* . En Figura 2, se muestra una representación icónica de este experimento indicando casos y sus respectivos resultados.

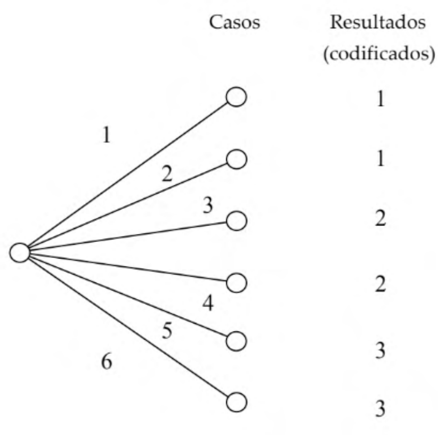

Figura 1

6 I EL SUPUESTO DE EQUIPROBABILIDAD DE LOS CASOS DE UN EXPERIMENTO

Si el modo de producción de los resultados del experimento aleatorio se acepta como conocido y este modo de producción determina un número finito de casos posibles de ser descritos, entonces, bajo *supuesto de igual ocurrencia de los casos* (o *equiprobabilidad de* *los casos*) es posible asignar probabilidad a un resultado simple del experimento aleatorio a través de la conocida Regla de Laplace; la que destacamos a continuación.

$$P(R) = \frac{\text{número de casos favorables a } R}{\text{número total de casos}}$$

Esta forma de asignar probabilidades a los resultados simples de un experimento aleatorio, corresponde al denominado *método clásico* de asignación de probabilidades.

En el primer ejemplo y procediendo de este modo, se tiene que dos casos, del total de los seis casos, son favorables a cada posible resultado, asignándose, por tanto, probabilidad $\frac{1}{3}$ a cada uno de los tres resultados. En el segundo ejemplo, hay 36 casos o producciones del experimento; de los cuales, 9 son favorables a *pp*, 9 favorables a *pi*, 9 favorables a *ip* y 9 favorables a *ii*; asignándose, por tanto, probabilidad $\frac{1}{4}$ a cada resultado. Observe que si en este segundo ejemplo se ignora la referencia a la identidad de los dados que originan la observación; es decir, anotando los resultados como parejas no ordenadas, hay 9, 18, 9 casos favorables a *pp, pi* = *ip, ii* respectivamente; por tanto, en esta situación se asignan las probabilidades $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$respectivamente.

7 I ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO Y SU FAMILIA DE EVENTOS

Sea *E* un experimento aleatorio. Se define el *espacio muestral* del experimento *E* como el **conjunto** cuyos elementos son **todos los resultados simples que, en teoría, pueden obtenerse del experimento** *E*[7]. Observe que una representación conveniente de los resultados del experimento, permite describir los elementos de a través de términos o expresiones cuyos significados podrían mantener un grado de relación con el experimento aleatorio que se estudia. Desde esta perspectiva, el espacio muestral de un experimento aleatorio se constituye en un **modelo matemático** de primera generación[8], un **objeto matemático** proyectado sobre un contexto de la realidad; por tanto, imbuido de posibles significados[9]. Por ejemplo, los espacios muestrales de los tres ejemplos presentados anteriormente, son: *S*={1,2,3}, *S'* ={*pp, pi, ip, ii*}, y *S''* = {*pp,pi,ii*}; respectivamente.

7 La noción de espacio muestral, viene de R. von Mises; como menciona Feller, 1950. En inglés,el espacio muestral se denomina“sample space”; de allí la notación.
8 En un modelo matemático de primera generación, los objetos matemáticos del modelo se corresponden con objetos presentes en un contexto de la realidad, lo quepermite aportarsignificado a los objetos abstractos que componen el modelo(Guzmán y Hevia, 2002).
9 Según Duval,2001,los objetos matemáticos, siendo abstractos, sólo son alcanzables a través de representaciones.

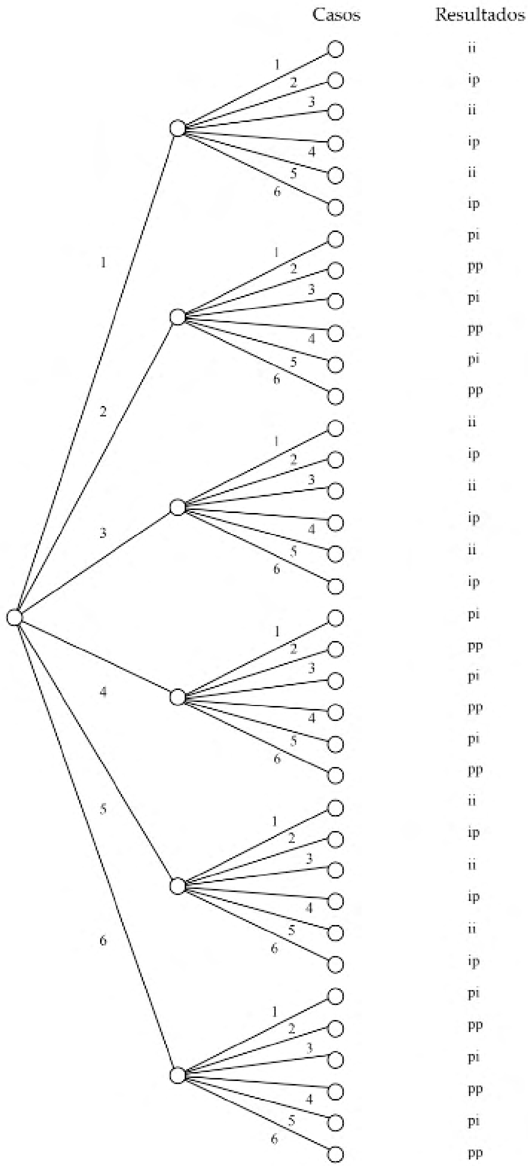

Figura 2

Los elementos de un espacio muestral, es decir, los resultados simples del experimento aleatorio, también se denominan *eventos simples*. Por ejemplo, es un evento simple para los dos últimos espacios muestrales.

En general, un *evento* es una **afirmación** que alude o se refiere, a los resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, la afirmación “el resultado es un número par”, es un evento para cualquier experimento aleatorio que arroje un número entero como resultado.

Pero estas afirmaciones que constituyen eventos de un experimento aleatorio, deben ser factibles de ser verificadas para cada resultado simple del experimento[10]. Cualquiera sea la afirmación de este tipo que se enuncie en relación a los resultados teóricos de un experimento aleatorio, esta definirá por comprensión, un subconjunto del espacio muestral del experimento.

Entendidos los eventos como **afirmaciones en lenguaje natural** referidas a los resultados simples de un experimento aleatorio, se logra enriquecer el aprendizaje de las probabilidades al hacer posible integrar varios espacios muestrales de interés en los cuales es relevante un mismo evento; pero, cuyos respectivos subconjuntos podrían ser diferentes. Considere, por ejemplo, el evento E: "uno de los dados arroja un número par". Entonces, $E' = \{pp, pi, ip\}$ y $E'' = \{pp, pi\}$ son representaciones de E en los espacios muestrales S' y S'', respectivamente. Esta flexibilidad alcanzada a través de esta noción de evento, podría tener interesantes implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de algunas aplicaciones del Teorema de Bayes, en las que se combinan probabilidades de diferente origen.

8 | LA REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO ALEATORIO: VARIABLE ALEATORIA

En lo que sigue, consideramos experimentos aleatorios cuyos resultados son **números**. Sin duda, a través de estos experimentos aleatorios, se hacen presentes los denominados *números aleatorios*[11]. Supongamos que E es un experimento aleatorio cuyos resultados simples son números. Utilizamos una letra mayúscula, digamos X, para representar al *número aleatorio* que se hace presente a través del experimento E y que es susceptible de ser observado a través de una realización del experimento E. El término recibe el nombre de *variable aleatoria*. Por otro lado, el número que se observa a través de la realización del experimento aleatorio E, se denota por x. Denominamos, a esta definición, la *definición fenomenológica* de variable aleatoria.

Observe que una variable aleatoria , entendida de esta forma, representa un número aleatorio y que estos números aleatorios son factibles de ser reconocidos intuitivamente gracias a la presencia de un cierto experimento aleatorio. Esta definición hace posible aprehender el concepto a que refiere una variable aleatoria, es decir, a "número aleatorio", en la misma forma en que son aprehendidos los números: como fenómenos que se reconocen directamente en la realidad[12].

De hecho, más temprano que tarde, los autores de textos de educación superior, se inclinan por esta concepción de variable aleatoria ya que la otra alternativa de definición

10 Citando a Feller, 1950, p14:"...Tiene completo sentido hablar acerca de un evento A solo cuando está claro para *cada* resultado del experimento si el evento A ha ocurrido o no ha ocurrido."

11 Se debe caer en cuenta que un número aleatorio **no** es un número.Por otro lado, la observación de un número aleatorio, sí se traduce en el registro de un número.

12 Esta propuesta de enseñanza de variable aleatoriaha sido presentada por primera vezen el micro curso *Didáctica Fenomenológica de la Modelación Estadística de los Datos* dictado por el autoren el Primer Congreso Internacional de Estadística, Universidad de Trujillo, Perú; 2013.

existente, denominada aquí *definición funcional*, la cual concibe a una variable aleatoria como una función del espacio muestral de un experimento aleatorio al conjunto de los números reales, se hace insostenible cuando las variables aleatorias que se estudian son continuas. Otros, como Rice, 2007, Durrett, 2009, Lind et al, 2016[13] y Ross 2002; se deciden, prácticamente desde el comienzo, por la definición fenomenológica, señalando, por ejemplo, "una variable aleatoria es esencialmente un número aleatorio"[14].

Si se opta por una aprehensión del concepto de variable aleatoria a través de una definición fenomenológica como la ya señalada, se hace necesario que en forma previa, se consolide el concepto de experimento aleatorio, el cual, debería ser objeto de estudio teniendo en mente este nuevo objetivo, la formación del concepto de número aleatorio a través de experiencias de aprendizaje que involucren experimentos aleatorios cuyos resultados simples sean números. La manipulación previa de experimentos aleatorios en adecuados niveles escolares, permitiría incorporar significados para los números aleatorios, los que estarían directamente ligados a las experiencias de los estudiantes. Ello también contribuiría a la formación de representaciones icónicas para experimentos aleatorios más generales, las que tienen un rol destacado en la construcción de los conceptos de probabilidad. (En relación a los tipos de representaciones, ver Bruner, 1964.) Idealmente, podría ser factible que estos objetivos estén logrados en los años previos a la enseñanza media. Siguiendo esta línea investigativa, se está desarrollando una investigación preliminar con el objetivo de determinar el estatus del objeto "experimento aleatorio" en los textos escolares de Chile (Figueroa y Hevia, en preparación).

A continuación, una breve digresión sobre la enseñanza del concepto de variable aleatoria cuando se utiliza la aquí denominada "definición funcional". Lo usual en los textos de Estadística, cualquiera sea el nivel de los estudios, básico, medio, superior (pregrado), consiste en definir "variable aleatoria" como una función matemática cuyo dominio es el espacio muestral *S* de un experimento aleatorio y cuyo recorrido es el conjunto de los números reales. Desde el punto de vista del aprendizaje, hay más de una razón que harían no recomendable esta definición. En primer lugar, ya sea que el experimento aleatorio entregue resultados numéricos o no, una definición como tal tiene una utilidad dudosa ya que no iría más allá de ser una mera codificación de los resultados del experimento. Tal codificación podría agregarse como una especificación más en la definición del experimento aleatorio que se estudia, permitiendo omitir la referencia al objeto matemático función. Pero hay una segunda razón que hace no recomendable la definición de variable aleatoria como función matemática: la utilización del objeto matemático función para definir el concepto de variable aleatoria, otorga mayor abstracción a este concepto, alejándolo de la realidad en el sentido que se explica en Hevia, 2021.

13 En particular, Lind et al, 2015,p 157,identifican"experimento aleatorio" con "variable aleatoria", expresando: "*En cualquier experimento aleatorio, los resultados se presentan al azar; así, a éste se le denomina **variable aleatoria**"*
14 Rice, 2007, p 35,inicia el capítulo dedicado a variables aleatorias señalando: "*A random variable is essentially a random number."*

Volvamos al concepto de variable aleatoria como la representación de un número aleatorio. Una característica relevante de una variable aleatoria es que tiene carácter de representación única y, a la vez, múltiple[15]. Por esta razón, el álgebra de variables aleatorias debe tener consideraciones propias. Por ejemplo, en el experimento del dado, la variable aleatoria X es el número de puntos que exhibe la cara superior. Por tanto, la suma de los números que se obtienen en dos realizaciones (independientes) del experimento debe representarse diferenciando entre estos dos números aleatorios, escribiendo, por ejemplo, $X + Y$ o $X_1 + X_2$[16]. En este último caso, preservamos la letra X para indicar que estamos frente a resultados de un mismo experimento E, pero diferenciamos por medio de subíndices para señalar que corresponden a resultados que provienen de dos realizaciones diferentes del experimento. Observe que $T = X_1 + X_2$ es una nueva variable aleatoria, la que podría tomar cualquier valor entero de 2 a 12.

La notación introducida que utiliza subíndices, es cómoda para representar y manipular teóricamente una muestra (o parte) de la población; en particular, para representar muestras independientes e idénticamente distribuidas de tamaño de la población X (abreviadamente, muestras iid de la población X). Este tipo de muestras juega un rol importante en la teoría de la estimación y en las técnicas de la inferencia estadística. De esta forma, una muestra de tamaño n de la población X podría ser representada por el sistema de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$.[17]

Observe, en el párrafo anterior, la naturalidad de la utilización de la variable aleatoria X para referirse a la población de observaciones del experimento aleatorio donde se presenta X.

9 I EL SUPUESTO DE EXISTENCIA DE UN MODELO DE PROBABILIDAD PARA LA POBLACIÓN DE OBSERVACIONES DE LOS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO *E* CUYO ESPACIO MUESTRAL *S* ES FINITO

Parece práctico abreviar "población de observaciones de los resultados de un experimento", por "población de observaciones de un experimento", lo que haremos en adelante.

Dado un experimento aleatorio E, tiene sentido asignar un único objeto matemático a la población de observaciones de E, cuyo rol sea establecer una ley para las probabilidades que posiblemente estén presentes en las observaciones del experimento E. Este objeto matemático cumple el rol de *modelo de probabilidad* para la población de observaciones del experimento E al establecer un patrón de referencia para las frecuencias relativas que

15 Es importante tener en consideración que una variable aleatoria X representa una únicaobservación de unresultado del experimento; de aquí provieneel carácter único dela representación. Simultáneamente, esta observación puede referirse a cualquiera de los valores de la variedadde resultados que produce el experimento; de allí proviene la multiplicidad de la representación.

16 Observe la naturalidad de la presencia de varias dimensiones, ya en los inicios de unestudiosobre números aleatorios y sus representaciones.

17 Las muestras definidas en punto 3, bajo supuesto de independencia, punto 4, son muestras iid.

aparecen en una muestra de la población de observaciones de *E*.

En particular, si el conjunto de los resultados teóricos del experimento aleatorio es finito[18], se utiliza como modelo, una función matemática que asigna probabilidad a cada uno de estos posibles resultados y que se denomina *función de masa de probabilidad (fmp)*. Sin embargo, no existe razón alguna para afirmar que la población de observaciones de cualquier experimento aleatorio cuyo espacio muestral es finito, posee un modelo de tal naturaleza; tampoco en el caso de experimentos más generales. Estamos en presencia de un nuevo supuesto: el supuesto de existencia de un modelo de probabilidad para la población de observaciones de un experimento aleatorio *E*, cuyo espacio muestral *S* es finito.

Sea *E* un experimento aleatorio cuyo espacio muestral *S* es finito. Sea *X* el número aleatorio que se presenta en el experimento aleatorio *E* y supongamos que existe una ***medida o probabilidad de ocurrencia*** para cada resultado teórico *x* del experimento *E,* denotada por $P(X{=}x)$[19]. Entonces,

$$f(x) = P(X = x); \text{ para todo } x \in S,$$

se denomina, una función de masa de probabilidad de *X*.[20] Esta función de masa de probabilidad $f(x)$ se interpreta como un modelo de probabilidad para la población de observaciones del experimento *E*. Aún más brevemente, podría decirse que $f(x)$ es un modelo de probabilidad para la población *X*.

Por ejemplo, si *E* es el experimento del dado, bajo el supuesto de equiprobabilidad de los casos, se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{6}, \qquad \forall x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Esta función de masa de probabilidad puede interpretarse como un modelo de probabilidad para la población *X* del experimento del dado.

En el ejemplo anterior, el modelo de probabilidad se ha deducido bajo el supuesto de que un dado honesto no privilegia la ocurrencia de alguno de los seis resultados y que, por tanto, la equiprobabilidad es una característica inherente a este tipo de dado. Sin embargo, nada garantiza que el modelo deducido sea válido para la población de observaciones que se estudia. Esto, inevitablemente, conducirá a requerir **pruebas de validez** para el modelo deducido.

10 I OBSERVACIONES FINALES

Dado que una tabla de valores otorga probabilidades sin recurrir al objeto matemático

18 O infinito numerable.

19 En este supuesto se está aceptando la existencia de un modelo de probabilidad para la población de observaciones de *E*.

20 Se entiende que estas probabilidades satisfacen las leyes básicas; por ejemplo, las que establecen los axiomas de Kolmogorov; aunque simplificados, dado que se ha aceptadoque *S* es finito.

función, sería posible asimilar el concepto de modelo de una población, prescindiendo del objeto matemático función; al menos, en los primeros años de estudio. Por ejemplo, ver Lind, 2015.

Si la función de distribución de probabilidad, como se denomina en general a una fmp, no se presenta como modelo matemático de la población de observaciones, entonces el concepto estadístico de "ajuste de un modelo a los datos", queda desprovisto de sentido.

Resumamos lo visto, representando: ***experimento aleatorio, resultados de un experimento, observación (de un resultado del experimento aleatorio) y población de observaciones, espacio muestral, eventos simples y eventos compuestos (no simples)***, ***variable aleatoria***, ***distribución de probabilidad*** en un diagrama que permita visualizar o al menos percibir, las relaciones existentes entre ellos (ver Figura 3). Tres de estos objetos: ***experimento aleatorio***, ***población de observaciones*** y ***espacio muestral***, aparecen como conceptos fundacionales para la construcción de pensamiento estadístico y probabilístico. Observe que, en sus naturalezas, estos conceptos fundacionales son: un proceso, una categoría, un modelo matemático (que involucra un objeto matemático).

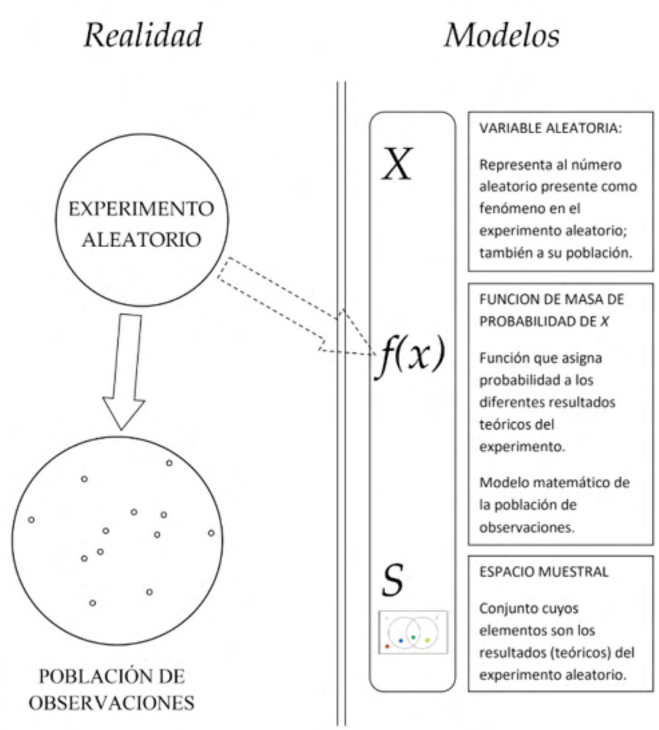

Figura 3: Si los resultados del experimento aleatorio no son números, entonces, la variable aleatoria no queda definida.

De lo anterior, pareciera recomendable que los estudiantes sean capaces de reconocer estos objetos de conocimiento, como preparación necesaria para el inicio de sus estudios de Estadística[21]; en caso contrario, es posible que se esté dando curso a inevitables obstáculos en el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes.

En Figura 3, la flecha punteada indica que, si el modo de producción de los resultados del experimento aleatorio es conocido a entera cabalidad, el modelo de probabilidad de la población podría ser construido exclusivamente a través de consideraciones meramente teóricas. Sin embargo, nunca podría ser probado como tal, sino validado. En una primera instancia, estas pruebas de validez podrían fundamentarse principalmente en la denominada Ley (débil) de los grandes números. Ver Ross, 2002, p129. Por otro lado, la flecha continua establecería un orden de precedencia entre: experimento aleatorio, observaciones, población de observaciones.

REFERENCIAS

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psycologist*, 1–15.

Bruner, J. S., Goodnaw, J. J. y Austin, G. A. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje*, Madrid: Nancea.

Durrett, R. (2009). *Elementary Probability for Applications*, Cambridge University Press.

Duval, R. (2001). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1, 143–168.

Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Third edition. John Wiley & Sons, Inc..

Figueroa, R. y Hevia, H. (en preparación) Experimento aleatorio, su estatus en los textos de estudios en Chile. Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación, Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Gårding, L. (1977). *Encounter with Mathematics*, Springer-Verlag, New York Inc.

Green, P. E., Tull; D. S. y Albaum, G. (1988). *Research for Marketing Decisions*, fifth edition. Prentice Hall.

Guzmán, I. y Hevia, H. (2002). Modelos Matemáticos y su Incidencia en el Aprendizaje de las Matemáticas. Publicado en Informe Técnico CIDIC 2, Universidad Adolfo Ibáñez, Chile (2008).

Hevia, H. (apr./jun. 2021). Incidencia de los Paradigmas de la Matemática en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística; *South Florida Journal of Development*, **v. 2**, **n. 2**. DOI: 10.46932/sfjdv2n2-094

21 Pareciera apropiado establecer como un objetivo de la Enseñanza Básica en el eje temático “Estadística y Probabilidades”, que estos tres conceptos fundamentales formen parte del conocimiento logrado por los estudiantes en los primeros años de estudio y en forma previa a todo otro estudio de la Estadística.

Langdridge, D. (2007). *Phenomenological Psychology. Theory, Research and Method*. Pearson Prentice Hall.

Lind, D. A., Marchal, W. G. y Wathen, S. A. (2015) *Estadística aplicada a los negocios y la economía*, décimo sexta edición. McGraw-Hill.

Rice, J. A. (2007) *Mathematical Statistics and Data Analysis*, third edition. Thomson.

Ross, S. (2002) *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, segunda edición. McGraw-Hill.

San Martín, J. (2002) *La estructura del Método Fenomenológico*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Trejo, F. (2012). Fenomenología como método de investigación: Una opción para el profesional de enfermería. *Revista de Enfermería Neurológica* (Mex) Vol. 11, No. 2: 98-101.

ÍNDICE REMISSIVO

O

P

R

S

T

Atena Editora

Ano 2022

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2022

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br