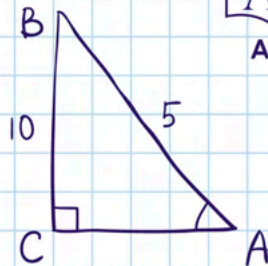


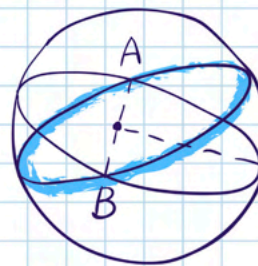
$$s d = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$



$$\begin{cases} -2x \leq 10 \\ 3x + 3 \leq 2x + 1 \end{cases}$$

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

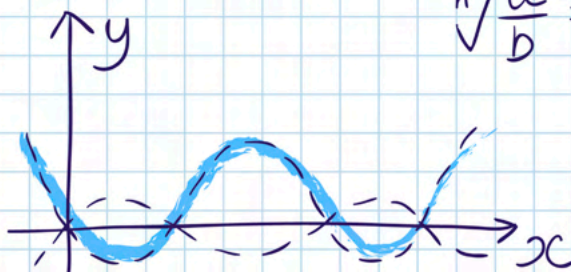
Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)



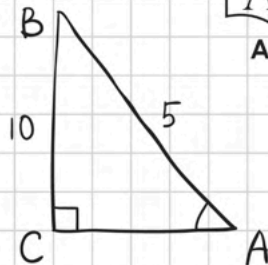
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$



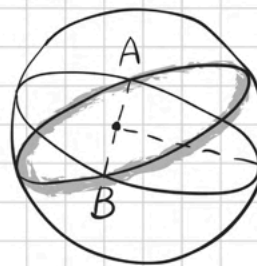
$$s d = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$



$$\begin{cases} -2x \leq 10 \\ 3x + 3 \leq 2x + 1 \end{cases}$$

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

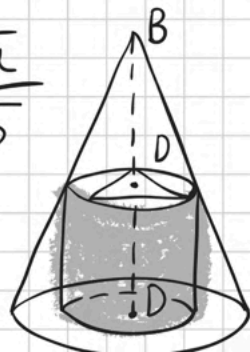
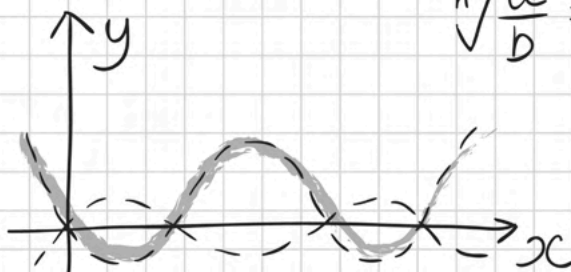
Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$



Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Cutting-edge research in mathematics and its applications

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C991 Cutting-edge research in mathematics and its applications / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-957-5

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.575221502>

1. Mathematics. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



INTRODUCTION

The new coronavirus pandemic took everyone by surprise. Suddenly, at the beginning of 2020, we had to change our life and professional routines and adapt to a “new normal”, where social distancing was put as the main measure to stop the spread of the disease. Several economic segments of society, in the hands of what was put by the health authorities, needed to rethink their activities.

The social, political and cultural context, as highlighted by Silva, Nery and Nogueira (2020), has demanded very particular issues for society. This, in a way, has led managers to look at training spaces with different eyes. Society has changed, in this scenario of inclusion, technology and a “new normal”; with this, it is important to pay attention to training spaces, in a dialogical movement of (re)thinking the different ways of doing science. Research, in the meantime, has become an important place to broaden the view on the numerous problems, especially with regard to mathematical knowledge (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

In this complex and plural society that Mathematics subsidizes the bases of reasoning and the tools to work in other areas; it is perceived as part of a movement of human and historical construction and it is important to help in the understanding of the different situations that surround us and the countless problems that are unleashed daily. It is important to reflect on all of this and understand how mathematicians and the humanistic movement made possible by their work happen.

Teaching Mathematics goes far beyond applying formulas and rules. There is a dynamic in its construction that needs to be noticed. It is important, in the teaching and learning processes of Mathematics, to prioritize and not lose sight of the pleasure of discovery, something peculiar and important in the process of mathematizing. This, to which we referred earlier, is one of the main challenges of the mathematician educator, as D’Ambrósio (1993) asserts. In this sense, the book “Cutting-edge research in mathematics and its applications” was born: as allowing the different research experiences in Mathematics to be presented and constituted as a training channel for those interested. Here we have gathered articles by authors from different countries.

We hope that this work, in the way we organize it, awaken provocations, concerns and reflections in the readers. After this reading, we can look at Mathematics with different eyes. We therefore wish you a good read.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERENCES

D'AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41>. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

ERRORES EN LA REPRODUCCIÓN DE FIGURAS A PARTIR DE UN EJE DE SIMETRÍA:UNA EXPERIENCIA EN UN TERCERO BÁSICO

Andrea Araya Galarce

Sharon Neira Figueroa

Macarena Valenzuela Molina


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215021>

CAPÍTULO 2..... 8

INNOVACIONES METODOLOGÍCAS EN CURSOS INICIALES DE MATEMATICA EN EDUCACION SUPERIOR: TRANSFORMACION DE CURSOS CON USO DE METODOLOGÍAS ACTIVAS

Carmen Soledad Yañez Arriagada

Valeria Soledad Carrasco Zúñiga


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215022>

CAPÍTULO 3..... 11

DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES ASOCIADOS AL INFINITO EN ESTUDIANTES DE ÚLTIMO AÑO DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

Cristián Bustos Tiemann

Roberto Vidal Cortés

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215023>

CAPÍTULO 4..... 18

GESTIÓN DIDÁCTICA DE MEDIACIONES DIGITALES. UNA ESTRATEGIA FORMATIVA DIGITAL

Carmen Fortuna González Trujillo


Nancy Montes de Oca Recio

María De los Ángeles Legañoa Ferrá

Sonia Guerrero Lambert

Daniella Evelyn Machado Montes de Oca

Elizabeth Rincón Santana

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215024>

CAPÍTULO 5..... 31

LA IDEA DE MODELO DE PROBABILIDAD DE UNA POBLACIÓN

Héctor Hevia

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215025>

CAPÍTULO 6..... 44

MONITOREO Y PROGRESIÓN DE SABERES, HABILIDADES Y ACTITUDES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Alejandro Nettle-Valenzuela


Carlos Silva-Córdova

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215026>

CAPÍTULO 7..... 55

UNA MIRADA DESDE LA ETNOMATEMÁTICA A LA CONSTRUCCIÓN DE
EMBARCACIONES ARTESANALES EN EL SUR DE CHILE

Maribel Díaz-Neira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215027>

SOBRE OS ORGANIZADORES 68

ÍNDICE REMISSIVO..... 69

DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES ASOCIADOS AL INFINITO EN ESTUDIANTES DE ÚLTIMO AÑO DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/02/2022

Cristián Bustos Tiemann

Universidad Alberto Hurtado
Santiago, Chile

<https://orcid.org/0000-0001-8400-0662>

Roberto Vidal Cortés

Universidad Alberto Hurtado
Santiago, Chile

<https://orcid.org/0000-0003-3863-7069>

RESUMEN: Esta comunicación tiene por objeto mostrar los resultados obtenidos en el trabajo final de graduación de Magíster en Didáctica de la Matemática el cual consistió en un estudio de las dificultades, los obstáculos y los errores en dos grupos de estudiantes de último año de Pedagogía en matemática de dos universidades chilenas con respecto al infinito. Para tal efecto se aplicó un instrumento con diferentes problemas en los que está involucrado dicho objeto matemático. Los principales resultados obtenidos demuestran una fuerte tendencia de reconocer solo el infinito potencial, especialmente en situaciones en las que el infinito en lo pequeño se manifiesta. Por otro lado, se reconoce el obstáculo epistemológico de la intuición geométrica en los procesos infinitos de divisibilidad y en la noción de límite. Además, emergen obstáculos asociados a la generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos y a considerar el valor de un límite como una aproximación.

PALABRAS CLAVE: Infinito potencial, infinito actual, obstáculo epistemológico, divisibilidad

infinita, noción de límite.

ABSTRACT: This communication aims to show the results obtained within the Master's Degree in Mathematics' Didactics final graduation work, which consisted in a study of the difficulties, obstacles and errors in two groups of Mathematics' Pedagogy senior students from two Chilean universities in regard to infinity. To reach such purpose, an instrument was applied with different problems in which said mathematical object is involved. The main results obtained show a strong tendency to recognize only the potential infinity, particularly in situations where infinity in the small manifests. On the other hand, there is a reckoning of the epistemological obstacle of geometric intuition in the infinite processes of divisibility and in the notion of limit. Additionally, obstacles emerge associated both with the generalization of the properties of finite processes to infinity and with the consideration of the value of a limit as an approximation.

KEYWORDS: Potential infinity, actual infinity, epistemological obstacle, infinite divisibility, notion of limit.

1 | INTRODUCCIÓN

La incorporación del concepto infinito en el currículo escolar presenta una característica singular, no se define ni se enseña a trabajar con él. En este sentido es que se plantea la problemática que genera el concepto de infinito en la enseñanza tanto escolar como universitaria ya que aparece como un saber transparente u objeto paramatemático y que dicha problemática

se acentúa con la existencia de diferentes concepciones para el infinito: una concepción potencial y una concepción actual, contradictorias entre ellas, que hace que los estudiantes presenten una serie de obstáculos, especialmente con esta última (Garbin, 2005).

A partir de lo planteado anteriormente es que surge la necesidad de describir las dificultades, errores y obstáculos que puedan evidenciar los estudiantes de último año de Pedagogía en matemática con respecto al infinito y así tener una idea de cuáles son sus nociones respecto de este objeto matemático previo a su desempeño profesional.

2 | ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En el desarrollo histórico de la idea de infinito es posible distinguir tres etapas, que según Crubellier (1994) permite definir tres tipos de infinito.

En la primera etapa se tiene el infinito de Platón y Aristóteles, que es un principio indefinible. En esta etapa especial interés presentan las paradojas de Zenón de Elea (s. V a.C.) quien mediante la reducción al absurdo argumentaba la imposibilidad del movimiento lo cual negaba la aceptación del infinito actual.

La segunda etapa corresponde al infinito de la Edad Media en donde se consideraba el infinito como propiedad exclusiva de Dios. En esta época el mismo Galileo rechaza la idea de infinito por considerarla que atenta contra la razón humana y realiza consideraciones geométricas en donde presenta un infinito que contradice la noción de Euclides que el todo es mayor que sus partes.

En la tercera etapa se tiene el infinito de los matemáticos. En este período Karl Weierstrass (1815 - 1897) traduce el concepto de límite a través de la notación $\epsilon - \delta$ que conocemos hoy en día y posteriormente Cantor, a finales del siglo XIX, desarrolla su teoría formal sobre el infinito actual y define conjunto infinito numerable y no numerable mediante una extensión de la noción de cardinalidad la cual consiste en la búsqueda de una biyección adecuada como método de prueba de coordinabilidad conjuntista.

3 | ESTADO DEL ARTE

Este concepto va ligado a una gran cantidad de temas habituales en la enseñanza matemática tales como en las nociones de número real, serie, límite, fractal, etc. Sin embargo, desde hace ya varias décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Sierpinski (1985) y Artigue (1995), entre otros, han observado que la noción de infinito es por lo general contradictoria en los estudiantes y que éstos encuentran muchas dificultades para su conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la involucran. En este sentido establecer una definición conceptual del infinito no es trivial y presenta problemas adicionales que no es posible obviar (Tall y Vinner, 1981).

Por otro lado la doble vertiente histórica infinito potencial v/s infinito actual implica

una colección de representaciones asociadas a ambas nociones, dinámico v/s estático, indefinido v/s definido, inabarcable v/s abarcable, etc. que a la vez que lo enriquecen suponen importantes obstáculos didácticos y epistemológicos (Cornu, 1991) en el camino de su comprensión. De esta manera investigadores como Tall (2002) y Montoro (2005) plantean que la noción de infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas. Otro aspecto tiene que ver con la generalización al considerar las propiedades de conjuntos finitos en los conjuntos infinitos, por ejemplo $\infty + \infty = \infty$ en donde se cree estar considerando procesos de sumar infinitos o que ∞ es una cantidad numérica cuando en realidad lo que se está aplicando es el límite de una función y en donde el resultado no es una magnitud sino un proceso acabado. Este hecho lo destaca Hitt (2013) al mencionar las dificultades que existen, aún entre los profesores de matemática, en la construcción del concepto de límite.

Es decir, el aprendizaje del concepto infinito presenta dificultades y esto se debe fundamentalmente al obstáculo epistemológico presente, obstáculo el cual tiene dos elementos que lo caracterizan: la persistencia y la resistencia que hacen que el paso del infinito potencial al actual sea difícil de lograr (Mena J, Mena A, Montoya, Morales, Parraguez, 2015).

4 | PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La problemática de investigación que se plantea es que el infinito es uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas y que esta situación hace crisis en el momento de enfrentar los conceptos formales del Cálculo y el Análisis Matemático fundamentalmente debido a la tensión dialéctica de lo potencial y actual.

En este sentido es que el objetivo general de esta investigación consistió en identificar errores, dificultades y obstáculos asociados al infinito en profesores de matemática en formación al término de su enseñanza universitaria y los tres objetivos específicos que ayudaron a lograr lo anterior fueron: (1) Analizar las nociones emergentes referidas al infinito potencial y al infinito actual planteadas en distintos ámbitos matemáticos, (2) Describir las percepciones de los estudiantes respecto de las sumas infinitas y (3) Describir la emergencia de algunos obstáculos epistemológicos del concepto de límite derivados de la problemática propia del infinito.

5 | MARCO REFERENCIAL

El marco referencial utilizado consiste de una adaptación de la tipología de dificultades, obstáculos y errores propuesto por Martín Socas (1997). Para lograr lo anterior se incorporaron nuevas categorías respecto de las dificultades en la transición del Álgebra

al Cálculo dada por Artigue (1998) y la tipología de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite levantada por Sierpinska (1994). En definitiva, el marco referencial (ver Figura 1) contempla las siguientes categorías:

D1: Dificultades asociadas a la dificultad de los objetos matemáticos.

D2: Dificultades asociadas a la conceptualización de la noción de límite. Esta categoría se concreta en los siguientes cuatro obstáculos epistemológicos:

O1: Límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.

O2: Sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

O3: La fuerza de una geometría que impide identificar claramente los objetos involucrados en el proceso de límite.

O4: Asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.

Es decir, la categoría D2 se relaciona con su obstáculo y se denota por D2-O1, D2-O2, D2-O3 o D2-O4 según sea el caso.

D3: Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

O5: Confiar en engañosas experiencias intuitivas.

Err1: Errores que tienen su origen en un obstáculo. También esta categoría se da asociada con su obstáculo Err1-O según sea el caso.

Err2: Errores debido a las características propias del Análisis Matemático.

Err3: Errores de procedimientos.

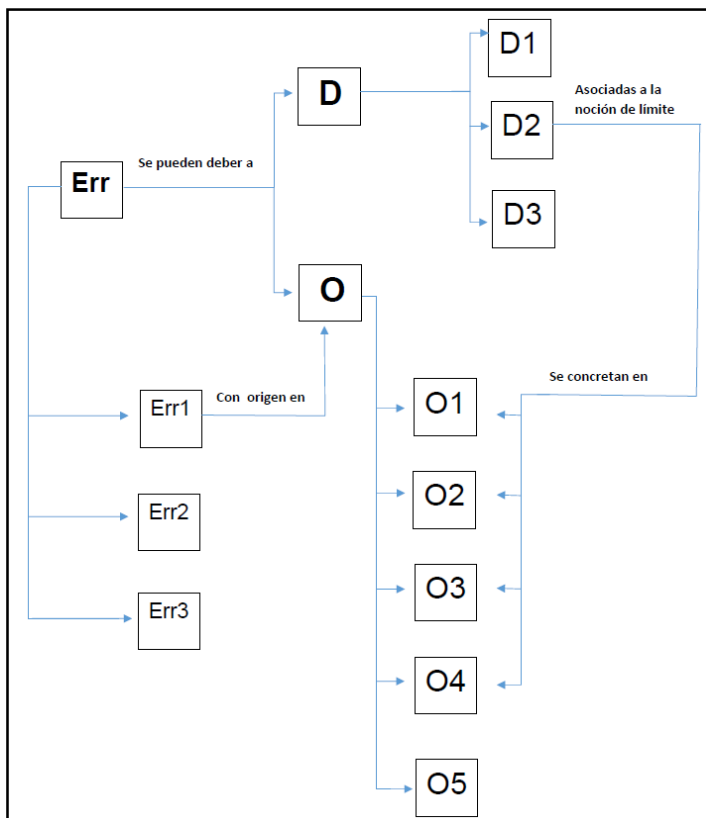


Figura 1. Esquema general del marco referencial adaptado

6 | MARCO METODOLÓGICO

La metodología de este trabajo es de carácter cualitativo con un diseño descriptivo y exploratorio. Es de tipo cualitativo pues su objetivo es describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes. Es descriptivo porque busca especificar características y tendencias de un grupo detallando como se manifiestan y es exploratorio pues su valor radica en que permite identificar conceptos o variables promisorias y establecer prioridades para investigaciones futuras (Hernández et al., 2014).

En este sentido las unidades de análisis correspondieron a las producciones de estudiantes en formación de profesores de matemática. Específicamente esta investigación fue realizada en dos universidades chilenas con un total de 12 estudiantes, seis de cada una, que cursaban el último año de su carrera. Se aplicó un instrumento con diferentes situaciones y problemas en los que está involucrado el infinito. Posteriormente se realizaron entrevistas para aclarar algunas de las producciones de los estudiantes y finalmente se realizó un análisis de tales producciones de acuerdo al marco referencial.

7 | RESULTADOS

Los principales resultados evidencian una alta frecuencia en las siguientes categorías: (D2-O3): Indicando una fuerte presencia de la intuición geométrica como obstáculo epistemológico. Esta situación se presentó de gran manera al considerar lo infinito en lo pequeño en un ámbito geométrico, particularmente con el tema de la divisibilidad infinita en un segmento de recta. (Err3): Esta categoría se dio mayoritariamente en la situación de las pelotas de tenis, problema abordado por Dubinsky (2008), en el que se considera lo infinito en lo pequeño, pero en un ámbito conjuntista. (Err1-O2): Es un error que tiene su origen en el obstáculo de la sobre-generalización de las propiedades de los procesos finitos a los infinitos. Esta situación fue muy evidenciada con respecto a las sumas infinitas en donde muchos estudiantes consideraron lícitas las operaciones de intercalar paréntesis, asociar u otras operaciones que son válidas para las sumas finitas. Especial atención merece la categoría (D2-O4) referida principalmente al obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con una aproximación. Además esta categoría a veces va asociada al error (Err1-O4), pues tanto la dificultad como el error asociados al obstáculo (O4) conviven juntos en el estudiante ya que muchas veces la dificultad es causa del error.

8 | CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos no arrojaron diferencias significativas respecto de una u otra universidad, por lo que la procedencia de las muestras fue irrelevante. Las categorías consideradas, que definieron el marco referencial utilizado, permitieron una completa mirada a las nociones emergentes en las producciones de los estudiantes y al mismo tiempo una articulación con los objetivos planteados. El conocimiento que se tiene de la recta, densidad, continuidad, formada por infinitos puntos o incluso asociándola a conceptos físicos como el tiempo o el espacio, impide aceptar la divisibilidad infinita que existe en la matemática. Además este hecho impide acceder a una mirada actual del objeto infinito pues se acepta como imposible concebir el proceso acabado.

En definitiva esta investigación pretende ser un incentivo para considerar como metodología de análisis en los estudios en didáctica los errores, dificultades y obstáculos que emergen constantemente en las producciones de los estudiantes y a partir de los resultados obtenidos levantar novedosas propuestas de enseñanza.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. **La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos**. 1995. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=105>. Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *LRelime*, 1(1), 40-55.

CORNU, B. **Limits**. *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall, 1991. Disponible em: <https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>. Crubellier, M. (1994). *La raison et l'infini*. *Repères-IREM*, 17, 13-28.

DUBINSKY, E. et al. **Infinite iterative processes: the tennis Ball Problem**. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, NNew York Business Global, 2008. Disponible em: <https://www.ejpm.com/index.php/ejpm/article/view/48>.

GARBIN, S. **¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 2005. Disponible em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33580205>.

R. HERNÁNDEZ; C. FERNÁNDEZ; BATISTA, P. **Metodología de la Investigación. 6ta edición**. ed. [S.l.]: Mc Gray Hill, 2014.

HITT, F. **El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real**. *Revista de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, El Cálculo y su Enseñanza, DME del CINVESTAV-IPN*, v. 4, p. 103 – 122, 2013. ISSN 2007-4107. Disponible em: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/.

MENA-LORCA, A. et al. **El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, v. 18, n. 3, p. 329 – 358, 2005. ISSN 1665-2436. Disponible em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33543068003>. Montoro, V. (2005). *Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 409-427.

SIERPINSKA, A. (1985). **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite**. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, La pensée sauvage*, v. 6, n. 1, p. 5 – 67, 1985. Disponible em: <https://revue-rdm.com/1985/obstacles-epistemologiques/>. Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. *Studies in Mathematics Education Series*. London: The Falmer Press.

ROBAYNA, M. M. S. **Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria**. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Horsori: Universitat de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación, v. 154, p. – 125, 1997. Tall, D., y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

TALL, D. **Natural and formal infinities**. *Educational Studies in Mathematics*, v. 48, n. 2 y 3, p. 129 – 136, 2002.

ÍNDICE REMISSIVO

A

- Actual infinity 11
- Aprendizajes profundos 8
- Aseguramiento de la calidad 44, 45, 46

C

- Carpintería de ribera 55, 56, 57, 62
- Competencia 21, 27, 28, 29, 30, 44, 45

E

- Educación inclusiva 30, 44, 53
- Enseñanza de las probabilidades y de la estadística 31
- Epistemological obstacle 11
- Errores 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 26
- Estándares de calidad 44, 46
- Estrategia 18, 20, 21, 22, 26, 27, 45, 50, 57
- Etnografía 55, 67
- Etnomatemática 55, 56, 59, 60, 61, 67

F

- Flipped classroom 8, 9

G

- Gestión didáctica 18, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30

I

- Infinite divisibility 11

M

- Matemática 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 38, 40, 42, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 61, 67, 68
- Mediaciones digitales 18, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28
- Metodología fenomenológica 31
- Metodologías activas 8

N

- Notion of limit 11

O

Objetos matemáticos 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 35

P

Pensamiento estadístico y probabilístico 31, 41

Potential infinity 11

R

Reconocimiento 1, 25, 45, 59, 60

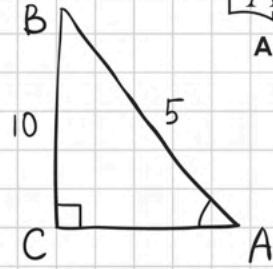
S

Simetría 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 61, 62, 64

T

Teoría cognitiva de Bruner 31

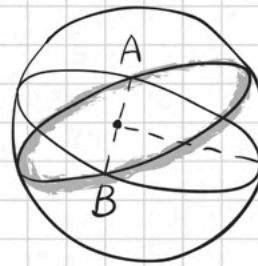
$$s d = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$



$$\begin{cases} -2x \leq 10 \\ 3x + 3 \leq 2x + 1 \end{cases}$$

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

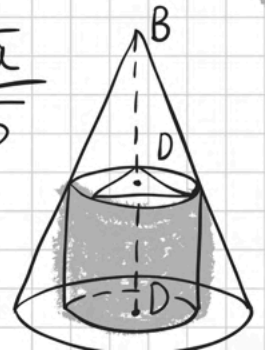
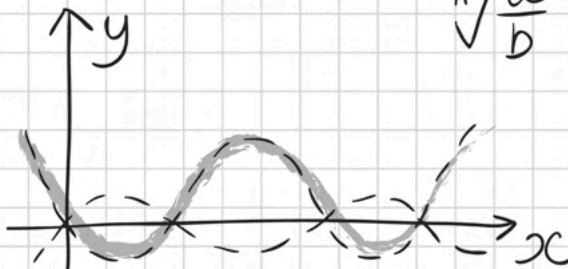
-  www.atenaeditora.com.br
-  contato@atenaeditora.com.br
-  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
-  www.facebook.com/atenaeditora.com.br



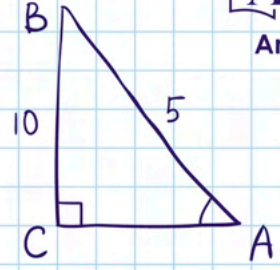
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$



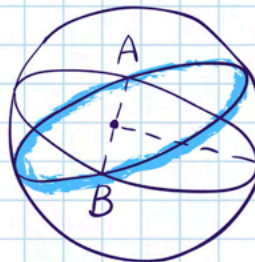
$$s d = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$



$$\begin{cases} -2x \leq 10 \\ 3x + 3 \leq 2x + 1 \end{cases}$$

CUTTING-EDGE RESEARCH IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

- www.atenaeditora.com.br
- contato@atenaeditora.com.br
- [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
- www.facebook.com/atenaeditora.com.br



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

