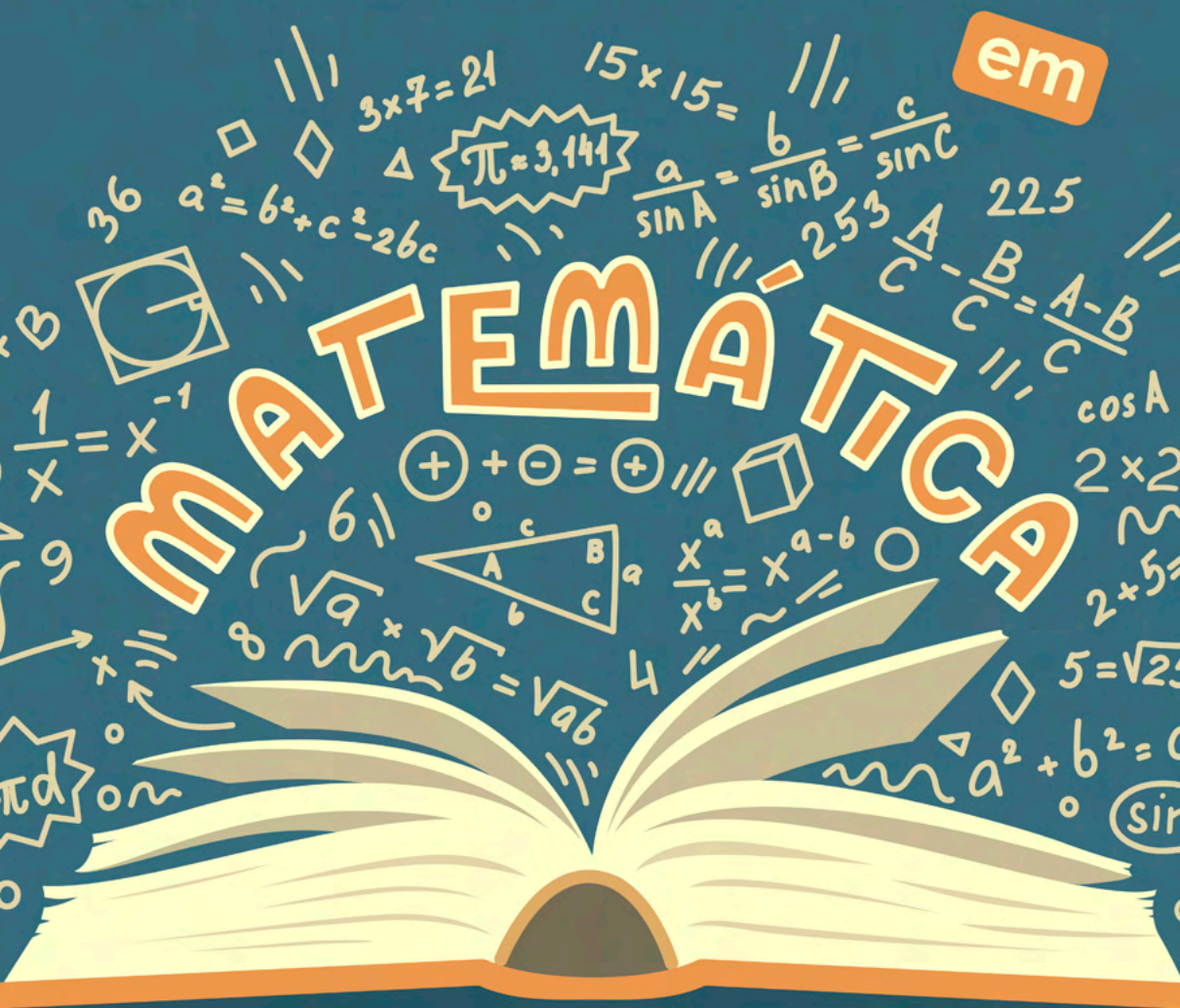


Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



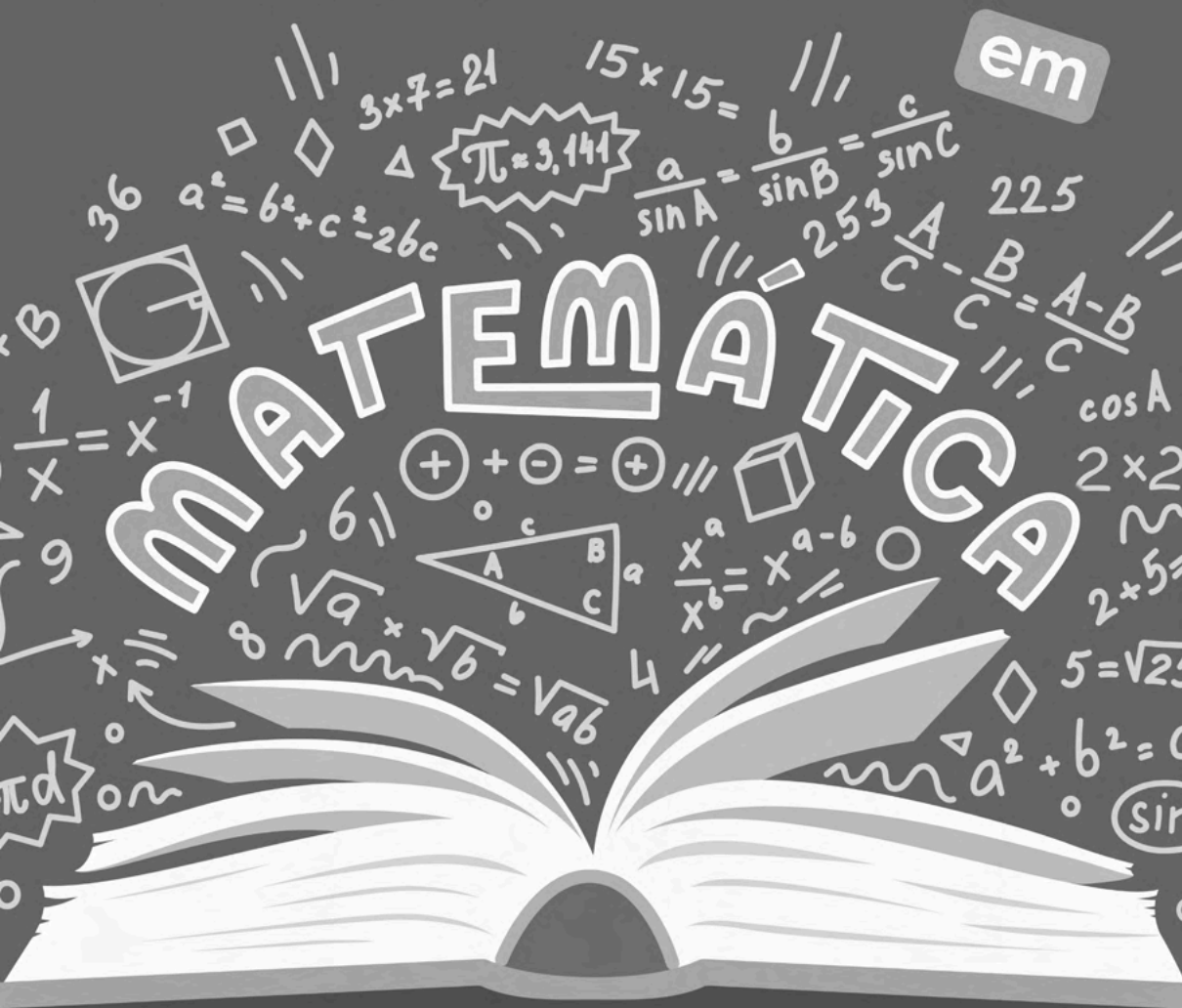
e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

2

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaidy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações
2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva,
André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena,
2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-773-1

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.731220601>

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da
(Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador).
III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br



Atena
Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o volume 2 do livro “**Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações**” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da

Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

DÁMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41>. Acesso em: 18 maio. 2021.


SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

PESQUISAS EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA EM ALGUMAS INSTITUIÇÕES ESCOLARES DO BRASIL

Edivânia Graciela Neves Lima

Gladys Denise Wielewski

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206011>

CAPÍTULO 2..... 12


ASSESSMENT BELIEFS AND PRACTICES IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION IN BRAZIL

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

Ednei Luís Becher

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Michiel Veldhuis

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206012>

CAPÍTULO 3..... 22


REPRESENTAÇÕES SOCIAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE DUAS ESCOLAS PÚBLICAS DA CIDADE DE PARAÍSO DO TOCANTINS SOBRE O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO

Elismar Dias Batista

William Isao Tokura

Jeidy Johana Jimenez Ruiz

Priscila Marques Kai

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206013>


CAPÍTULO 4..... 34

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES. PLAN DE ESTUDIOS 2012

Edith Arévalo Vázquez

Hilda Alicia Guzmán Elizondo

Nancy Bernardina Moya González

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206014>

CAPÍTULO 5..... 47

CONSTRUINDO O CONCEITO E OPERACIONALIZANDO FRAÇÕES COM MATERIAIS CONCRETOS – VERSÃO COMPLETA


Givaldo da Silva Costa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206015>

CAPÍTULO 6..... 64

O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NAS UARC'S

Leandro Pantoja da Costa


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206016>

CAPÍTULO 7..... 84

A LUDICIDADE E O ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: O QUE REVELAM ALGUMAS PRODUÇÕES ESCRITAS?

José Duilson Filho

Américo Junior Nunes da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206017>


CAPÍTULO 8..... 103

DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO: CARACTERÍSTICAS, AVALIAÇÃO E INTERVENÇÃO

Talita Neves Silva

Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti


Isabel Cristina Lara Machado

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206018>

CAPÍTULO 9..... 113

ESTUDO QUANTITATIVO DO DESEMPENHO DISCENTE ATRAVÉS DO PROJETO PRÉ-CALOURO E NIVELAMENTO DA ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA EST/UEA

Elaine Ladislau Ferreira Pereira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7312206019>


CAPÍTULO 10..... 122

ANÁLISE PRELIMINAR DA DINÂMICA DO VÍRUS HBV POR MEIO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Lislaine Cristina Cardoso

Fernando Luiz Pio dos Santos

Rubens Figueiredo Camargo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060110>

CAPÍTULO 11..... 131

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O USO DA PLATAFORMA MENTIMETER NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS


Anderson Dias da Silva

Geriane Pereira da Silva

Joás Mariano da Silva Júnior

Carla Saturnina Ramos de Moura

Lucília Batista Dantas Pereira


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060111>

CAPÍTULO 12..... 142

MODELO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RESTAURAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

Guilherme Florindo Afonso


Antonio Marcos Cossi

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060112>

CAPÍTULO 13..... 147

ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS A NIVEL LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN PUEBLA


Carlos David Zapata y Sánchez
María Guadalupe López Molina

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060113>

CAPÍTULO 14..... 158

ANÁLISIS COGNITIVO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO


Leopoldo Zúñiga-Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060114>

CAPÍTULO 15..... 168

“BOLA AO CESTO”: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Claudia Croce Costalonga

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060115>

CAPÍTULO 16..... 175

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA


Márcio Pironel
Lourdes de la Rosa Onuchic

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060116>

CAPÍTULO 17..... 186

¿QUÉ COMPETENCIAS APORTA ANÁLISIS MATEMÁTICO 2 AL GRADUADO DE INGENIERÍA?

Sara Aida Alaniz
Gladys Carmen May
Marcela Natalia Baracco
Roberto Javier Simunovich





 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060117>

CAPÍTULO 18..... 200

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO SUBSÍDIO PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE RAZÃO, PROPORÇÃO E TEOREMA DE TALES

Elismar Dias Batista
Willian Isao Tokura
Jeidy Johana Jimenez Ruiz
Priscila Marques Kai

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060118>

CAPÍTULO 19.....	206
ANÁLISIS ESTADÍSTICO APLICADO EN LA PROPOSICIÓN DE UNA RED DE CICLOVÍAS EN EL GRAN SAN JUAN	
Mariana Laura Espinoza Aníbal Leodegario Altamira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060119	
CAPÍTULO 20.....	218
GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA NOCIÓN DE FRACTAL EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO	
Daisy Julissa García-Cuéllar Mihály André Martínez-Miraval Jesús Victoria Flores Salazar	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060120	
CAPÍTULO 21.....	228
ESTIMATIVAS DA NORMA DO SUP DE SOLUÇÕES LIMITADAS DE EQUAÇÕES DE DIFUSÃO NÃO LINEARES	
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum Paulo Ricardo de Ávila Zingano	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060121	
CAPÍTULO 22.....	235
FREE VIBRATIONS OF CATENARY RISERS WITH INTERNAL FLUID	
Joseph Arthur Meléndez Vásquez Juan Pablo Julca Ávila	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.73122060122	
SOBRE OS ORGANIZADORES	245
ÍNDICE REMISSIVO.....	246

GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA NOCIÓN DE FRACTAL EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO

Data de aceite: 01/12/2021

Daysi Julissa García-Cuéllar

Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
<https://orcid.org/0000-0003-0243-6353>

Mihály André Martínez-Miraval

Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
<https://orcid.org/0000-0001-7734-1223>

Jesús Victoria Flores Salazar

Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
<https://orcid.org/0000-0002-0036-140X>

RESUMEN: La presente investigación tiene por objetivo analizar el proceso de génesis instrumental de la noción de fractal en profesores de matemática de nivel secundario. Se utilizaron aspectos del Enfoque Instrumental y del estudio de caso como base teórica y metodológica respectivamente. Profesores de Perú, Brasil, México, Cuba y Colombia desarrollaron una secuencia de actividades donde movilizaron algunas características de la noción de fractal, como la repetición de procesos infinitos o la reproducción del mismo patrón a diferentes escalas, al realizar iteraciones tanto de estructura numérica como geométrica. Los profesores interactuaron con diferentes tecnologías (material concreto y GeoGebra), lo que les

permitió construir distintos modelos de fractales como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, el Copo de hielo de Koch, entre otros. Las producciones presentadas por los profesores tanto en material concreto como en GeoGebra, evidencian que se generó la génesis instrumental de la noción de fractal en los profesores.

PALABRAS CLAVE: Fractales; GeoGebra; Génesis Instrumental; Formación de profesores.

INSTRUMENTAL GENESIS OF THE NOTION OF FRACTAL IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS

ABSTRACT: The present research aims to analyze the process of instrumental genesis of the notion of fractal in high school mathematics teachers. Aspects of the Instrumental Approach and the case study were used as theoretical and methodological basis respectively. Teachers from Peru, Brazil, Mexico, Cuba and Colombia developed a sequence of activities where they mobilized some characteristics of the fractal notion, such as the repetition of infinite processes or the reproduction of the same pattern at different scales, when performing iterations of numerical and geometric structure. The participants interacted with different technologies (concrete material and GeoGebra), which allowed them to build different fractal models such as the Cantor set, the Sierpinski triangle, the Koch Iceflake, among others. The productions presented by the participants, both in concrete material and GeoGebra, show that the instrumental genesis of the notion of fractal was generated in the teachers.

KEYWORDS: Fractals; GeoGebra; Instrumental

1 | INTRODUCCIÓN

La noción de fractal es importante porque tiene una diversa y destacable aplicabilidad en problemas relacionados con la medicina, la meteorología, la economía e incluso en la misma naturaleza.

El concepto de Fractal presenta cierto grado de complejidad, sin embargo, se puede introducir esta noción de una manera sencilla en el aula de matemática en el nivel de secundaria. Por ello, nuestra investigación se orienta a que los profesores de este nivel se apoderen de algunas características de esta noción y puedan utilizarla en sus enseñanzas.

Los investigadores Oviedo, Kanashiro y Colombini (2004) señalan que el término Fractal “está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria” (p. 11).

Así mismo, los investigadores mencionan que los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por tanto, se puede concebir una construcción fractal como una figura autosemejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Por otro lado, Oviedo, Kanashiro y Colombini indican que los fractales son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas, lo que implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente. Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar sus comportamientos y tienen dimensión fraccionaria.

La noción de fractal forma parte del currículo de matemática de diferentes países de Latinoamérica, en particular, del currículo de matemática de Perú. En el libro de texto del área de matemática del VII ciclo de Educación Básica Regular del Ministerio de Educación del Perú-MINEDU, texto para estudiantes de 13 a 14 años de edad, se muestran actividades relacionadas con la noción de Fractal, que buscan que los estudiantes generen una noción de este concepto, dado que en el libro de texto no se brinda una definición formal de este concepto. La figura 1 muestra la primera actividad sobre fractales.

La matemática en el fractal de Koch

El fractal de Koch es un famoso fractal cuya forma es similar a un copo de nieve. Sus tres primeros desarrollos se muestran en las figuras de la derecha.

Observamos que la figura ① es un triángulo equilátero. Para construir la figura ②, se dividió cada lado del triángulo en tres segmentos y, tomando como base el segmento del medio, se construyó otro triángulo equilátero borrando luego dicha base. Este proceso se repitió para construir la figura ③.

Considerando el patrón de la construcción, dibuja la figura ④ y cuenta el número de segmentos que tiene. Verifica tu solución utilizando una expresión matemática que permita calcular el número de segmentos de una figura n .



Fig. ①



Fig. ②



Fig. ③

Manos a la obra

¿Cómo podrás describir la formación de cada fractal? ¿Qué características del fractal debes tener en cuenta para dibujar el fractal de la figura ④? ¿Cómo podrás verificar la precisión de tu dibujo?

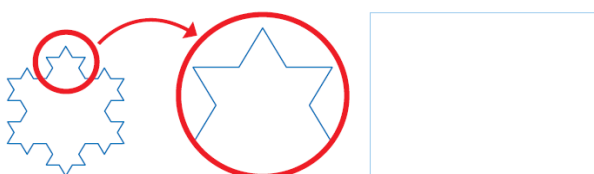
Figura 1. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

La actividad mostrada en la figura 1 presenta el fractal de Koch, el objetivo de esta actividad es que los estudiantes describan cómo se forma cada fractal, que identifiquen sus características, así como que reproduzcan cada uno de los modelos dados. La figura 2 muestra una siguiente actividad sobre fractales.

REPRODUCCIÓN A PARTIR DE MODELOS DADOS

3. Observa la ampliación de una parte de la figura ③. A partir de ello, dibuja la que será una parte de la figura ④.



¿Cuántos segmentos tiene la parte del fractal obtenida? _____

4. ¿Cuántas veces debes reproducir la figura obtenida para obtener la figura ④?
¿Puedes proyectar el número de segmentos de la figura ④?

Figura 2. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

Por lo anterior, surge la presente investigación que tiene por objetivo analizar el proceso de génesis instrumental de la noción de fractal en profesores de matemática de nivel secundario. Para ello, se ha diseñado una secuencia de actividades que permita por un lado, la instrumentalización de las características de la noción de fractal en el aula de una manera comprensible, así como la reflexión sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria, y por otro lado, el abordaje de

otros contenidos referentes a las características de los fractales como son la semejanza de figuras, progresión, área, perímetro, operaciones con fracciones, etc.

2 | ASPECTOS DEL ENFOQUE INSTRUMENTAL

Se utilizan aspectos del Enfoque Instrumental propuesto por Rabardel (1995), para la elaboración de las actividades pues nos brinda las directrices necesarias para el estudio en escenarios de enseñanza y aprendizaje con tecnologías. Las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:

Esquema: Organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

Artefacto: Es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto. Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción. La figura 3 muestra la composición de un instrumento.

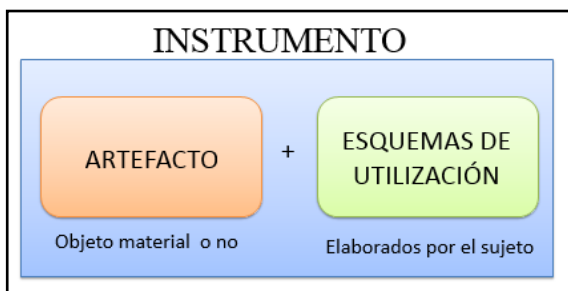


Figura 3. Componentes del instrumento

Fuente: Los autores

De acuerdo con Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental.

En cuanto a la génesis instrumental, el investigador sostiene que esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentalización: Está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación: Está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción

de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

Rabardel utiliza la noción de esquema redefinida por Vergnaud que menciona que un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

3 | METODOLOGÍA

Nuestra metodología es de corte cualitativo, en ese sentido, Denzin y Lincoln (1994) sostienen que la metodología cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentado dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas les otorgan. Asimismo, los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que por los resultados o productos.

En cuanto a los procedimientos metodológicos, la parte experimental se realizó en dos sesiones con docentes e investigadores que se enfocan en la enseñanza de la matemática en Educación Secundaria. En la primera sesión se realizaron actividades introductorias y en la segunda sesión, actividades que envuelven el uso de GeoGebra. A seguir se describen estos dos tipos de actividades.

Actividades introductorias, en las cuales se presentaron actividades dirigidas a la instrumentalización de las características de los fractales: autosimilitud, repetición de procesos infinitos, la reproducción del mismo patrón a diferentes escalas. Para la realización de estas actividades se utilizó lápiz y regla, así como la técnica del Kirigami (doblado y corte de papel). Se construyeron diferentes modelos de fractales como el triángulo de Sierpinski, el conjunto de cantor, entre otros.

Actividades con Geogebra, se propusieron actividades que permitieron inducir de forma intuitiva la noción de la recursividad y de infinito.

Las actividades se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se desarrollaron actividades de introducción a la noción de fractales y las primeras construcciones de fractales con la técnica de Kirigami. En la segunda sesión, se continuó con la actividad de construcción de fractales con el uso de GeoGebra.

Las actividades

A continuación, se presentan actividades de cada uno de los tipos mencionados anteriormente. La figura 4 muestra la actividad introductoria sobre la noción de fractal.

Actividades para entender la noción de fractal

► Conjunto de Cantor

Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor

Construcción del conjunto de cantor

- Dibuja un segmento de 13,5 cm de largo (medida opcional).
- El segmento anterior divídalo en tres partes iguales y borra la parte central.
- A cada uno de los nuevos segmentos divídalo en tres partes iguales y borra la parte central.
- Repite en cada uno de los nuevos segmentos obtenidos en proceso anterior.
- Si se continúa con el mismo procedimiento infinitamente:
 - ¿Qué ocurre con la magnitud de los segmentos obtenidos?
 - ¿Qué ocurre con la cantidad de los segmentos

Figura 4. Actividad introductoria presentada a los profesores.

Fuente: Datos de la investigación

Esta actividad se basó en la relación que presenta la noción de Fractal con la palabra *Fractus* que significa roto o no entero. Se esperaba que los profesores reconocieran cada segmento (pintados o en blanco) de cada fase en que se dividió el segmento inicial, como partes de una unidad. La figura 5 muestra la división de estos segmentos.

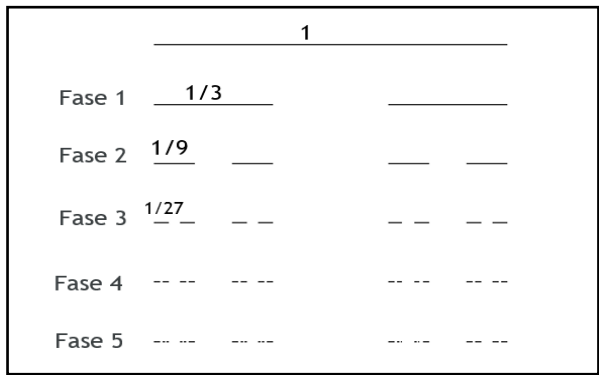


Figura 5. Reconociendo la medida de cada segmento dividido

Fuente: Datos de la investigación

Al inicio de la actividad, se repartió a los profesores distintos materiales como reglas, escuadras, lápices, compás, calculadora y una hoja que tenía un segmento de recta dibujado en la parte superior. Los profesores realizaron la división del segmento y mostraron distintas estrategias, la mayoría utilizó la calculadora para obtener la medida de los segmentos y luego la regla para trazarlos, sin embargo, hubo una profesora que hizo las divisiones utilizando el teorema de Thales, ya que el segmento no era de medida exacta

para cada partición que se solicitaba del segmento. Este último procedimiento se muestra en la figura 6.



Figura 6. Primera actividad realizada por los profesores.

Fuente: Datos de la investigación

Para finalizar esta actividad, se pidió a los profesores que apuntaran sus observaciones y traten de deducir algunos patrones que se generan al realizar estas particiones del segmento. La figura 7 muestra estos posibles patrones.

Actividades para entender la noción de fractal

► Conjunto de Cantor

Completar la siguiente tabla

Fase	1	2	3	4	...	k	Conjunto de Cantor $k \rightarrow \infty$
Números de segmentos	2	4	8	16	...	2^k	
Longitud de cada segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$...	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$...	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	0

Figura 7. Patrones generados.

Fuente: Datos de la investigación

Otra de las actividades del tipo introductorio involucra la técnica del Kirigami (doblado

y corte de papel). En este tipo de actividad, se realizaron las construcciones de los fractales conocidos como escalera de cantor, pirámide de Sierpinski, el libro fractal, entre otros.

Al inicio de la actividad, se repartió a los profesores materiales adicionales como hojas de colores y una tijera. Los profesores realizaron procesos iterativos y siguieron cierto patrón definido por el investigador para la partición de un segmento dado, luego procedieron a efectuar los cortes respectivos con la tijera y construir algunos fractales conocidos, tal y como se muestra en la figura 8.



Figura 8. Pirámide de Sierpinski elaborado por los profesores.

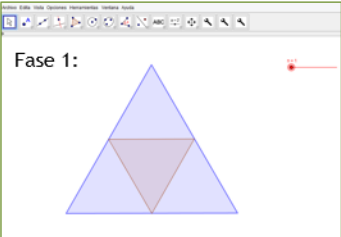
Fuente: Datos de la investigación

Al realizar esta actividad se evidenció que los profesores se sintieron motivados en la construcción de cada fractal. El libro fractal fue la construcción más elaborada y con mayor número de pasos, pero para ellos fue un reto, que al final lograron realizar.

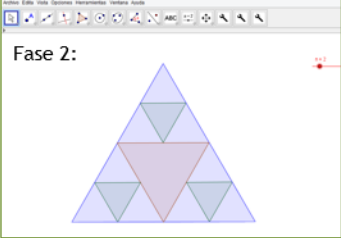
Entre las actividades propuestas a realizarse con GeoGebra, figura la presentación del triángulo de Sierpinski. Los investigadores diseñaron un applet en GeoGebra que, al movilizar un deslizador, se construye paso a paso este fractal. Los profesores tenían que movilizar un deslizador y según la fase que se encuentre debían responder a las preguntas mostradas en la figura 9.

Ficha triángulo de Sierpinski

Fase 1:



Fase 2:



¿Cuántos triángulos hay?
 ¿Cuánto mide la base de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide el área de cada triángulo?

¿Cuántos triángulos hay?
 ¿Cuánto mide la base de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo?
 ¿Cuánto mide el área de cada triángulo?

Figura 9. Actividad de triángulo de Sierpinski con Geogebra.

Fuente: Datos de la investigación

Al finalizar la secuencia de actividades, los profesores mostraron mayor interés en la construcción de los fractales mediante la técnica del Kirigami. En un primer momento, hicieron las construcciones con una plantilla, después de reconocer la secuencia de construcción pudieron realizar un libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

4 | CONSIDERACIONES FINALES

Consideramos que al concluir la experiencia los profesores instrumentalizaron las características de los fractales por medio de tecnologías de lápiz y papel y digitales como el caso de GeoGebra, y movilizaron esquemas preexistentes como semejanza de figuras, progresiones, segmentos, área, perímetro, así como la formación de nuevos esquemas relacionados con procesos infinitos, particiones iterativas, entre otras que permitieron instrumentar la noción de fractal. A su vez los profesores reflexionaron sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria.

REFERENCIAS

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks, California, 1994.

ESTRADA, F. **Geometría fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales**. Bogotá: Editorial Magisterio, 2004.

PERÚ, Ministerio de Educación del Perú, **Matemática 3**. Lima: Santillana, 2016.

OVIDEO, L.; KANASHIRO, A.; COLOMBINI, M. **Fractales: un universo poco frecuentado**. Santa fe: Ediciones UNL, 2004.

RABARDEL, P. **Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Université Paris. Armand Colin, 1995. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>

ÍNDICE REMISSIVO

A

Análisis 2, 36, 37, 148, 149, 150, 152, 158, 159, 160, 161, 164, 186, 187, 188, 190, 191, 192, 194, 196, 197, 199, 206, 207, 210, 211, 212, 217

Anos iniciais 11, 12, 13, 21, 48, 54

Aprendizado 26, 29, 47, 83, 95, 104, 106, 133, 168, 169, 177

Aprendizaje 36, 40, 42, 43, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 187, 188, 190, 191, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 221

Avaliação 12, 13, 20, 21, 27, 28, 29, 49, 61, 103, 105, 106, 107, 108, 110, 114, 116, 119, 120, 175, 176, 178, 180, 182, 183, 184, 185

Avaliação em larga escala 13

Avaliação em sala de aula 13

B

Bola ao cesto 168, 169

Brasil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 20, 21, 24, 26, 27, 32, 48, 83, 86, 94, 100, 104, 107, 109, 110, 111, 122, 123, 129, 174, 218

Busca em vizinhança variável 142

C

Cálculo 66, 74, 75, 104, 108, 113, 116, 118, 123, 124, 128, 129, 147, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 192, 203, 211

Ciclovías 206, 207

Cognición 158, 165

Competencias 36, 37, 40, 41, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 193, 196, 197, 198, 199

Computador 22, 24, 26, 29, 32, 33, 132, 145

Conceito 11, 28, 47, 51, 52, 53, 62, 74, 75, 76, 83, 95, 106, 135, 178, 180, 182, 185, 201, 203, 204

D

Derivada de caputo 122

Desempenho discente 113

Discalculia do desenvolvimento 103, 104, 105, 106, 110, 111

E

Educação infantil 96, 168, 169, 170, 174

Educação matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 33, 62, 64, 83, 84, 86, 88, 89, 90, 103, 105, 111, 131, 140, 175, 184, 201, 204, 205, 245

Educación en ingeniería 147, 149

Enseñanza 2, 34, 35, 36, 37, 43, 44, 148, 149, 158, 160, 164, 186, 187, 189, 191, 193, 221, 222

Ensino 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 35, 47, 48, 49, 51, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 72, 73, 74, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 117, 118, 120, 121, 131, 132, 133, 134, 135, 140, 141, 168, 169, 175, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 200, 201, 202, 205, 245

Ensino da matemática 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 22, 23, 25, 28, 32, 35, 87, 89, 100, 108, 118, 121, 131, 168, 169

Ensino médio 5, 27, 33, 65, 66, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 113, 115, 120

Equações de difusão 228

Estadística 36, 165, 206, 207, 217

Estilos de aprendizagem 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153

Estimativas de energia 228

Estratégias 62, 66, 73, 85, 90, 91, 92, 94, 96, 105, 108, 128, 132, 133, 134, 168, 169, 177, 179, 181, 184, 202

F

Ferramenta 5, 8, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 88, 89, 91, 92, 98, 100, 101, 140, 145, 146

Formación docente 34, 197

Fractales 218, 219, 220, 221, 222, 225, 226, 227

G

Génesis instrumental 218, 220, 221

Geogebra 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 222, 226

H

Hepatite B 122, 129

História da educação matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11

História da matemática 4, 11, 200, 201, 202, 204, 205

I

Instrumentalização 47, 48

L

Ludicidade 84, 85, 86, 87, 90, 94, 95, 96, 99, 100, 245

M

Matemática 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 32, 33, 35, 41, 47, 48, 51, 61, 62, 63, 64, 65, 68, 72, 73, 75, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 120, 121, 125, 128, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 144, 148, 159, 164, 165, 168, 169, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 186, 187, 198, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 218, 219, 220, 222, 226, 228, 233, 245

Mentimeter 131, 132, 135, 136, 137, 138, 139, 140

Método dos elementos finitos 236

Metodologia 4, 7, 11, 23, 27, 65, 66, 91, 98, 99, 128, 134, 137, 140, 175, 178, 180, 182, 184, 185, 200, 202

Métodos numéricos 127, 147, 148, 152

Modelagem fracionária 122

P

Práticas docentes 1, 8, 133

Princípios teóricos 103

Problema de autovalores 236

Professores 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 48, 49, 50, 51, 53, 60, 61, 62, 64, 65, 73, 85, 86, 87, 90, 98, 99, 101, 108, 109, 113, 114, 115, 131, 132, 133, 134, 136, 139, 140, 141, 168, 177, 178, 180, 181, 182, 185, 201, 202, 203, 204, 245

Projetos extra-curriculares 121

R

Registro 61, 168, 171, 176, 179, 182

Resolução de problemas 66, 92, 94, 134, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 205

Resolución de problemas 158, 164, 165, 190, 191, 193, 194, 198

Restauração 142, 143, 145, 146

Riser de aço em catenária 235, 236

S

Sequência didática 64, 66, 72, 73, 74, 82, 83

Significado 40, 47, 51, 52, 58, 59, 60, 61, 85, 138, 162, 181, 192, 201, 202, 203, 222

Sistemas de distribuição 142, 145, 146

Software 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 141, 191

Soluções fracas 228, 229

T

Tecnologias digitais 131, 132, 140

Teorema da comparação 228

Testemunhos de professores 1

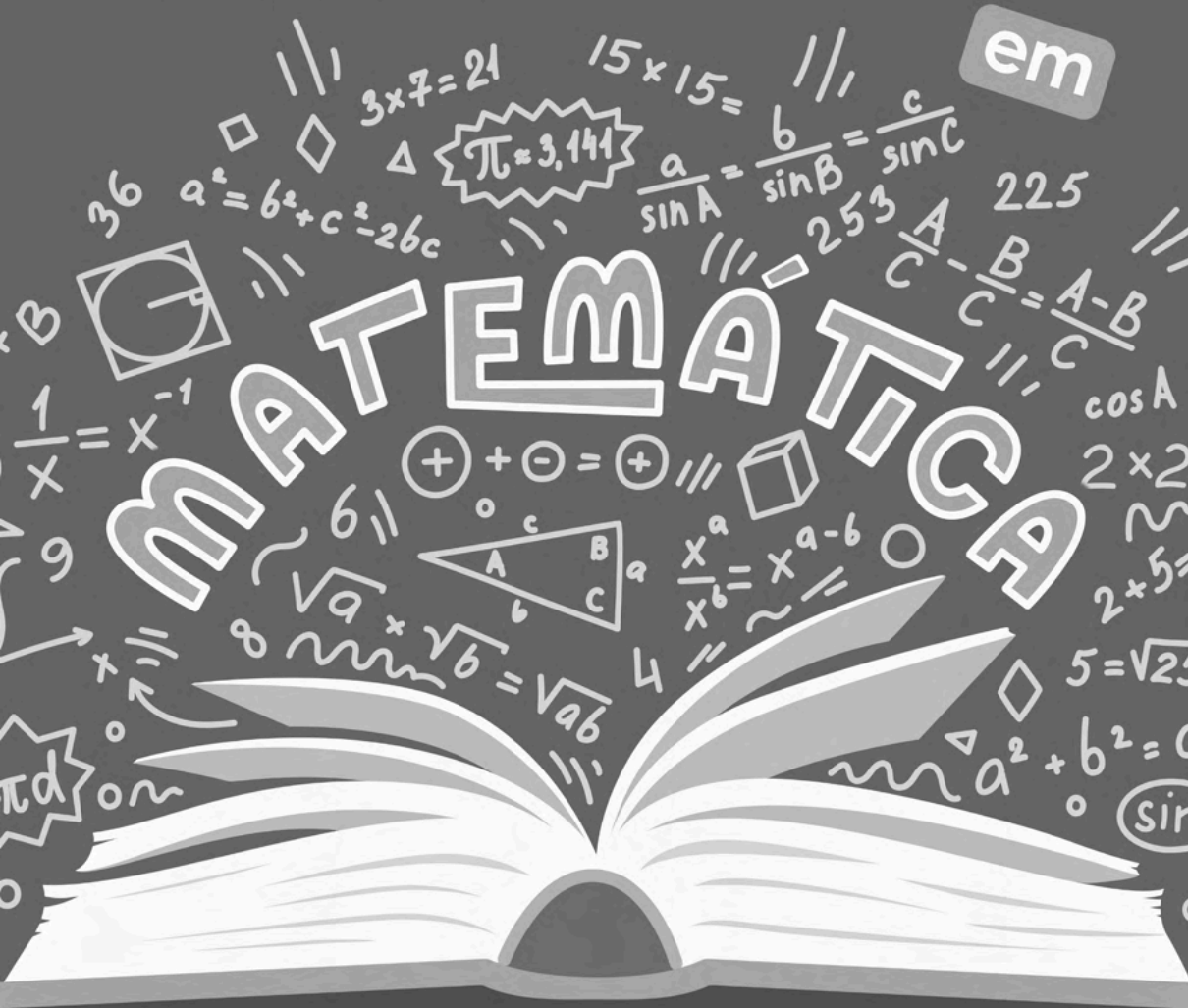
Toma de decisiones 43, 206, 207

V

Vibrações livres 236

Volume do paralelepípedo 64, 66, 74, 82

PESQUISAS DE VANGUARDA

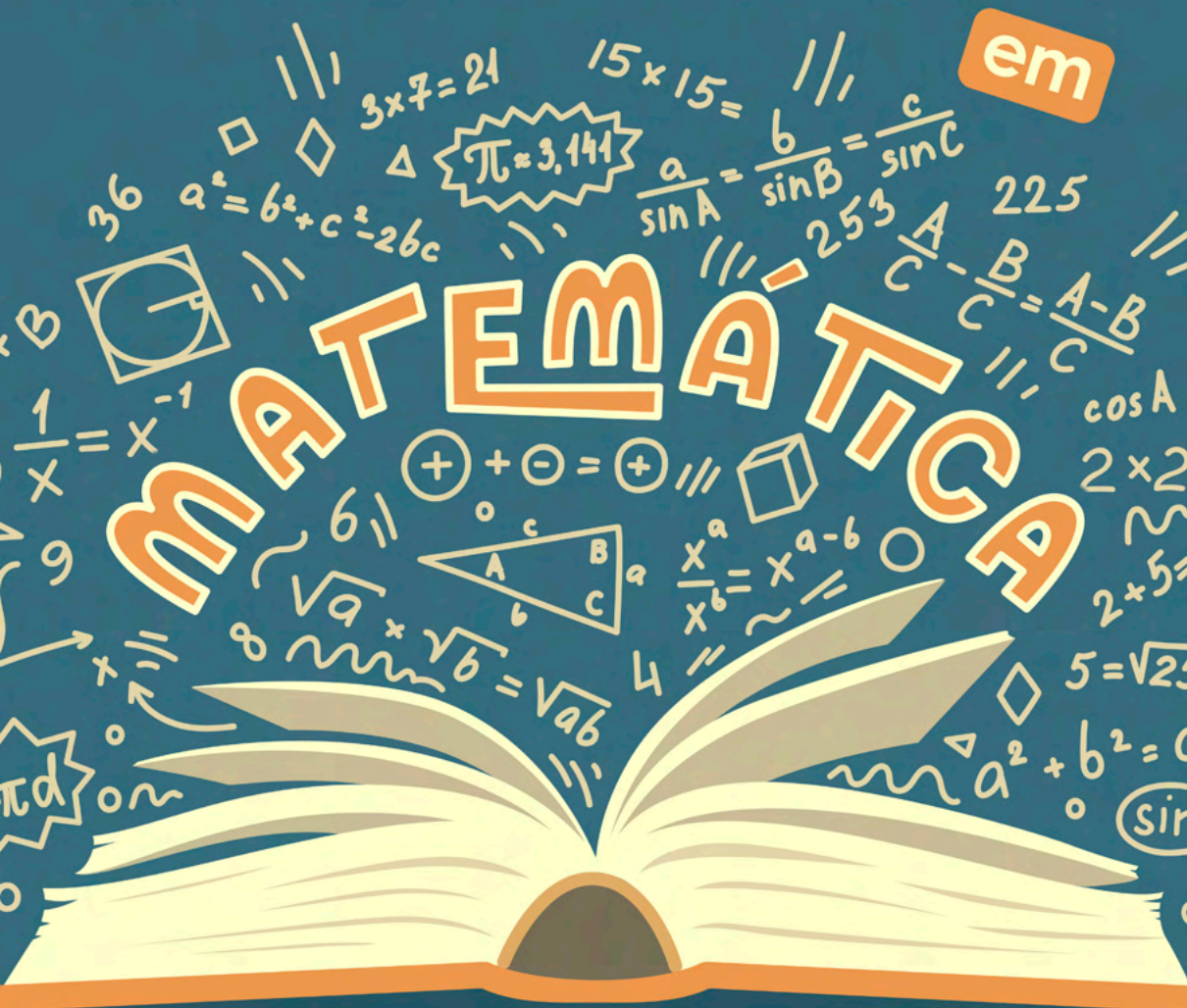


e suas aplicações

PESQUISAS DE VANGUARDA

em

MATEMÁTICA



e suas aplicações