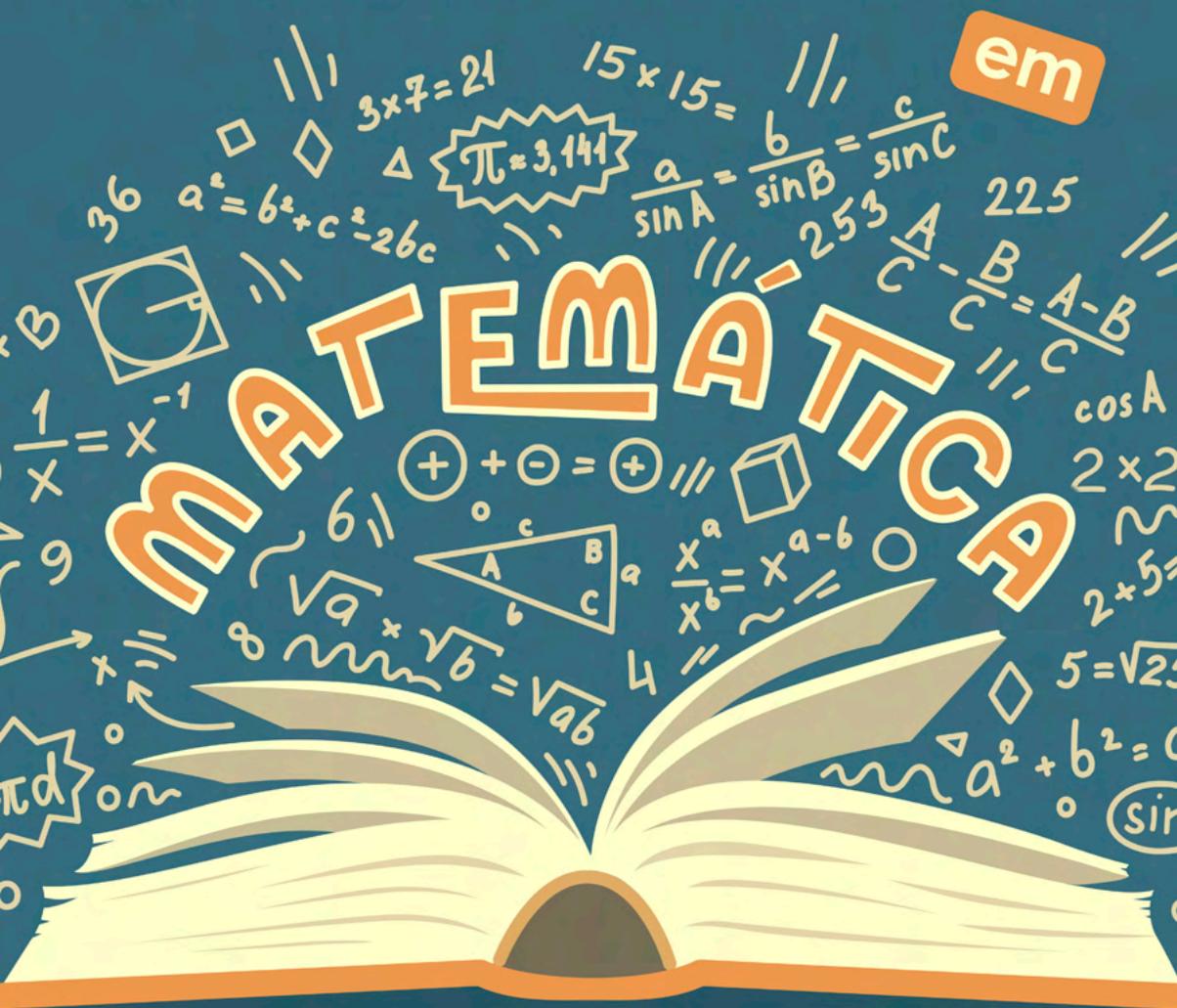


Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



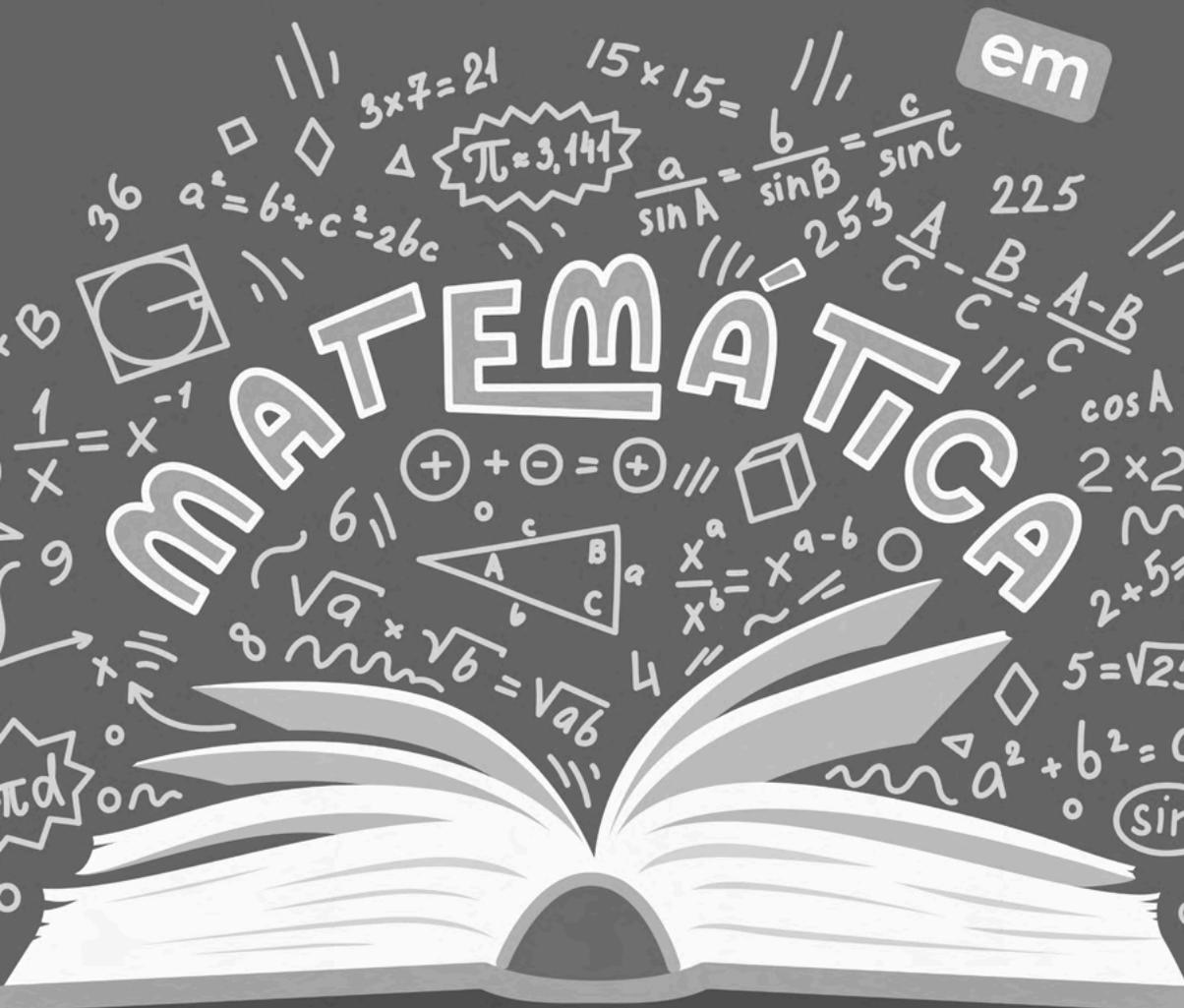
e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

2

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo

Correção: Yaiddy Paola Martinez

Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga

Revisão: Os autores

Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações
2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva,
André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena,
2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-773-1

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.731220601>

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da
(Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador).
III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o volume 2 do livro “**Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações**” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da

Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

DÁMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41>. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

PESQUISAS EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA EM ALGUMAS INSTITUIÇÕES ESCOLARES DO BRASIL

Edivânia Graciela Neves Lima

Gladys Denise Wielewski

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206011>

CAPÍTULO 2..... 12

ASSESSMENT BELIEFS AND PRACTICES IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION IN BRAZIL

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

Ednei Luís Becher

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Michiel Veldhuis

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206012>

CAPÍTULO 3..... 22

REPRESENTAÇÕES SOCIAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE DUAS ESCOLAS PÚBLICAS DA CIDADE DE PARAÍSO DO TOCANTINS SOBRE O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO

Elismar Dias Batista

William Isao Tokura

Jeidy Johana Jimenez Ruiz

Priscila Marques Kai

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206013>

CAPÍTULO 4..... 34

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES. PLAN DE ESTUDIOS 2012

Edith Arévalo Vázquez

Hilda Alicia Guzmán Elizondo

Nancy Bernardina Moya González

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206014>

CAPÍTULO 5..... 47

CONSTRUINDO O CONCEITO E OPERACIONALIZANDO FRAÇÕES COM MATERIAIS CONCRETOS – VERSÃO COMPLETA

Givaldo da Silva Costa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206015>

CAPÍTULO 6..... 64

O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NAS UARC'S

Leandro Pantoja da Costa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206016>

CAPÍTULO 7..... 84

A LUDICIDADE E O ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: O QUE REVELAM ALGUMAS PRODUÇÕES ESCRITAS?

José Duilson Filho

Américo Junior Nunes da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206017>

CAPÍTULO 8..... 103

DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO: CARACTERÍSTICAS, AVALIAÇÃO E INTERVENÇÃO

Talita Neves Silva

Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti

Isabel Cristina Lara Machado

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206018>

CAPÍTULO 9..... 113

ESTUDO QUANTITATIVO DO DESEMPENHO DISCENTE ATRAVÉS DO PROJETO PRÉ-CALOURO E NIVELAMENTO DA ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA EST/UEA

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206019>

CAPÍTULO 10..... 122

ANÁLISE PRELIMINAR DA DINÂMICA DO VÍRUS HBV POR MEIO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Lislaine Cristina Cardoso

Fernando Luiz Pio dos Santos

Rubens Figueiredo Camargo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060110>

CAPÍTULO 11..... 131

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O USO DA PLATAFORMA MENTIMETER NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Anderson Dias da Silva

Geriane Pereira da Silva

Joás Mariano da Silva Júnior

Carla Saturnina Ramos de Moura

Lucília Batista Dantas Pereira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060111>

CAPÍTULO 12..... 142

MODELO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RESTAURAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

Guilherme Florindo Afonso

Antonio Marcos Cossi

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060112>

CAPÍTULO 13..... 147

ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS A NIVEL LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN PUEBLA

Carlos David Zapata y Sánchez

María Guadalupe López Molina

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060113>

CAPÍTULO 14..... 158

ANÁLISIS COGNITIVO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Leopoldo Zúñiga-Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060114>

CAPÍTULO 15..... 168

“BOLA AO CESTO”: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Claudia Croce Costalonga

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060115>

CAPÍTULO 16..... 175

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Márcio Pironel

Lourdes de la Rosa Onuchic

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060116>

CAPÍTULO 17..... 186

¿QUÉ COMPETENCIAS APORTA ANÁLISIS MATEMÁTICO 2 AL GRADUADO DE INGENIERÍA?

Sara Aida Alaniz

Gladys Carmen May

Marcela Natalia Baracco

Roberto Javier Simunovich

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060117>

CAPÍTULO 18..... 200

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO SUBSÍDIO PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE RAZÃO, PROPORÇÃO E TEOREMA DE TALES

Elismar Dias Batista

Willian Isao Tokura

Jeidy Johana Jimenez Ruiz

Priscila Marques Kai

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060118>

CAPÍTULO 19.....	206
ANÁLISIS ESTADÍSTICO APLICADO EN LA PROPOSICIÓN DE UNA RED DE CICLOVÍAS EN EL GRAN SAN JUAN	
Mariana Laura Espinoza Aníbal Leodegario Altamira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060119	
CAPÍTULO 20.....	218
GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA NOCIÓN DE FRACTAL EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO	
Daisy Julissa García-Cuéllar Mihály André Martínez-Miraval Jesús Victoria Flores Salazar	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060120	
CAPÍTULO 21.....	228
ESTIMATIVAS DA NORMA DO SUP DE SOLUÇÕES LIMITADAS DE EQUAÇÕES DE DIFUSÃO NÃO LINEARES	
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum Paulo Ricardo de Ávila Zingano	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060121	
CAPÍTULO 22.....	235
FREE VIBRATIONS OF CATENARY RISERS WITH INTERNAL FLUID	
Joseph Arthur Meléndez Vásquez Juan Pablo Julca Ávila	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060122	
SOBRE OS ORGANIZADORES	245
ÍNDICE REMISSIVO.....	246

ANÁLISE PRELIMINAR DA DINÂMICA DO VÍRUS HBV POR MEIO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Data de aceite: 01/12/2021

Lislaine Cristina Cardoso

UEMS - Naviraí

Fernando Luiz Pio dos Santos

Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu

Rubens Figueiredo Camargo

Depto. de Ciências, Unesp - Bauru

RESUMO: Esse artigo apresenta um modelo matemático para hepatite B. A formulação do modelo é feita por meio da derivada de Caputo. A solução analítica é encontrada, sob certas condições e então tal solução é comparada com dados reais. A partir de simulações numéricas nota-se que os diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos distintos da solução, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio. Os resultados apontaram que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem fracionária, Derivada de Caputo, Hepatite B.

1 | INTRODUÇÃO

A hepatite B é uma doença transmitida pelo vírus HBV, que infecta as células do fígado. A transmissão pode ocorrer por meio de relações sexuais e transmissão sanguínea. Entre os principais sintomas estão febre, fadiga,

perda de apetite, náuseas, urina escura, dor nas articulações, icterícia, entre outros [7, 20].

A história das hepatites virais remonta vários milênios. Manuscritos da literatura chinesa, com mais de cinco mil anos, faziam referência a icterícia na população. Alguns escritos de Hipócrates (400 a.C.) mostraram indícios de que a icterícia seria de origem infecciosa e decorrente de problemas no fígado. O acúmulo de líquido no abdômen (ascite) seria proveniente de alguma doença crônica nesse mesmo órgão [7].

Ao longo da história vários outros fatos são relacionados a casos de hepatites, principalmente em locais com grande massa populacional. Durante a segunda guerra mundial, estudos revelaram casos de hepatite aguda, entre indivíduos que passaram por transfusão sanguínea. Documentos apontam que em 1942, uma epidemia de hepatite afetou 28.585 militares americanos, ocasionando 62 óbitos [3].

A infecção pelo vírus HBV é um fator que impacta diretamente a saúde pública no mundo todo. A perda de qualidade de vida dos pacientes, bem como os gastos em tratamentos requerem esforços para desenvolver medidas eficazes de prevenção e controle. Conforme o Sistema de Informação de Agravos de Notificação (Sinan), entre os anos de 1999 a 2020, foram notificados 689.933 casos confirmados de hepatites virais no Brasil. Destes, 254.389 (36, 9%) correspondem

a casos de hepatite B, dos quais 139.323 (54, 8%) ocorreram entre homens. Segundo faixa etária, do total de casos acumulados, a maioria concentra-se entre indivíduos de 25 a 44 anos (49,0% dos casos). Em 2020, o maior percentual de casos notificados ocorreu entre as pessoas de 60 anos ou mais (16,3%). A mesma estimativa aponta que a região Sudeste concentra o maior número de infectados pelo vírus da hepatite B, com 34.52% do total, seguida das regiões Sul (31,8%), Norte (14,7%), Nordeste (10,3%) e Centro-Oeste (9,0%) [1].

O número de óbitos é um fator alarmante. A OMS estima que em 2015 ocorreram mais de 1 milhão de mortes no mundo. No Brasil, de 2000 a 2019, foram identificados pelo Sistema de Informação de Mortalidade (SIM), 78.642 óbitos associados às hepatites virais dos tipos A, B, C e D. Desses, 21.3% foram associados à hepatite B [1].

A despeito das mortes que provoca e enquanto a cura da hepatite B ainda não é uma realidade, as pesquisas clínicas atuais têm buscado novas ferramentas e mecanismos que ajudem a compreender a dinâmica da evolução viral ao longo do tempo. Nesse contexto, tem-se intensificado as pesquisas multidisciplinares na área de epidemiologia, com intuito de obter novas ferramentas que auxiliem na compreensão de fenômenos ligados a dinâmica da doença. Tais pesquisas são constituídas por modelos matemáticos que visam estimar a atual população infectada pelo vírus, a progressão da doença nos pacientes e os custos associados a diferentes cenários dessa patologia.

Do ponto de vista da construção desses modelos, destaca-se o cálculo de ordem não inteira, tradicionalmente chamado de Cálculo Fracionário (CF). O cálculo de ordem arbitrária, lida com derivadas e integrais de ordens não inteiras. Embora pareça ser uma teoria antiga, pois remonta ao século XVII, os avanços ainda são recentes. Nas últimas quatro décadas houve um aumento significativo em pesquisas relacionadas a aplicações do CF, em diversas áreas, desde a física até a medicina [10, 12, 18, 19, 20].

O cálculo de ordem não inteira têm ganhado relevância. Inúmeros estudos, nas mais diversas áreas do conhecimento, têm obtido importantes resultados e generalizações na modelagem de fenômenos reais por meio do CF [8, 15, 17]. Alguns fenômenos físicos, que até então não eram bem explicados quando modelados por sistemas de ordem inteira, tem mostrado que a modelagem com derivadas fracionárias descreve melhor a solução [9]. Estudos de modelos em HIV, feitos por [21], mostraram que sistemas de ordens arbitrárias são mais apropriados para descrever a dinâmica real da doença, pois a solução do modelo de ordem fracionária se ajusta melhor aos dados reais de pacientes.

Nesse contexto, o objetivo desse trabalho foi apresentar a modelagem da hepatite B de ordem não inteira e fazer uma comparação das soluções com dados reais, com o intuito de verificar se a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada.

21 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nessa seção apresentamos os conceitos fundamentais da teoria de cálculo fracionário. Inicialmente será feita a formalização da integral fracionária segundo Riemann-Liouville (RL). Em seguida, a partir das ideias de integral fracionária de RL, serão apresentadas as definições de derivada fracionária segundo RL e derivada fracionária segundo Caputo. Ambas as definições necessitam da integral fracionária para a formulação da derivada. Por esse motivo é necessário definir a integral fracionária e, depois, a derivada fracionária. O operador integral de RL é definido como segue:

Definição 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $a \in \mathbb{C}$, tal que $\text{Re}(a) > 0$. O operador integral de Riemann-Liouville de ordem a de $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, denotado por $I^a f(t)$, é definido como¹*

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

no qual o símbolo $*$ denota a convolução de Laplace, $\phi_\alpha(t)$ a função Gel'fand-Shilov, definida para $\alpha \notin \mathbb{Z}^-$, como $\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$ e $\Gamma(\alpha)$ função Gama definida como $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Definimos $I^0 f(t) = f(t)$.

A definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville (RL) está baseada no fato da derivação ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes. Tal definição estabelece que a DF é a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária.

Definição 1.2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, $a \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(a) \geq 0$, $a \notin \mathbb{N}$ e $n - 1 < \text{Re}(a) \leq n$, $t > a$. A derivada de Riemann-Liouville de ordem a da função $f(t)$ é dada por*

$$D_{RL}^\alpha f(t) = D^n [I^{n-\alpha} f(t)]. \quad (2)$$

A partir da equação (2), podemos analisar dois casos particulares, com relação ao parâmetro associado a ordem da derivada:

1. Se $a = n$, $n \in \mathbb{N}$ (caso inteiro), recupera-se a derivada de ordem inteira², ou seja

$$D_{RL}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

pois $I^0 f(t) = f(t)$ e $\frac{d^n}{dt^n}$ é a n -ésima derivada usual de $f(t)$.

2. Se $a = 0$ recupera-se a própria função, ou seja, $D_{RL}^0 f(t) = f(t)$.

A DF segundo Caputo é similar à DF segundo RL. Porém, ela é obtida invertendo a ordem de integração fracionária com a ordem de derivação.

Essa inversão na ordem dos operadores de integração nas derivadas de Caputo

¹ A partir da Definição (1.1), tem-se $I^a I^b = I^{a+b} \Gamma(\beta+1)/\Gamma(\beta+a+1)$. O caso polinomial é recuperado se $a, \beta \in \mathbb{N}$.

² Ambas as notações D^n e $\frac{d^n}{dt^n}$, indicam a n -ésima derivada usual de uma função.

e RL gera consequências significativas, tanto no resultado da derivada de algumas funções, quanto no contexto das aplicações em fenômenos físicos. O operador de Caputo é utilizado quando queremos analisar uma EDF cujas condições iniciais ou de contorno, são fisicamente interpretáveis, em termos das derivadas de ordens inteiras. Isso torna a derivada de Caputo mais conveniente para a modelagem de sistemas dinâmicos.

Definição 1.3 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$ e n um número natural, tal que, $n - 1 < \text{Re}(\alpha) \leq n$. O operador derivada de ordem α no sentido de Caputo é definido como*

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \phi_{n-\alpha} * D^n f(t). \quad (3)$$

A partir da equação (3), decorre dois casos particulares com relação ao parâmetro associado a ordem da derivada:

1. Se $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ (caso inteiro), recupera-se a derivada usual, isto é

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

em que $\frac{d^n}{dt^n}$ é a n -ésima derivada de $f(t)$.

2. Se $\alpha = 0$, recupera-se a própria função, ou seja, $D^0 f(t) = f(t)$.

3 I MODELO MATEMÁTICO

O processo de modelagem matemática consiste, essencialmente, em expressar por meio de equações uma determinada situação de interesse. Cada vez mais é crescente o número de modelos utilizados na descrição de fenômenos biológicos. A partir do estudo das soluções de tais modelos, é possível fazer previsões acerca do futuro da população em estudo.

Em doenças virais, como a AIDS e a hepatite, há inúmeros modelos que descrevem a interação entre as populações de células e vírus livres [8, 9, 11]. O primeiro modelo usado para descrever a dinâmica da hepatite B foi proposto por [14]. Tal modelo foi formulado por meio de equações diferenciais ordinárias e é derivado do diagrama da Figura 1 seguinte.

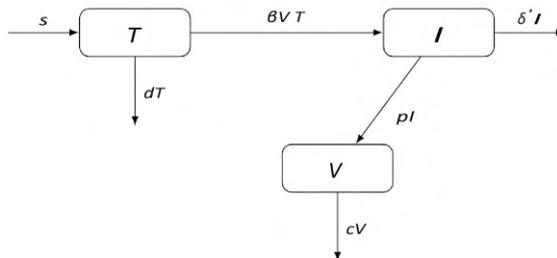


Figura 1: Dinâmica da infecção pelo vírus HBV.

Esse modelo considera três variáveis de estado no tempo t : as células não infectadas, $T(t)$, as células infectadas, $I(t)$, e vírus livres $V(t)$. As células não infectadas, ou seja, células suscetíveis à infecção são produzidas a uma taxa constante s e morrem a uma taxa d . Essas células tornam-se infectadas pela taxa β , que é proporcional à concentração de células não infectadas e à concentração de vírus. Células infectadas são produzidas a uma taxa β e são eliminadas pela taxa constante de morte δ' . Essa taxa de morte deve ser diferente da taxa de morte de células não infectadas, ou seja, $d \neq \delta'$ devido a carga viral ou ao efeito imune. Depois da infecção, a taxa de produção de vírus é p por células infectada e os vírus são liberados a uma taxa c .

Nos últimos anos, diversas drogas têm sido usadas no tratamento da hepatite B. A eficácia de cada uma delas apresenta resultados variáveis. O principal objetivo no tratamento da infecção crônica pelo vírus HBV é o de suprimir a replicação viral antes que ocorram danos irreversíveis no fígado [7, 11].

Nesse contexto, torna-se necessário incorporar ao modelo proposto por [14], parâmetros que indiquem a presença de terapia contra a doença, uma vez que tal modelo considera que a taxa de morte de células infectadas, dado pelo parâmetro δ' , ocorre devido somente ao efeito da resposta imune. Esse modelo não considera fatores externos que levam a essa taxa de morte de células infectadas, como a ação de antivirais.

O tratamento com algum fármaco inibe o processo de transcrição reversa, necessário para a formação de novos vírus. Isso significa que, sob a ação de alguma droga, a produção de novos vírus, p , é decrescente. A eficácia da droga será dada pelo parâmetro ϵ , $0 \leq \epsilon \leq 1$, no qual $\epsilon = 0$ significa que a terapia não possui efeito em bloquear novas infecções e $\epsilon = 1$ indica que a droga bloqueia totalmente a produção viral. Assim, a taxa de produção de novos vírus sob a ação de terapia é proporcional à produção de novos vírus, ou seja, $(1 - \epsilon)p$.

Alguns estudos apontam que, na presença de inibidores de transcrição reversa, a maioria das células não infectadas permanecem intactas. Isso ocorre devido à formação de cccDNA (do inglês, *circular covalently closed DNA*) que protege as células saudáveis de tornarem-se infectadas. Assim, para incorporar o efeito da droga em bloquear novas infecções, foi introduzido o parâmetro η . Sob a ação de terapia, a taxa de infecção de células é proporcional à taxa de contágio celular, ou seja, $(1 - \eta)\beta$.

De posse das considerações acima, a versão fracionária para o modelo de hepatite B pode ser escrita como

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) &= s - dT(t) - (1 - \eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) &= (1 - \eta)\beta V(t)T(t) - \delta' I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) &= (1 - \epsilon)pI(t) - cV(t), \end{cases} \quad (4)$$

em que D^α representa a derivada de Caputo de ordem α , $0 < \alpha \leq 1$. A análise de estabilidade desse modelo, pode ser vista em [3, 4].

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

No sistema (4) considere que o tratamento bloqueia novas infecções, ou seja, $\eta = 1$, e a eficácia em bloquear a produção viral é $\epsilon = 1$. Dessa forma, a equação que envolve a carga viral pode ser resolvida isoladamente. O problema de valor inicial de ordem fracionária

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) = s - dT(t) - (1 - \eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) = (1 - \eta)\beta V(t)T(t) - \delta I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) = (1 - \epsilon)pI(t) - cV(t), \end{cases} \quad (4)$$

Aplicando a transformada de Laplace [2], obtém-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[D^\alpha V(t)] &= \mathfrak{L}[-cV(t)], \\ s^\alpha \mathfrak{L}[V(t)] - s^{\alpha-1}V_0 &= -c\mathfrak{L}[V(t)], \\ \mathfrak{L}[V(t)] &= \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + c}. \end{aligned}$$

Daí

$$V(t) = V_0 E_\alpha(-ct^\alpha),$$

em que c é uma constante positiva e representa a taxa de liberação de vírus, V_0 é carga viral no tempo $t = 0$ e $E_\alpha(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro [2].

Para realizar as simulações foram utilizados os métodos numéricos NSFD [13] e Runge Kutta, para os modelos de ordem fracionária e de ordem inteira (SI), respectivamente. Para analisar a influência do expoente fracionário no comportamento da solução foram utilizados diversos valores para α . Os dados são provenientes de um estudo realizado em dois hospitais de Hong Kong, com 15 pacientes portadores crônicos do vírus HBV. Na semana 0 (semana inicial do estudo) foi analisada a concentração viral de cada um, então cada indivíduo recebeu dosagens iguais de Lamivudine (150mg/d). Durante 100 dias os pesquisadores acompanharam e mediram a carga viral de cada paciente. No início do tratamento as cargas virais foram $V_1(0) = 1,1 \times 10^4$ cópias/ml e $V_2(0) = 1,2 \times 10^3$ cópias/ml [11, 3]. Os parâmetros numéricos utilizados foram $h = 0,001$, $t = 200$ dias.

A solução numérica para o modelo (5) é apresentada na figura, juntamente com os dados, referentes a carga viral de dois pacientes, denotados por P_1 e P_2 .

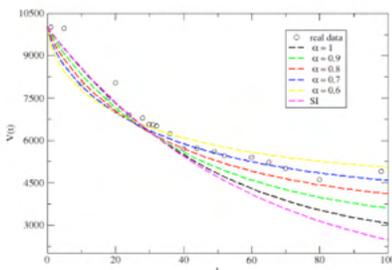


Figura 2: Paciente P_1

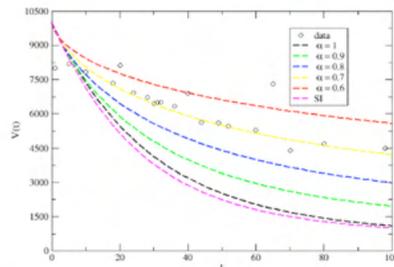


Figura 3: Paciente P_2

Para o paciente P_1 , podemos observar que a partir da segunda semana de tratamento ocorre um decaimento exponencial na carga viral. Esse fato corresponde a resposta inicial ao tratamento, uma vez que é alta a concentração de vírus na circulação sanguínea, assim as células de defesa agem rapidamente para combater tais vírus. Com o passar das semanas, nota-se que a carga viral diminui de forma mais lenta até tornar-se estável.

Para o paciente P_2 , podemos observar que na segunda semana de tratamento a carga viral é maior do que na semana 0. Isso se dá pela resistência do vírus contra a medicação. Nesses casos é indicado o tratamento com mais de uma droga, Lamivudine e Interferon, por exemplo. Podemos notar também que a carga viral demora um tempo maior para se estabilizar. Em ambos os casos, nota-se que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é de ordem não inteira $\alpha = 0,7$.

5 | CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática, por meio de derivadas de ordem não inteira para a hepatite B. A partir de simulações numéricas nota-se que os diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos distintos da solução, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio. Os resultados apontaram que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada. Esse resultado é relevante, pois indica que a modelagem de fenômenos biológicos pode ser feita, não somente por meio de equações diferenciais ordinárias, mas usando técnicas advindas do cálculo de ordem não inteira. Nesse contexto, a união da medicina e da modelagem matemática pode contribuir significativamente para o entendimento dos fatores que envolvem a progressão do vírus HBV e elucidar os mecanismos-chaves destes processos, e assim ser o suporte ideal para que num futuro próximo, possam ser traçadas estratégias de erradicação da doença e quem sabe, descrever outra história.

As continuações naturais deste trabalho são vastas, podem ser feitas tanto a partir da abordagem de novos modelos utilizando a mesma metodologia, quanto na incorporação de novos fatores no modelo apresentado.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao grupo de pesquisa *CF @FC* pelas importantes discussões.

REFERÊNCIAS

[1] O. M. Saúde. Hepatites Virais <https://www.gov.br/saude/pt-br/media/pdf/2021/julho/26/boletim-epidemiologico-de-hepatite-2021.pdf> Acesso 09/2021. 1–80, 2021.

- [2] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. *Cálculo fracionário*, Editora Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2015.
- [3] L. C. Cardoso Um modelo matemático para hepatite B por meio da derivada fracionária de Caputo, Tese de doutorado, Programa de Pós graduação em Biometria, UNESP, Botucatu, 2019.
- [4] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos, R. F. Camargo. Analysis of fractional-order models to Hepatitis B. *Computational and Applied Mathematics*, v. 04, p. 1–17, 2018.
- [5] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos and R. F. Camargo. Um modelo matemático para Hepatite B de ordem fracionária. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 06, n. 1, 2018.
- [6] K. Diethelm. The analysis of fractional differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 2004.
- [7] M. S. Ferreira. Diagnóstico e tratamento da Hepatite B. *Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical*, v. 33, 389–400, 2000.
- [8] M. Farman, A. Ahmad, A. S. Umer, A. Hafeez. A mathematical analysis and modelling of hepatitis B model with non integer time fractional derivative. *Communications in Mathematics and Applications*, v. 10, 571–584, 2019.
- [9] J. E. Forde, S. M. Ciupe, A. C. Arias and S. Lenhart. Optimal control of drug therapy in a Hepatitis B model. *Applied Sciences*, v. 6, 1–18, 2016.
- [10] H. Kheiri, M. Jafari. Stability analysis of a fractional order model for the HIV/AIDS epidemic in a patchy environment. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 346, 323–339, 2019.
- [11] S. R. Lewin, R. M. Ribeiro, T. Walters and G. K. Lau. Analysis of Hepatitis B viral load decline under potent therapy: complex decay profiles observed. *Hepatology*, v. 34, 1012–1019, 2001.
- [12] C. Maji, D. Mukherjee, D. Kesh. Study of a fractional-order model of chronic wasting disease. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1–14, 2020.
- [13] R. Mickens, A. Smith. Finite-difference models of ordinary differential equations: influence of denominator functions. *Journal Franklin Institute*, v. 327, 143–149, 1990.
- [14] M. Nowak, S. Bonhoeffer, A. Hill, R. Boehme, H. C. Thomas, H. McDade. *Viral dynamics in Hepatitis B virus infection*. Proc Natl Acad Sci. v. 93, 4398–4402, 1996.
- [15] M. D. Ortigueira, J. A. T. Machado, *What is a fractional derivative?* Journal of Computational Physics, v. 293, 4–13, 2015.
- [16] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fract. Calc. App. Anal.*, v. 5(4), 367–386, 2002.

- [17] M. S. Salman, A. M. Yousef. On a fractional-order model for HBV infection with cure of infected cells. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 1–7, 2017.
- [18] R. Shi, T. Lu, C. Wang. Dynamic analysis of a fractional-order model for hepatitis B virus with Holling II functional response. *Complexity*, 2019.
- [19] S. Ullah, M. A. Khan. A fractional order HBV model with hospitalization. *Discrete and continuous systems*, v. 13, 957–974, 2020.
- [20] S. Ullah, M. A. Khan, M. Farooq. A new fractional model for the dynamics of the hepatitis B virus using the Caputo-Fabrizio derivative. *The European Physical Journal Plus*, v. 133, 2018 .
- [21] S. Zibaei, M. Nanjoo. A nonstandard finite difference scheme for solving fractional-order model of HIV-1 infection of CD4+ T-cells. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, v. 6, n. 2, 169–184, 2015.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Análisis 2, 36, 37, 148, 149, 150, 152, 158, 159, 160, 161, 164, 186, 187, 188, 190, 191, 192, 194, 196, 197, 199, 206, 207, 210, 211, 212, 217

Anos iniciais 11, 12, 13, 21, 48, 54

Aprendizado 26, 29, 47, 83, 95, 104, 106, 133, 168, 169, 177

Aprendizaje 36, 40, 42, 43, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 187, 188, 190, 191, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 221

Avaliação 12, 13, 20, 21, 27, 28, 29, 49, 61, 103, 105, 106, 107, 108, 110, 114, 116, 119, 120, 175, 176, 178, 180, 182, 183, 184, 185

Avaliação em larga escala 13

Avaliação em sala de aula 13

B

Bola ao cesto 168, 169

Brasil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 20, 21, 24, 26, 27, 32, 48, 83, 86, 94, 100, 104, 107, 109, 110, 111, 122, 123, 129, 174, 218

Busca em vizinhança variável 142

C

Cálculo 66, 74, 75, 104, 108, 113, 116, 118, 123, 124, 128, 129, 147, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 192, 203, 211

Ciclovías 206, 207

Cognición 158, 165

Competencias 36, 37, 40, 41, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 193, 196, 197, 198, 199

Computador 22, 24, 26, 29, 32, 33, 132, 145

Conceito 11, 28, 47, 51, 52, 53, 62, 74, 75, 76, 83, 95, 106, 135, 178, 180, 182, 185, 201, 203, 204

D

Derivada de caputo 122

Desempenho discente 113

Discalculia do desenvolvimento 103, 104, 105, 106, 110, 111

E

Educação infantil 96, 168, 169, 170, 174

Educação matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 33, 62, 64, 83, 84, 86, 88, 89, 90, 103, 105, 111, 131, 140, 175, 184, 201, 204, 205, 245

Educación en ingeniería 147, 149

Enseñanza 2, 34, 35, 36, 37, 43, 44, 148, 149, 158, 160, 164, 186, 187, 189, 191, 193, 221, 222

Ensino 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 35, 47, 48, 49, 51, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 72, 73, 74, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 117, 118, 120, 121, 131, 132, 133, 134, 135, 140, 141, 168, 169, 175, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 200, 201, 202, 205, 245

Ensino da matemática 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 22, 23, 25, 28, 32, 35, 87, 89, 100, 108, 118, 121, 131, 168, 169

Ensino médio 5, 27, 33, 65, 66, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 115, 120

Equações de difusão 228

Estadística 36, 165, 206, 207, 217

Estilos de aprendizagem 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153

Estimativas de energia 228

Estratégias 62, 66, 73, 85, 90, 91, 92, 94, 96, 105, 108, 128, 132, 133, 134, 168, 169, 177, 179, 181, 184, 202

F

Ferramenta 5, 8, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 88, 89, 91, 92, 98, 100, 101, 140, 145, 146

Formación docente 34, 197

Fractales 218, 219, 220, 221, 222, 225, 226, 227

G

Génesis instrumental 218, 220, 221

Geogebra 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 222, 226

H

Hepatite B 122, 129

História da educação matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11

História da matemática 4, 11, 200, 201, 202, 204, 205

I

Instrumentalização 47, 48

L

Ludicidade 84, 85, 86, 87, 90, 94, 95, 96, 99, 100, 245

M

Matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 32, 33, 35, 41, 47, 48, 51, 61, 62, 63, 64, 65, 68, 72, 73, 75, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 120, 121, 125, 128, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 144, 148, 159, 164, 165, 168, 169, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 186, 187, 198, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 218, 219, 220, 222, 226, 228, 233, 245

Mentimeter 131, 132, 135, 136, 137, 138, 139, 140

Método dos elementos finitos 236

Metodologia 4, 7, 11, 23, 27, 65, 66, 91, 98, 99, 128, 134, 137, 140, 175, 178, 180, 182, 184, 185, 200, 202

Métodos numéricos 127, 147, 148, 152

Modelagem fracionária 122

P

Práticas docentes 1, 8, 133

Princípios teóricos 103

Problema de autovalores 236

Professores 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 48, 49, 50, 51, 53, 60, 61, 62, 64, 65, 73, 85, 86, 87, 90, 98, 99, 101, 108, 109, 113, 114, 115, 131, 132, 133, 134, 136, 139, 140, 141, 168, 177, 178, 180, 181, 182, 185, 201, 202, 203, 204, 245

Projetos extra-curriculares 121

R

Registro 61, 168, 171, 176, 179, 182

Resolução de problemas 66, 92, 94, 134, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 205

Resolución de problemas 158, 164, 165, 190, 191, 193, 194, 198

Restauração 142, 143, 145, 146

Riser de aço em catenária 235, 236

S

Sequência didática 64, 66, 72, 73, 74, 82, 83

Significado 40, 47, 51, 52, 58, 59, 60, 61, 85, 138, 162, 181, 192, 201, 202, 203, 222

Sistemas de distribuição 142, 145, 146

Software 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 141, 191

Soluções fracas 228, 229

T

Tecnologias digitais 131, 132, 140

Teorema da comparação 228

Testemunhos de professores 1

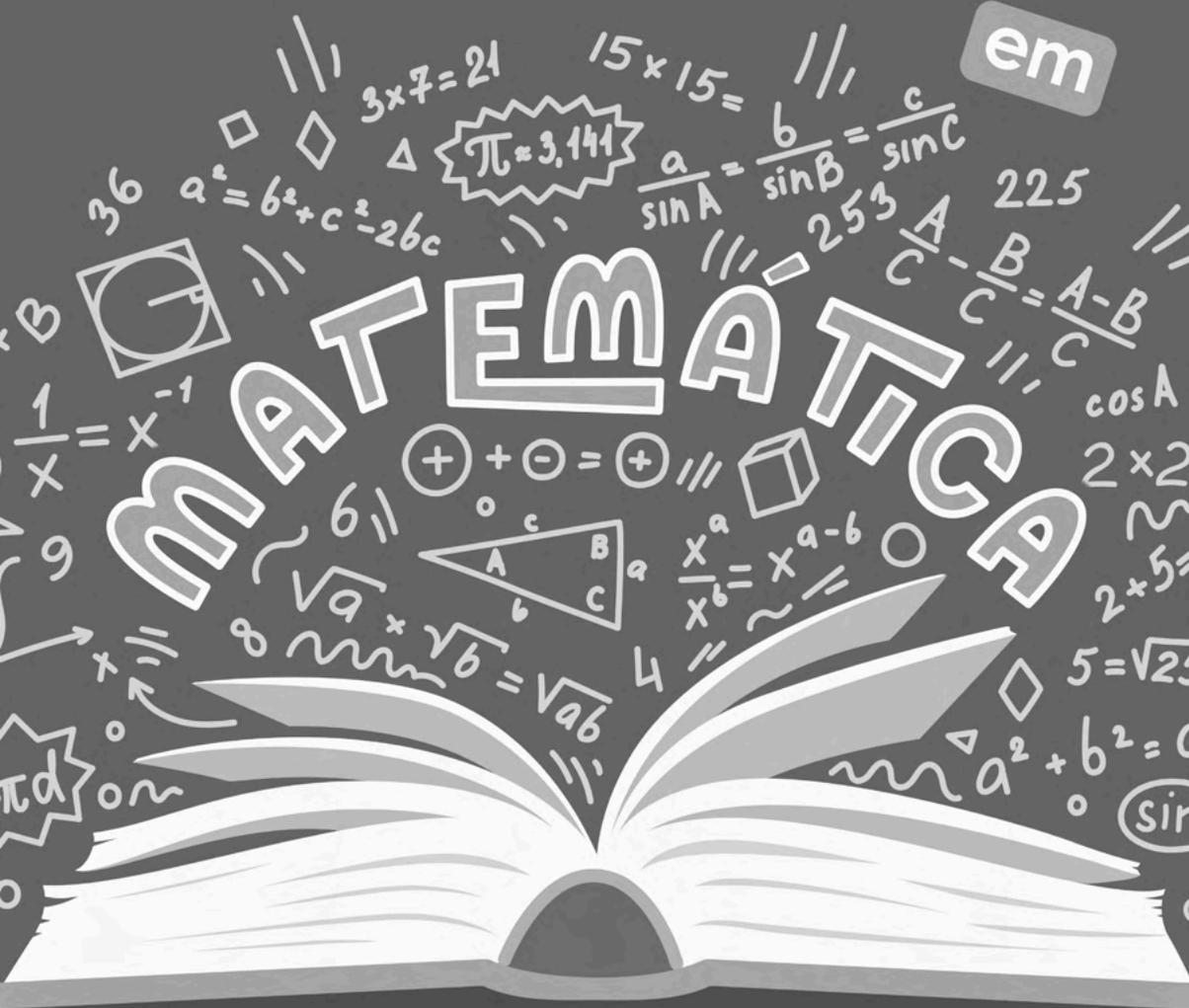
Toma de decisiones 43, 206, 207

V

Vibrações livres 236

Volume do paralelepípedo 64, 66, 74, 82

PESQUISAS DE VANGUARDA

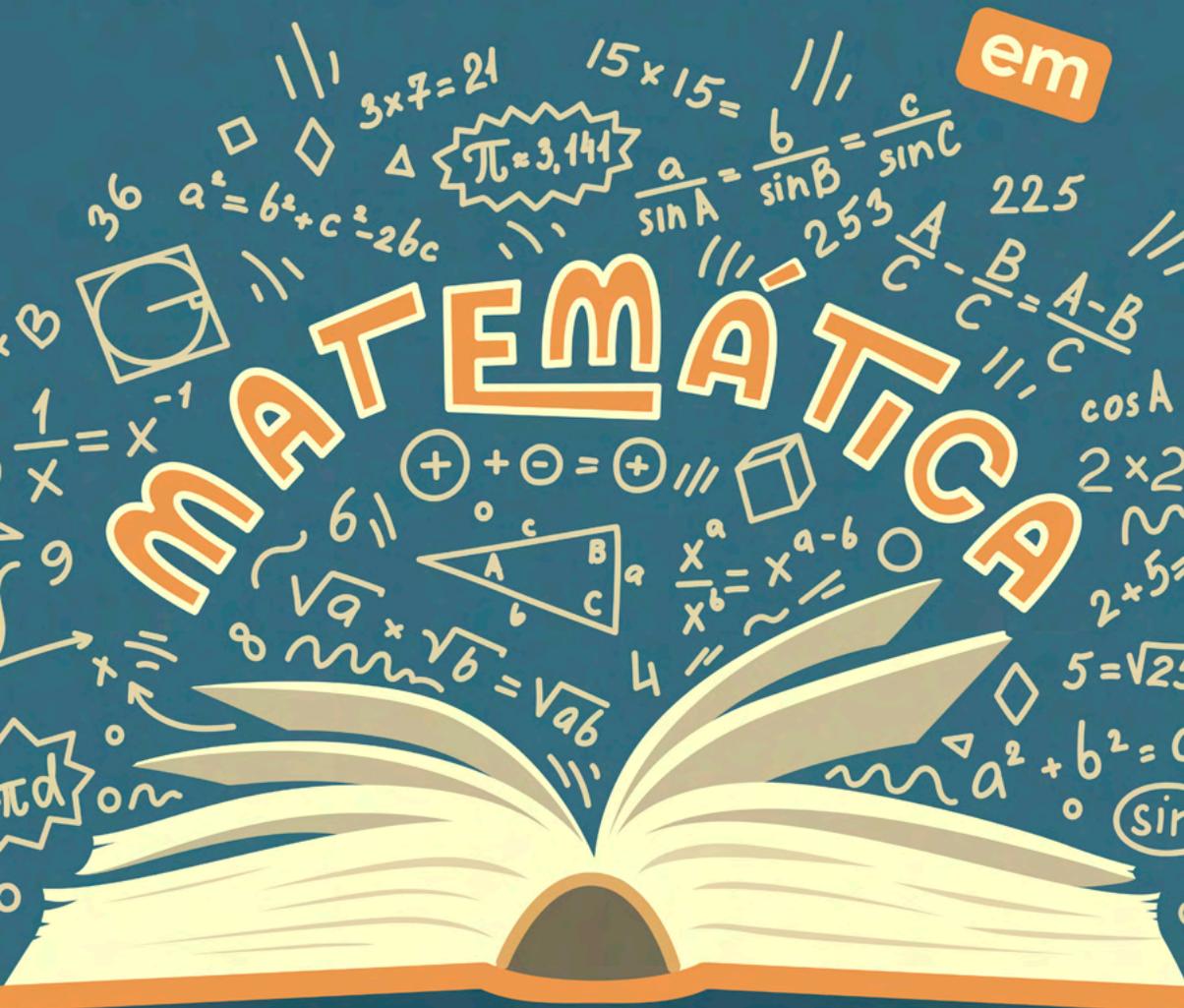


e suas aplicações

PESQUISAS DE VANGUARDA

em

MATEMÁTICA



e suas aplicações