

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizador: Armando Dias Duarte

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D812 Coleção desafios das engenharias: engenharia civil 3 /
Organizador Armando Dias Duarte. – Ponta Grossa -
PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-639-0

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.390212610>

1. Engenharia civil. I. Duarte, Armando Dias. II. Título.
CDD 624

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, desta forma não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A coleção de trabalhos intitulada “Coleção desafios das engenharias: Engenharia Civil 3” é uma obra que tem como foco principal a discussão científica por intermédio de trabalhos diversos que compõe seus capítulos. O volume abordará de forma categorizada e interdisciplinar trabalhos, pesquisas, relatos de casos e/ou revisões que através dos resultados, possam auxiliar na tomada de decisão, tanto no campo acadêmico, quanto no desenvolvimento profissional.

Os estudos apresentados, foram desenvolvidos em diversas instituições de ensino e pesquisa do país e também um caso internacional. Em todos esses trabalhos foram apresentadas diversas problemáticas a respeito do estudo de interação solo-estrutura, orçamento de obras, desempenho de materiais, aditivos para materiais da construção civil, análises através da ferramenta Building Information Modelling (BIM), gestão de resíduos **sólidos**, entre outros. Os estudos presentes nos trazem à tona, temas interdisciplinares através da segurança de obras civis, aspectos econômicos, sociais e ambientais.

Os temas discutidos nesta obra, possuem a proposta de fundamentar o conhecimento de acadêmicos, mestres e todos aqueles que de alguma forma se interessam pela área da Engenharia Civil, com temáticas atuais e que são apresentadas como desafios enfrentados pelos profissionais e acadêmicos, deste modo a obra “Coleção desafios das engenharias: Engenharia Civil 3”, apresenta uma teoria fundamentada nos resultados práticos obtidos pelos diversos professores e acadêmicos que desenvolveram seus trabalhos e pesquisas, os quais serão apresentados de maneira concisa e didática.

A divulgação científica é de suma importância para o desenvolvimento de toda uma nação, portanto, fica evidenciada a responsabilidade de transmissão dos saberes através de plataformas consolidadas e confiáveis, sendo a Atena Editora, capaz de oferecer uma maior segurança para os novos pesquisadores e os que já atuam nas diferentes áreas de pesquisa, exporem e divulguem seus resultados.

Armando Dias Duarte

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM EDIFICAÇÕES DE CONCRETO ARMADO SOBRE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS

Mateus Lima Barros

Vinicius Costa Correia

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126101>

CAPÍTULO 2..... 13

ANÁLISE DE HASTES DELGADAS EM GRELHAS HIPERESTÁTICAS

Antônio Luís Alves da Cunha

Luiz Carlos Mendes

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126102>

CAPÍTULO 3..... 28

ANÁLISE DE SÓLIDOS INELÁSTICOS SOB DEFORMAÇÃO FINITA USANDO ELEMENTOS BIARTICULADOS 2D E 3D

William Taylor Matias Silva

Sebastião Simão da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126103>

CAPÍTULO 4..... 46

APLICAÇÃO DA NORMA ABNT NBR 16747 (2020) – INSPEÇÃO PREDIAL EM EMPREENDIMENTOS RURAIS – ESTUDO DE CASO

Camilla Cristina Cunha Menezes

Marcos de Paulo Ramos

Thiago Pena Bortone

Rachel Jardim Martini

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126104>

CAPÍTULO 5..... 58

APLICAÇÃO DE CURSO EXTENSÃO DE ORÇAMENTO DE OBRAS EM BIM COMPARANDO COM A METODOLOGIA ATUAL DA DISCIPLINA DE ORÇAMENTO DE OBRAS DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO FEDERAL DE SERGIPE – CAMPUS ESTÂNCIA

Anna Cristina Araujo de Jesus Cruz

José Carlos de Anunciação Cardoso Júnior

Mariana Silveira Araujo

Natália Ramos dos Santos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126105>

CAPÍTULO 6..... 67

CORROSÃO NA ARMADURA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO DEVIDO AO ATAQUE DE SULFATOS

Henrique Resende dos Santos

Adriano de Paula e Silva

Eduardo Chahud
Cristiane Machado Parisi Jonov

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126106>

CAPÍTULO 7..... 78

DANOS PÓS INCÊNDIO NA ESTRUTURA DE UMA SUBESTAÇÃO ELÉTRICA. UM ESTUDO DE CASO NA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Rodolpho Medeiros Frossard
Anna Luiza Macachero Victor Rodrigues
Lara Sandrini
Matheus Carreiro Zani
Warribe Lima de Siqueira
Geilma Lima Vieira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126107>

CAPÍTULO 8..... 90

DEGRADAÇÃO TÉRMICA DE CONCRETOS CONVENCIONAIS SUBMETIDOS A ALTAS TEMPERATURAS E RESFRIAMENTO LENTO

Moacyr Salles Neto
Flávio Roldão de Carvalho Lelis

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126108>

CAPÍTULO 9..... 103

DESEMPENHO DE EDIFICAÇÕES HOSPITALARES VIA DIMENSÕES MORFOLÓGICAS

Alyria Donegá
João da Costa Pantoja

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126109>

CAPÍTULO 10..... 115

DIFICULDADE DOS DISCENTES DE ENGENHARIA CIVIL NA MATÉRIA DE MECÂNICA VETORIAL COMPARANDO OS PARÂMETROS DO ENSINO PRESENCIAL E DO ENSINO REMOTO

Alessandro Leonardo da Silva
Emanuela dos Santos Gonzaga
Gustavo Neves Quintão Gonzales
Marcelo Robert Fonseca Gontijo
Thais Prado Vasconcelos Silva
Rodrigo Silva Fonseca
Heron Viterbre Debique Sousa
Ícaro Viterbre Debique Sousa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261010>

CAPÍTULO 11..... 125

EFEITO DO TEOR e TIPO de CIMENTO NO MÓDULO DE RESILIÊNCIA DE SOLO ARENOSO ESTABILIZADO QUIMICAMENTE

José Wilson dos Santos Ferreira
Michéle Dal Toé Casagrande

Raquel Souza Teixeira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261011>

CAPÍTULO 12..... 136

ESTUDIOS DE PELIGRO SÍSMICO EN EL MUNICIPIO DE IXHUACÁN DE LOS REYES, VERACRUZ

Gilbert Francisco Torres Morales

Ignacio Mora González

Saúl Castillo Aguilar

René Álvarez Lima

Raymundo Dávalos Sotelo

José Alberto Aguilar Cobos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261012>

CAPÍTULO 13..... 150

ESTUDO DA APLICAÇÃO DO LÁTEX DA SERINGUEIRA AMAZÔNICA (*HEVEA BRASILIENSIS*) COMO ADITIVO EM ARGAMASSA COM CIMENTO PORTLAND PARA MELHORA DE COMPORTAMENTO MECÂNICO

José Costa Feitoza

Natália da Mata Batista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261013>

CAPÍTULO 14..... 160

ESTUDO DE UMA CONTENÇÃO UTILIZANDO FERRAMENTA NUMÉRICA E MÉTODOS APROXIMADOS DE DIMENSIONAMENTO DE TIRANTES

Renathielly Fernanda da Silva Brunetta

Isabela Grossi da Silva

Leandro Canezin Guideli

Vitor Pereira Faro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261014>

CAPÍTULO 15..... 173

AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DO TRATAMENTO TÉRMICO NO GNAISSE MILONÍTICO

Kelly de Oliveira Borges da Costa

Afonso Rangel Garcez de Azevedo

Carlos Maurício Fontes Vieira

Elaine Aparecida Santos Carvalho Costa

Geovana Carla Girondi Delaqua

Gustavo de Castro Xavier

Letícia Borges da Costa

Vinícius Alves Polinicola

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261015>

CAPÍTULO 16..... 183

VIGAS DE GRAN ALTURA DE HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS. EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE

Viviana Carolina Rougier

Miqueas Ceferino Denardi

Dario Orestes Vercesi

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261016>

CAPÍTULO 17..... 195

GESTÃO E OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE AR CONDICIONADO: UMA NOVA ABORDAGEM USANDO MODELAGEM 6D

João Bosco Pinheiro Dantas Filho

Guilherme Bruno de Souza Ribeiro

Pedro Holanda

Bruna Vital Roque

Rodrigo G. Ribeiro

Artur de Almeida Evangelista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261017>

CAPÍTULO 18..... 206

GRANULOMETRIA DOS AGREGADOS GRAÚDOS COMERCIALIZADOS NOS MUNICÍPIOS DA CHAPADA DO APODI/RN – ANÁLISE COMPARATIVA COM A NORMA NBR 7211/2009

Renata Samyla Matias Nogueira

Clélio Rodrigo Paiva Rafael

Edna Lucia da Rocha Linhares

Ronald Assis Fonseca

Rokátia Lorrany Nogueira Marinho

Ligia Raquel Rodrigues Santos

Jaiana de Araújo Pinheiro

Carlos Eduardo Carvalho Oliveira

Edyelly Cristtian Galdino Fernandes

Francisco Felinto de Lima Neto

Luzianne Galvão Pimenta

Géssica de Moura Ribeiro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261018>

CAPÍTULO 19..... 221

INSPEÇÃO PREDIAL EM EMPREENDIMENTOS RURAIS APLICABILIDADE DA NBR 16747

Camilla Cristina Cunha Menezes

Marcos de Paulo Ramos

Thiago Pena Bortone

Rachel Jardim Martini

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261019>

CAPÍTULO 20..... 232

GESTÃO INTEGRADA DE RESÍDUOS SÓLIDOS

Wallace Ribeiro Nunes Neto

Camila Moraes Silva

Pedro Paulo Barbosa Nunes Sobrinho

Carlos Augusto Rocha de Moraes Rego
Louryval Coelho Paixão
Marcio Mendes Cerqueira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261020>

CAPÍTULO 21..... 241

LOCUS SAECULARIS: MATERIAIS QUE CONSTRÍRAM UMA TRADIÇÃO

João Hermem Fagundes Tozatto
Crystian André Montozo Botelho

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261021>

CAPÍTULO 22..... 253

MODELAGEM NUMÉRICA DE PAREDE DIAFRAGMA ATIRANTADA EM ÁREA URBANA

Isabela Grossi da Silva
Renathielly Fernanda da Silva Brunetta
Leandro Canezin Guideli
Vitor Pereira Faro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261022>

CAPÍTULO 23..... 266

NOVA TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO DE TORRES EÓLICAS

Ilo Borba

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261023>

CAPÍTULO 24..... 273

O CORREDOR BIOCEÂNICO: REESTRUTURAÇÃO TERRITORIAL DE NOVAS HINTERLÂNDIAS

Carlos Andrés Hernández Arriagada
Teo Felipe Bruder Gouveia

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261024>

CAPÍTULO 25..... 287

O MAPA DE DANOS COMO FERRAMENTA DE MANUTENÇÃO E RESTAURO DE EDIFICAÇÕES: UMA REVISÃO LITERÁRIA

Lucas Rodrigues Cavalcanti
Eliana Cristina Barreto Monteiro
Carlos Fernando Gomes do Nascimento
Catharina Silveira Rodrigues
Fabrício Fernando de Souza Lima
Amanda de Moraes Alves Figueira
José Maria de Moura Júnior
Sabrina Santiago Oliveira
Roberto Revoredo de Almeida Filho
Flávio Matheus de Moraes Cavalcante

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261025>

CAPÍTULO 26	302
TREINAMENTO DE REDES NEURAIAS ARTIFICIAIS PARA O DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	
João Victor Fernandes Masalkas	
Emerson Felipe Felix	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261026	
CAPÍTULO 27	316
UMA FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA DETECÇÃO DE PONTOS LIMITES E DE BIFURCAÇÃO	
William Taylor Matias Silva	
Sebastião Simão da Silva	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261027	
CAPÍTULO 28	333
UTILIZAÇÃO DO CARVÃO OBTIDO A PARTIR DA PIRÓLISE DA CASCA DE ARROZ PARA ADSORÇÃO DE AZUL DE METILENO	
Camila Ribeiro Rodrigues	
Marcelo Mendes Pedroza	
Mayara Shelly Miranda Bequimam	
David Barbosa Dourado	
Danielma Silva Maia	
Marcel Sousa Marques	
Hellen Dayany Barboza Barros	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261028	
SOBRE O ORGANIZADOR	338
ÍNDICE REMISSIVO	339

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE SÓLIDOS INELÁSTICOS SOB DEFORMAÇÃO FINITA USANDO ELEMENTOS BIARTICULADOS 2D E 3D

Data de aceite: 01/10/2021

Data de submissão: 08/09/2021

William Taylor Matias Silva

Universidade de Brasília, Faculdade de
Tecnologia
Brasília - DF
<http://lattes.cnpq.br/3850624538330903>

Sebastião Simão da Silva

Instituto Federal de Ciência, Educação e
Tecnologia da Paraíba, Curso de Bacharelado
em Engenharia Civil
Cajazeiras – PB
<http://lattes.cnpq.br/6023548428079039>

RESUMO: Neste capítulo apresenta-se uma descrição Lagrangiana Total para analisar sólidos inelásticos sob deformação finita. Discretiza-se estes sólidos com elementos de treliça 2D e 3D com o intuito de obter analiticamente o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente. Assume-se um modelo constitutivo hiperplástico para o estado uniaxial de tensão-deformação, utilizando a tensão de Kirchhoff e a deformação logarítmica, que formam um par energeticamente conjugado. Para descrever as deformações plásticas finitas utiliza-se a hipótese da decomposição multiplicativa do estiramento uniaxial do elemento de treliça. Por fim, apresentam-se algumas simulações numéricas de sólidos discretizados com elementos de treliça 2D e 3D.

PALAVRAS - CHAVE: Formulação lagrangeana

total; Deformações elastoplásticas finitas; Elementos de barra biarticulados.

ANALYSIS OF INELASTIC SOLIDS UNDER FINITE DEFORMATION USING 2D AND 3D BAR ELEMENTS

ABSTRACT: In this chapter a Total Lagrangian description is presented to analyze inelastic solids under finite deformation. These solids are discretized with 2D and 3D truss elements in order analytically to obtain the internal force vector and the tangent stiffness matrix. A hyperplastic constitutive model for the uniaxial stress-strain state is assumed, using Kirchhoff stress and logarithmic strain, which form an energetically conjugated pair. To describe the finite plastic deformations, the hypothesis of multiplicative decomposition of the uniaxial stretch of the truss element is used. Finally, some numerical simulations of solids discretized with 2D and 3D truss elements are presented.

KEYWORDS: Total langrangian formulation; Elastoplastic strains finite; Biarticulated bar elements.

1 | INTRODUÇÃO

Citar as inúmeras contribuições científicas das últimas décadas dedicadas ao estudo e desenvolvimento do método dos elementos finitos aplicado na análise não-linear da mecânica dos sólidos seria uma tarefa hercúlea, porém deste fato, salta à vista, a importância e a relevância conquistada pela mecânica computacional em diversos setores

de tecnologia de ponta desenvolvidas pelo homem na atualidade. Nas mais diversas áreas da engenharia a simulação numérica tornou-se imprescindível tanto em nível de pesquisa básica quanto em nível de pesquisa aplicada. Desta maneira, para o avanço da ciência, compreender e simular os fenômenos não-lineares tornou-se um grande desafio para os pesquisadores. Na área dos métodos numéricos aplicados a engenharia, por exemplo, recomenda-se a leitura das seguintes referências: Crisfield (1991), Crisfield (1997), Simo e Hughes (1998), Kojić e Bathe (2005), Bonet *et al.* (2016), Neto *et al.* (2008), Krenk (2009), Voyiadjis e Woelke (2010) e Hashiguchi e Yamakawa (2013). Decorre, daí, a necessidade de difundir os conceitos básicos e fundamentais da análise não linear através do método dos elementos finitos. Imbuído deste espírito, o trabalho, aqui apresentado, sem maiores pretensões teóricas, tem como objetivo apresentar uma análise teórica e numérica de sólidos elastoplásticos sob deformação finita discretizados com elementos de barra biarticulados 2D ou 3D. Propõe-se utilizar elementos de barra biarticulados por sua simplicidade teórica, o que permite descrever, facilmente, a cinemática do movimento do elemento e obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente analiticamente, que são elementos fundamentais para uma análise não linear em mecânica dos sólidos. Para simular deformações elásticas finitas, assume-se um modelo constitutivo hiperplástico para o estado uniaxial de tensão-deformação, utilizando a tensão de Kirchhoff e a deformação logarítmica, que formam um par energeticamente conjugado. Para descrever as deformações plásticas finitas utiliza-se a hipótese da decomposição multiplicativa do estiramento uniaxial. Por fim, apresentam-se algumas simulações numéricas de sólidos 2D e 3D discretizados com elementos de treliça 2D e 3D, respectivamente.

2 | DESCRIÇÃO CINEMÁTICA DO ELEMENTO BIARTICULADO 3D

Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração *indeformada*, definida no instante $t = 0$, utilizam-se as coordenadas materiais (X_1, X_2, X_3) , enquanto que, na configuração *deformada*, definida no instante t , usam-se as coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) conforme mostra-se na Figura 1.

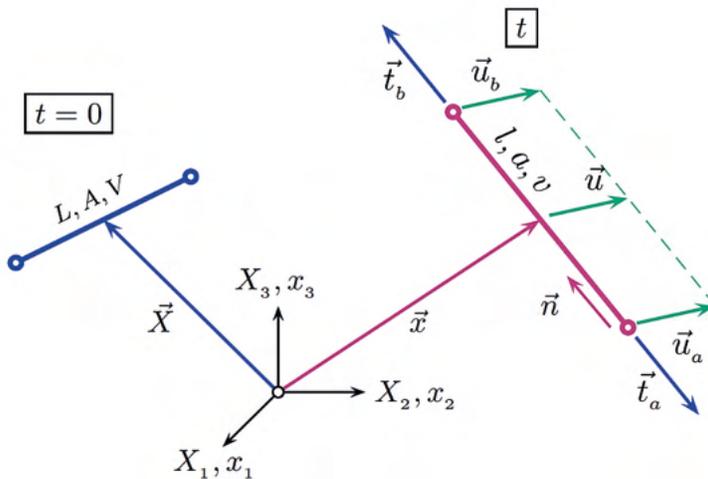


Figura 1: Movimento do elemento biarticulado 3D.

No instante $t = 0$, o comprimento do elemento, a área da seção transversal e seu volume são dados por L , A e V , respectivamente. Após o elemento sofrer grandes translações, grandes rotações e deformações finitas ele ocupa a configuração deformada no instante t . Neste instante, o comprimento do elemento, a área da seção transversal e o volume são dados por l , a e v , respectivamente. O comprimento e a direção do elemento no instante t são expressos, em função das coordenadas \vec{x}_a e \vec{x}_b , como $l = \sqrt{(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \cdot (\vec{x}_b - \vec{x}_a)}$ e $\vec{n} = \frac{1}{l}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)$, respectivamente. Ainda no instante t , \vec{u}_a e \vec{u}_b representam deslocamentos incrementais das extremidades do elemento a partir deste instante. Observe que estes deslocamentos não são os deslocamentos entre as configurações *indeformada* e *deformada*. Sob a hipótese de que o elemento sofre deformações uniformes, pode-se definir uma medida de deformação a partir do estiramento expresso por $\lambda = \frac{l}{L}$. Por outro lado, a relação entre os volumes do elemento, entre os instantes $t = 0$ e t , é escrita como $J = \frac{v}{V}$. Se o elemento alonga de l a partir do comprimento atual l , a deformação instantânea é definida como $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$. Integrando esta deformação instantânea ao longo do elemento entre os instantes $t = 0$ e t , pode-se definir a deformação logarítmica como $\varepsilon = \ln \lambda = \ln \int_L^l \frac{dl}{l}$. Considerando que as deformações normais ao eixo do elemento biarticulado sejam iguais em todas as direções, que é o caso de materiais isotrópicos, deduz-se que $J = \lambda^{(1-2\nu)}$ ou $v = V \left(\frac{l}{L}\right)^{(1-2\nu)}$. A demonstração desta expressão se encontra detalhada no Quadro 1.

Diagram illustrating the relationship between initial and actual volumes of a cylindrical element. The top cylinder has length l and is labeled (v, a, r) . The bottom cylinder has length $l + dl$ and is labeled $(v + dv, a + da, r + dr)$. The text "mudança instantânea" is placed between them.

volume atual	$v = al$
área atual	$a = \pi r^2$
deformação axial instantânea	$d\epsilon = \frac{dl}{l}$
deformação radial instantânea	$d\epsilon_r = \frac{dr}{r} = -\nu \frac{dl}{l}$
mudança de volume instantânea	$dv = adl + lda$
em que	$da = 2\pi r dr = 2a \frac{dr}{r} = -2a\nu \frac{dl}{l}$
desta maneira	$dv = adl - 2a\nu dl = (1 - 2\nu)adl$
ou	$\frac{dv}{v} = (1 - 2\nu) \frac{dl}{l}$
assumindo o coeficiente de Poisson constante durante a deformação	
integrando, obtém-se que	$\int_V \frac{dv}{v} = (1 - 2\nu) \int_L \frac{dl}{l}$
	$\ln \frac{v}{V} = (1 - 2\nu) \ln \frac{l}{L}$
ou	$J = \frac{v}{V} = \left(\frac{l}{L}\right)^{(1-2\nu)} = \lambda^{(1-2\nu)}$

Quadro 1: Relação entre os volumes inicial e atual.

2.1 Linearização das variáveis cinemáticas

Para obter a matriz de rigidez tangente utilizada na solução de um sistema de equações de equilíbrio não-lineares é necessário linearizar as variáveis cinemáticas do elemento biarticulado. A linearização das variáveis cinemáticas será obtida através da derivada direcional em relação aos deslocamentos incrementais das extremidades do elemento definidos a partir da configuração *deformada*. A derivada direcional do vetor $l\vec{n} = \vec{x}_b - \vec{x}_a$, é dada por:

$$D(\vec{x}_b - \vec{x}_a)[\vec{u}] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\vec{x}_b + \epsilon\vec{u}_b - \vec{x}_a - \epsilon\vec{u}_a) = (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \quad (1)$$

A derivada direcional do comprimento atual do elemento pode ser obtida mais facilmente notando que $Dl^2(\vec{x})[\vec{u}] = 2lDl(\vec{x})[\vec{u}]$, conseqüentemente, $Dl(\vec{x})[\vec{u}] = \frac{1}{2l}Dl^2(\vec{x})[\vec{u}]$. A derivada direcional de J é dada por:

$$\begin{aligned}
 Dl^2(\vec{x})[\vec{u}] &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \{(\vec{x}_b + \epsilon\vec{u}_b - \vec{x}_a - \epsilon\vec{u}_a) \cdot (\vec{x}_b + \epsilon\vec{u}_b - \vec{x}_a - \epsilon\vec{u}_a)\} \\
 &= 2(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \cdot (\vec{u}_b - \vec{u}_a) = 2l\vec{n}(\vec{u}_b - \vec{u}_a)
 \end{aligned} \tag{2}$$

a partir da qual obtém-se que:

$$Dl(\vec{x})[\vec{u}] = \vec{n} \cdot (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \tag{3}$$

De maneira similar, será útil para derivações futuras, a seguinte relação:

$$Dl^{-1}(\vec{x})[\vec{u}] = -l^{-2}Dl(\vec{x})[\vec{u}] = -l^{-2}\vec{n} \cdot (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \tag{4}$$

Por último, a derivada direcional da deformação logarítmica, $\epsilon = \ln l = \left(\frac{l}{l_0}\right)$, é dada pela seguinte expressão:

$$D\epsilon(\vec{x})[\vec{u}] = D(\ln l(\vec{x}) - \ln L)[\vec{u}] = \frac{1}{l}Dl(\vec{x})[\vec{u}] = \frac{1}{l}\vec{n} \cdot (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \tag{5}$$

3 I FORÇAS INTERNAS E MODELO CONSTITUTIVO HIPERELÁSTICO

Conforme mostra-se na Figura 2, as forças internas \vec{t}_a e \vec{t}_b são facilmente determinadas em função da tensão verdadeira de Cauchy σ , da área da seção transversal a e da direção \vec{n} do elemento biarticulado. Portanto, escrevem-se estas forças como $\vec{t}_a = -\sigma a \vec{n}$ e $\vec{t}_b = \sigma a \vec{n}$ e conseqüentemente, a força axial pode ser escrita como $t = |\vec{t}_a| = |\vec{t}_b| = \sigma a$. Como se está admitindo que o elemento biarticulado possa sofrer deformações finitas é necessário definir um modelo constitutivo hiperplástico. Neste caso, admite-se a existência da energia de deformação, ψ , por unidade de volume inicial, V , quando o elemento biarticulado desloca-se da configuração *indeformada* para a configuração *deformada*. Em qualquer instante t a força axial $t(l)$ atuante no elemento depende do comprimento l . Se o elemento se alonga de uma pequena quantidade dl , então o trabalho interno é dado por $t(l)dl$ e o trabalho total por unidade de volume inicial é escrito como:

$$\psi = \frac{1}{V} \int_L^l t(l)dl = \int_L^l \frac{\sigma a}{V} dl \tag{6}$$

Levando em conta que $v = al$ e a deformação instantânea, $d\epsilon = \frac{dl}{l}$, a expressão da energia interna pode ser reescrita como:

$$\psi = \int_L^l \frac{\sigma a}{V} dl = \int_L^l \frac{v}{V} \sigma \frac{dl}{l} = \int_L^l J \sigma d\epsilon = \int_L^l \tau d\epsilon; \quad \tau = J\sigma \tag{7}$$

em que τ é denominada tensão de Kirchhoff. Nota-se que esta tensão é energeticamente conjugada com a deformação instantânea porque define a quantidade de energia de deformação armazenada no elemento por unidade de volume inicial através do trabalho $\tau \times \epsilon$. Assume-se que o módulo de Young E é dado pelo gradiente da tensão de

Kirchhoff t em relação a deformação logarítmica ε , isto é, $E = \frac{d\tau}{d\varepsilon}$ ou $d\tau = E d\varepsilon$, e que E seja constante. Portanto, pode-se escrever que:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_L^l \frac{dl}{L}; \quad \tau = E \ln \lambda \quad (8)$$

Note que novamente a deformação logarítmica, $\ln \lambda$, surge naturalmente como integral da deformação instantânea $d\varepsilon$. Substituindo a equação (8) na equação (7) obtém-se a energia de deformação por unidade de volume inicial como:

$$\psi = E \int_L^l \ln \left(\frac{l}{L} \right) \frac{dl}{l} = \frac{1}{2} E (\ln \lambda)^2 \Rightarrow \tau = \frac{d\psi}{d(\ln \lambda)} \quad (9)$$

Frequentemente, a equação (9) é utilizada para definir materiais hiperplásticos. Se o material for incompressível, $\nu = \frac{1}{2}$ e $J = 1$, chega-se a relação $\sigma = E \ln \lambda$. Por fim, utilizando as relações $\nu = \frac{1}{2}$, $J = \frac{V}{V_0}$, $\sigma = \frac{1}{J} \tau$ e $\tau = E \ln \lambda$, as forças internas podem ser reescritas como:

$$\vec{t}_b = \frac{1}{J} \tau a \vec{n} = \frac{V}{V_0} \tau \frac{V}{l} \vec{n} = \frac{VE}{l} \ln \lambda \vec{n} = \lambda^{-1} E A \ln \lambda \vec{n}; \quad \vec{t}_a = -\vec{t}_b \quad (10)$$

4 | MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A matriz de rigidez tangente do elemento biarticulado é obtida através da derivada direcional do vetor de forças internas em relação a posição atual \vec{x} na direção dos deslocamentos incrementais das extremidades do elemento, isto é, $D\vec{t}^{(e)}(\vec{x}^{(e)})[\vec{u}^{(e)}] = [K]_T^{(e)} \vec{u}^{(e)}$. Partindo das forças internas atuantes em uma das extremidades do elemento e a deformação axial do mesmo, que são expressos por $\vec{t}_b = \tau \frac{V}{l} \vec{n}$ e $\varepsilon = \ln \left(\frac{l}{L} \right)$, respectivamente, e além disso, utilizando as equações (1), (3), (4) e (5), após o desenvolvimento algébrico, obtém-se a matriz de rigidez tangente que se escreve como:

$$D\vec{t}_b(\vec{x})[\vec{u}] = \left(\frac{d\tau}{d\varepsilon} \frac{V}{l^2} - \frac{2\tau V}{l^2} \right) [\vec{n} \otimes \vec{n}]_{3 \times 3} (\vec{u}_b - \vec{u}_a) + \frac{\tau V}{l^2} [I]_{3 \times 3} (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \quad (11)$$

$$D\vec{t}_a(\vec{x})[\vec{u}] = \left(\frac{d\tau}{d\varepsilon} \frac{V a}{l} - \frac{2\sigma a}{l} \right) [\vec{n} \otimes \vec{n}]_{3 \times 3} (\vec{u}_b - \vec{u}_a) + \frac{\sigma a}{l} [I]_{3 \times 3} (\vec{u}_b - \vec{u}_a)$$

Observe que a expressão da equação (11a) está escrita em função da tensão de Kirchhoff, enquanto que a expressão da equação (11b) está escrita em função da tensão verdadeira de Cauchy. Lembrando que $D\vec{t}_a(\vec{x})[\vec{u}] = -D\vec{t}_b(\vec{x})[\vec{u}]$ e após um rearranjo em forma matricial dos termos da equação (11), chega-se a:

$$D\vec{t}^{(e)}(\vec{x}^{(e)})[\vec{u}^{(e)}] = [K]_T^{(e)} \vec{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{u}_a \\ \vec{u}_b \end{Bmatrix} \quad (12)$$

em que $[K]_{aa} = [K]_{bb} = k [\vec{n} \otimes \vec{n}]_{3 \times 3} + \frac{t}{l} [I]_{3 \times 3}$, $[K]_{ab} = [K]_{ba} = -[K]_{bb}$, k é o coeficiente de rigidez do elemento biarticulado e, $t = \sigma a$, é a força axial atuante no elemento. O

coeficiente de rigidez k requer o cálculo do módulo elástico tangente, que neste trabalho assume-se um valor constante dado por $\frac{d\tau}{d\varepsilon} = E$. Portanto, pode-se escrever a seguinte expressão para o coeficiente de rigidez k :

$$k = \left(\frac{d\tau}{d\varepsilon} \frac{V a}{v l} - \frac{2t}{l} \right) = \left(\frac{V E a}{v l} - \frac{2t}{l} \right) = \frac{V}{l^2} (E - 2\tau) = \lambda^{-1} \frac{A}{l} (E - 2\tau) \quad (13)$$

5 I COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Nesta seção, estende-se a formulação anterior para incluir as deformações permanentes no elemento biarticulado. Admite-se que o material do elemento apresenta um comportamento elastoplástico com endurecimento isotrópico. Para maiores detalhes consultar o capítulo 1 da referência Simo e Hughes (1998). Neste trabalho discute-se com mais detalhes a decomposição multiplicativa do estiramento do elemento para simular deformações plásticas finitas e sua implementação computacional. No Quadro 2 detalha-se os principais conceitos da teoria da plasticidade para o estado unidimensional de tensão e com deformações infinitesimais.

<p>i. Relação tensão-deformação</p> $\tau = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$
<p>ii. Regra de fluxo plástico e lei de endurecimento isotrópico</p> $\dot{\varepsilon}_p = \gamma \text{sign}(\tau)$ $\dot{\alpha} = \gamma$
<p>iii. Critério de escoamento</p> $f(\tau, \alpha) = \tau - (\tau_Y + H\alpha) \leq 0.$
<p>iv. Condições de complementariedade de Kuhn-Tucker</p> $\gamma \geq 0, \quad f(\tau, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\tau, \alpha) = 0$
<p>v. Condição de consistência</p> $\gamma \dot{f}(\tau, \alpha) = 0 \quad (\text{se } f(\tau, \alpha) = 0)$

Quadro 2: Teoria da plasticidade. Estado unidimensional de tensão.

5.1 Decomposição multiplicativa do estiramento

Suponha que no instante atual t a tensão de Kirchhoff no elemento biarticulado tenha ultrapassado o limite de escoamento do material t_y . Neste instante o estiramento do elemento é dado por $\lambda = \frac{l}{L}$. Agora, admita-se que a força axial atuante no elemento seja retirada, portanto, uma parte da deformação será recuperada elasticamente enquanto que a outra parte será permanente no elemento, cujo comprimento será dado por l_p . De acordo com a Figura 2, define-se como estiramento elástico a relação $\lambda_e = \frac{l}{l_p}$. Por fim, adota-se uma decomposição multiplicativa do estiramento da barra em uma parte elástica e em uma parte plástica, tal que, $\lambda = \lambda_e \lambda_p$.

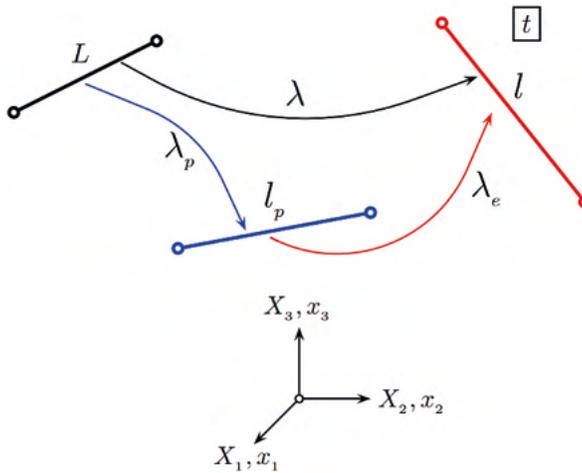


Figura 2: Decomposição multiplicativa do estiramento do elemento biarticulado.

Como já foi dito, a configuração descarregada tem um comprimento l_p , que pode ser vista como uma nova configuração a partir da qual o elemento é estirado elasticamente até a configuração atual, definida pela coordenada \vec{x} e com comprimento l . Este estado referência alternativo, é denominado de configuração *inelástica* ou *plástica*. Ao aplicar a função logarítmica no estiramento λ atual da barra, surge naturalmente uma decomposição aditiva entre as componentes elástica e plástica da deformação logarítmica, que se expressa como:

$$\begin{cases} \ln \lambda = \ln(\lambda_e \lambda_p) = \ln \lambda_e + \ln \lambda_p \\ \varepsilon = \ln \lambda; \quad \varepsilon_e = \ln \lambda_e; \quad \varepsilon_p = \ln \lambda_p \\ \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \end{cases} \quad (14)$$

Observe que a última expressão da equação (14) corresponde à decomposição aditiva empregada na teoria de deformações plásticas infinitesimais, conforme descrita no Quadro 2. Neste trabalho, adota-se um esquema de integração implícito para integrar

o modelo de plasticidade finita. Portanto, torna-se necessário a definição das variáveis cinemáticas em pontos discretos do domínio no tempo, isto é, levar em conta o incremento destas variáveis ao longo do tempo. Portanto, de acordo com a Figura 3, considera-se um passo de tempo Δt durante o qual a barra se move da posição x_n no instante t para a posição x_{n+1} no instante $t + \Delta t$. Os comprimentos da barra nos instantes t e $t + \Delta t$ são l_n e l_{n+1} , respectivamente. A cada incremento de tempo, isto é, entre os instantes t e $t + \Delta t$ podem ser definidas as configurações descarregadas da barra, que são definidas por $l_{p,n}$ e $l_{p,n+1}$, respectivamente. Caso não haja deformações plásticas neste intervalo de tempo então, conseqüentemente, $l_{p,n} = l_{p,n+1}$. De acordo com a Figura 3, podem-se definir os seguintes estiramentos: 1) Entre as configurações *indeformada* e *deformada* no instante t , $\lambda_n = \lambda_{e,n} \lambda_{p,n} = \frac{l_n}{l_p} \frac{l_p}{L} = \frac{l_n}{L}$; 2) Entre as configurações *indeformada* e *deformada* no instante $t + \Delta t$, $\lambda_{n+1} = \lambda_{e,n+1} \lambda_{p,n+1} = \frac{l_{n+1}}{l_{p,n+1}} \frac{l_{p,n+1}}{L} = \frac{l_{n+1}}{L}$.

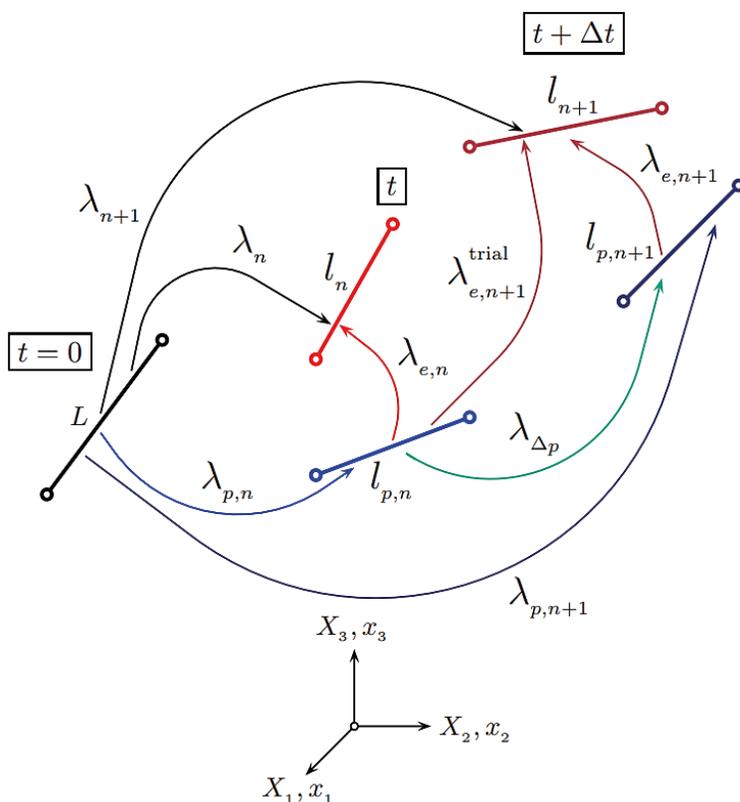


Figura 3: Valores discretos dos estiramentos do elemento biarticulado no intervalo Δt .

Como ponto de partida, na ausência de uma informação melhor, admite-se que durante o incremento de tempo Δt , o elemento de barra biarticulado sofre somente deformações elásticas, desta maneira, o estiramento λ_{n+1} pode ser expresso como uma

decomposição multiplicativa entre o estiramento plástico $\lambda_{p,n}$ definido no instante anterior t e uma estimativa de estiramento elástico, tal que,

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{e,n+1}^{trial} \lambda_{p,n} \Rightarrow \lambda_{e,n+1}^{trial} = \lambda_{n+1} \lambda_{p,n}^{-1} = \frac{l_{n+1}}{L} \frac{L}{l_{p,n}} = \frac{l_{n+1}}{l_{p,n}} \quad (15)$$

Aplica-se a função logarítmica no estiramento elástico definido na equação (15), para obter a decomposição aditiva das deformações, que se expressa como:

$$\ln(\lambda_{e,n+1}^{trial}) = \ln(\lambda_{n+1} \lambda_{p,n}^{-1}) = \ln(\lambda_{n+1}) - \ln(\lambda_{p,n}) \Rightarrow \varepsilon_{e,n+1}^{trial} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p,n} \quad (16)$$

Portanto, a estimativa para o estado de tensão no instante $t + \Delta t$ será dado pela seguinte expressão $\tau_{n+1}^{trial} = E \varepsilon_{e,n+1}^{trial}$. No Quadro 3 descreve-se o algoritmo implícito, denominado return mapping, utilizado neste trabalho para integrar o modelo de plasticidade aqui descrito. A dedução detalhada deste esquema de integração encontra-se no capítulo 1 da referência Simo e Hughes (1998).

1. Cálculo da tensão *trial*

$$\tau_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p,n})$$

2. Cálculo do critério de escoamento *trial*

$$f_{n+1}^{trial} = |\tau_{n+1}^{trial}| - (\tau_Y + H\alpha_n)$$

if $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ then

$$passo\ elástico \Rightarrow \begin{cases} \tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} \\ \varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n \end{cases} \Rightarrow \text{exit}$$

else

$$passo\ plástico \Rightarrow \begin{cases} \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{(E+H)} \\ \varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \Delta\gamma \text{sign}(\tau_{n+1}^{trial}) \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma \\ \tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} - E\Delta\gamma \text{sign}(\tau_{n+1}^{trial}) \end{cases}$$

endif

Quadro 3: Algoritmo *Return Mapping*.

6 | EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir, dois exemplos que ilustram o comportamento não linear tanto geométrico quanto físico serão analisados usando a formulação aqui apresentada. Para isto, será utilizado um programa de elementos finitos denominado `truss_nl.f90` escrito pelo primeiro autor usando a linguagem de programação Fortran90. Em ambos casos as magnitudes das deformações plásticas serão finitas. Para obter as trajetórias de equilíbrio utiliza-se um esquema incremental-iterativo com o método de Newton-Raphson em conjunção com o método de controle de deslocamentos conforme descrito no capítulo 8 da referência Crisfield (1991).

6.1 Pórtico de Lee

Neste exemplo, analisa-se o comportamento do pórtico de Lee tanto na fase elástica quanto na fase inelástica. As características físicas e geométricas, as condições de contorno e de carregamento são mostradas na Figura 4a. Discretiza-se o pórtico de Lee com elementos de barra biarticulado 2D, para isto, utiliza-se uma célula hiperestática com 4 nós e 6 elementos, cujas características geométricas mostram-se na Figura 4b. Ao todo, foram utilizadas 119 células para discretizar o pórtico, o que resultou em 240 nós e 596 elementos. Na análise elástica o pórtico sofre grandes translações e grandes rotações de corpo rígido, porém deformações infinitesimais. Na Figura 4c mostram-se as trajetórias de equilíbrio resultantes da análise elástica bem como da análise elastoplástica. Na análise elastoplástica o pórtico apresenta deformações plásticas finitas somente nas regiões de rótulas plásticas. Também, nesta fase, o pórtico apresenta grandes translações e grandes rotações de corpo rígido. Nas regiões afastadas das rótulas plásticas a deformação total é infinitesimal. As articulações plásticas formam-se na região sob aplicação da carga e a meia altura da coluna conforme mostra-se na Figura 4f. Monitoraram-se alguns elementos nessas regiões com as maiores deformações plásticas. Foram monitorados o elemento 357 sujeito a tração pertencente à região sob a carga e o elemento 157 sujeito à compressão pertencente à região da metade da coluna. Na Figura 4d mostram-se as relações tensões deformações tanto para elemento 357 (tracionado) quanto para o elemento 157 (comprimido). Observa-se nesta figura que a magnitude máxima da deformação total para o elemento 357 é da ordem de 0,7 enquanto que para o elemento 157 é da ordem de 0,4. Na Figura 4e mostram-se as relações entre as deformações plásticas \square deformações totais para os elementos 357 e 157, respectivamente. Observa-se nesta figura que as parcelas das deformações plásticas para ambos elementos (357 e 157) alcançam aproximadamente um percentual entre 96% a 98% da deformação total, o que implica que as deformações plásticas em ambos elementos são finitas enquanto que as deformações elásticas nesses elementos são infinitesimais.

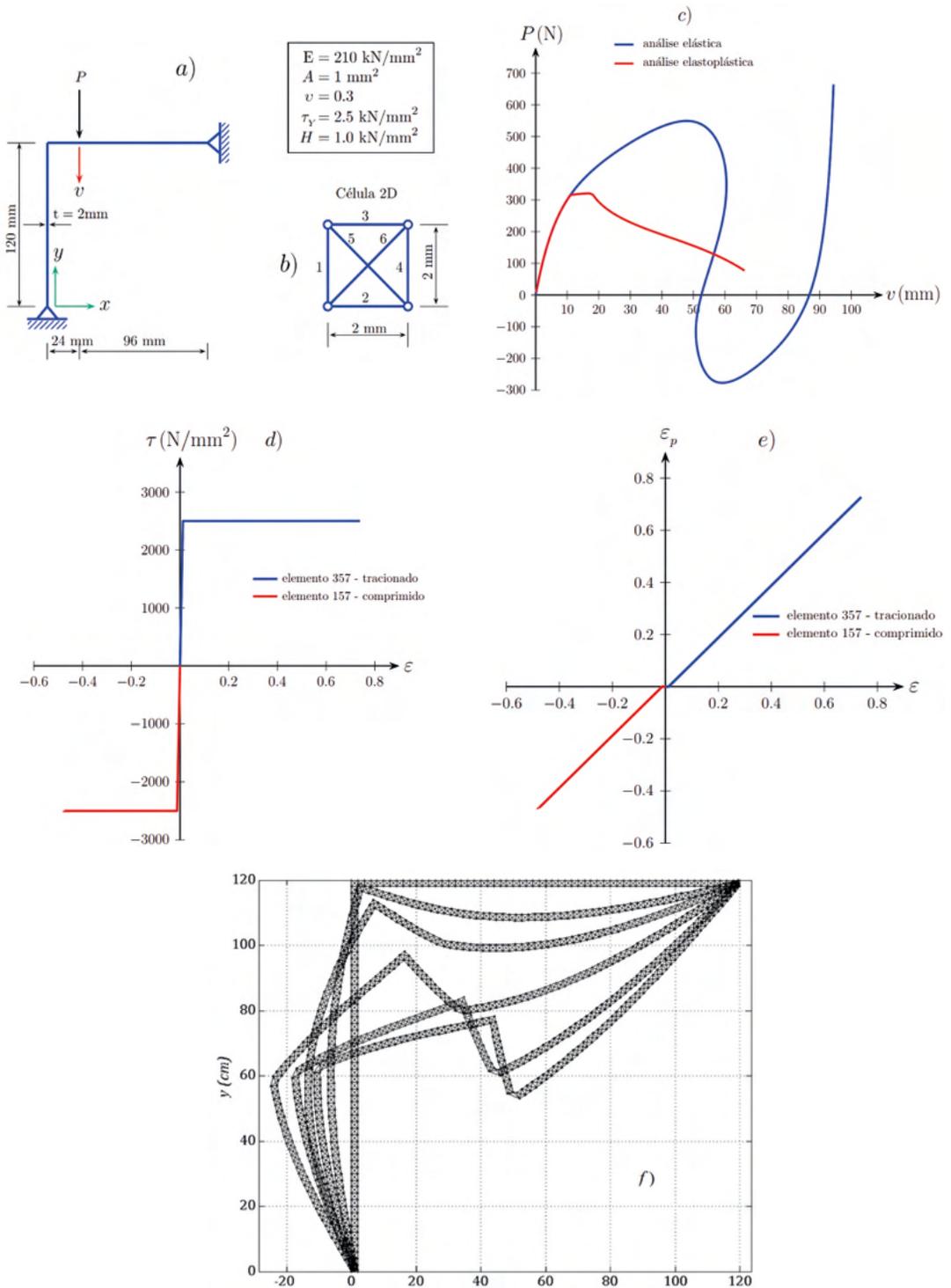


Figura 4: a) Pórtico de Lee. Características físicas e geométricas. b) Célula 2D. c) Trajetórias de equilíbrio. d) $\sigma \times \epsilon$. e) $\epsilon_p \times \epsilon$. f) Deformadas.

6.2 Viga 3D em balanço

Neste exemplo mostra-se o comportamento de uma viga em balanço tanto na fase elástica quanto na fase elastoplástica sob deformações finitas. Este exemplo foi proposto pelos autores Bonet *et al.* (2016) que utilizaram o programa *FLagSHyp* de autoria dos próprios autores disponível no site www.flagshyp.com. Esses autores discretizaram a viga com elementos hexaédricos de 8 nós e adotaram um modelo hiperelástico-plástico quase incompressível cujas propriedades geométricas e mecânicas estão descritas na Figura 5a. Para modelar a viga com elementos de treliça plana foi utilizado a célula hiperestática 2D, mostrada na Figura 5b, resultando em uma malha de 42 nós e 101 elementos. Por outro lado, para modelar a viga com elementos de treliça espacial foi utilizada a célula hiperestática 3D, também mostrada na Figura 5b, resultando em uma malha de 84 nós e 366 elementos. Na Figura 5c mostram-se as trajetórias de equilíbrio tanto para análise elástica quanto para análise elastoplástica obtidas com as células 2D e 3D, respectivamente. Observa-se que essas trajetórias de equilíbrio são coincidentes com as trajetórias obtidas por Bonet *et al.* (2008). A articulação plástica forma-se na região próxima ao engaste conforme mostra-se na Figura 5f. Na análise elastoplástica a viga em balanço 3D apresenta deformações plásticas finitas somente na região da articulação plástica. Também nesta fase, a viga apresenta grandes translações e grandes rotações de corpo rígido conforme pode-se observar na Figura 5f. Monitoraram-se alguns elementos nessas regiões com as maiores deformações plásticas. Foram monitorados o elemento 1 sujeito a compressão e o elemento 2 sob tração utilizando células 2D. Por outro lado, utilizando células 3D foram monitorados o elemento 7 sujeito a compressão e o elemento 9 sob tração. Na Figura 5d mostram-se as relações tensões deformações totais para esses elementos. Observa-se que essas relações são coincidentes tanto para os elementos tracionados quanto para os elementos comprimidos indiferentemente da célula utilizada, isto é, os resultados foram idênticos utilizando células 2D bem como células 3D. Na Figura 5e mostram-se as relações deformações plásticas deformações totais para os elementos 1 e 2 utilizando células 2D e para os elementos 7 e 9 utilizando células 3D. Observa-se que os resultados são coincidentes.

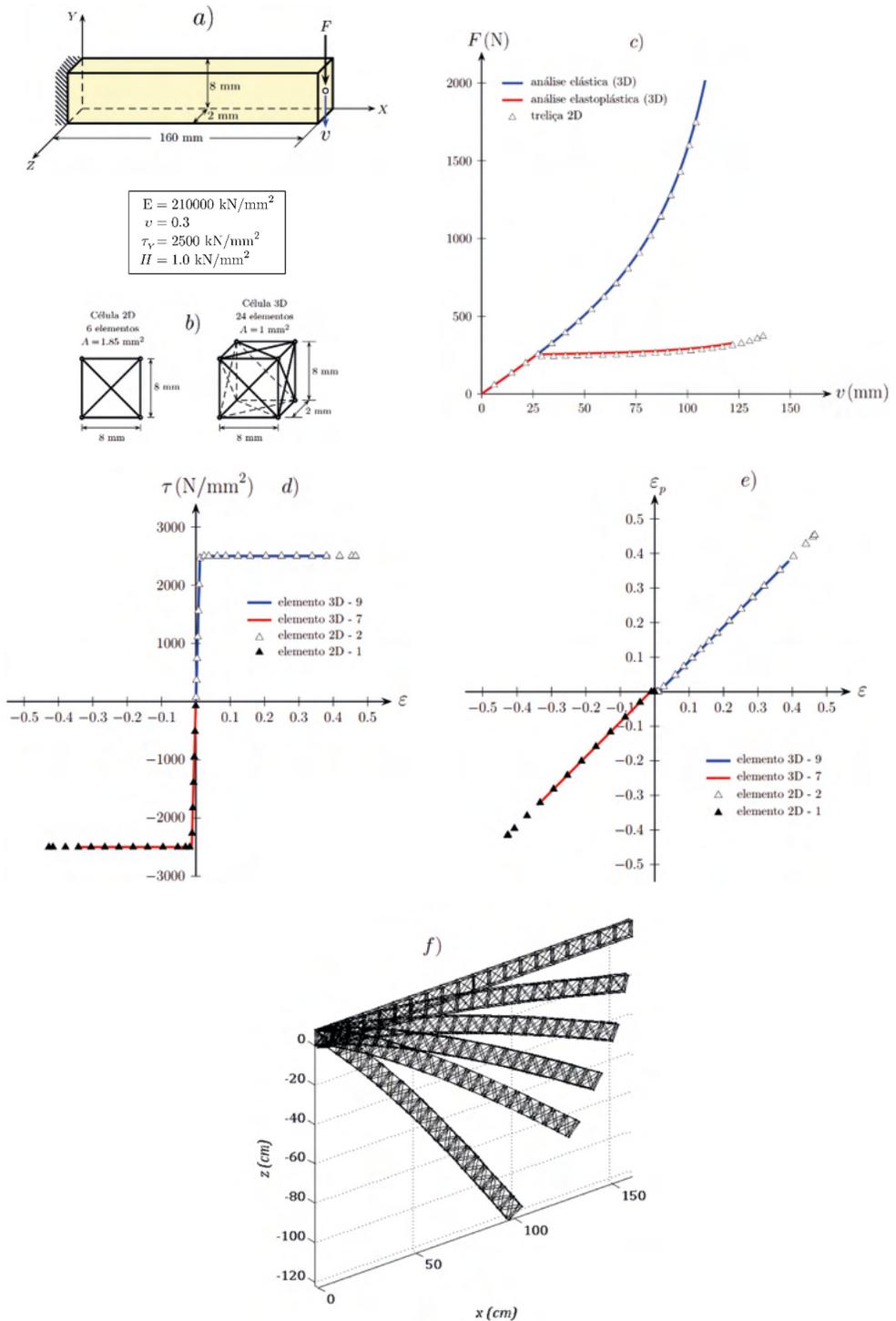


Figura 5: a) Viga em balanço. Características físicas e geométricas. b) Célula 2D e 3D. c) Trajetórias de equilíbrio. d) σ x ϵ . e) ϵ_p x ϵ . f) Deformadas.

Observa-se nesta figura que as parcelas das deformações plásticas para ambos elementos alcançam aproximadamente um percentual de 96% da deformação total, o que implica que as deformações plásticas nesses elementos são finitas enquanto que as deformações elásticas são infinitesimais.

6.3 Elemento biarticulado inclinado

Neste exemplo, utiliza-se um elemento biarticulado 2D inclinado de 45° em relação ao eixo, cujas características geométricas e físicas mostram-se na Figura 6a. Aplica-se uma carga vertical no nó 2 e mede-se o deslocamento sob a carga. Adota-se, artificialmente, um valor alto para a tensão de escoamento a fim de permitir algum grau de não linearidade geométrica antes de ocorrer deformações plásticas. Adota-se um valor pequeno, para a constante de endurecimento para simular um comportamento elastoplástico perfeito, não assumiu-se o valor para evitar divergência no algoritmo de integração apresentado no Quadro 3. Na Figura 6b mostram-se as trajetórias de equilíbrio obtidas através da análise não linear geométrica (deformações em regime elástico) e da análise não linear geométrica e física (deformações em regime elastoplástico). Pode-se observar que em ambas trajetórias a estrutura sofreu grandes translações verticais e rotações. Ainda, nesta figura, observam-se as seguintes fases: 1) De até o elemento biarticulado está sob compressão em regime elástico com ϵ e θ , ver Figuras 6c e 6d; 2) De até o elemento biarticulado está sob compressão em regime elastoplástico com ϵ e θ , ver Figuras 6c e 6d; 3) De até o elemento biarticulado está sob tração em regime elástico com ϵ e com o valor da deformação plástica constante, ϵ_p , ver Figuras 6c e 6d; 4) De até o elemento biarticulado está sob tração em regime elastoplástico com ϵ e os valores da deformação plástica dentro do intervalo ϵ_p ver Figuras 6c e 6d. Nota-se que no intervalo ϵ_p houve uma reversão nos valores da deformação plástica, isto porque, a partir de ϵ_p o elemento biarticulado passa a estar sob tração e em ϵ_p o elemento começa a escoar sob tração, conforme mostra-se na Figura 6b. Na Figura 6e mostram-se as trajetórias de equilíbrio para diferentes valores da constante de endurecimento. Observa-se nesta figura que ao aumentar o valor da constante de endurecimento há um aumento da capacidade portante do elemento biarticulado.

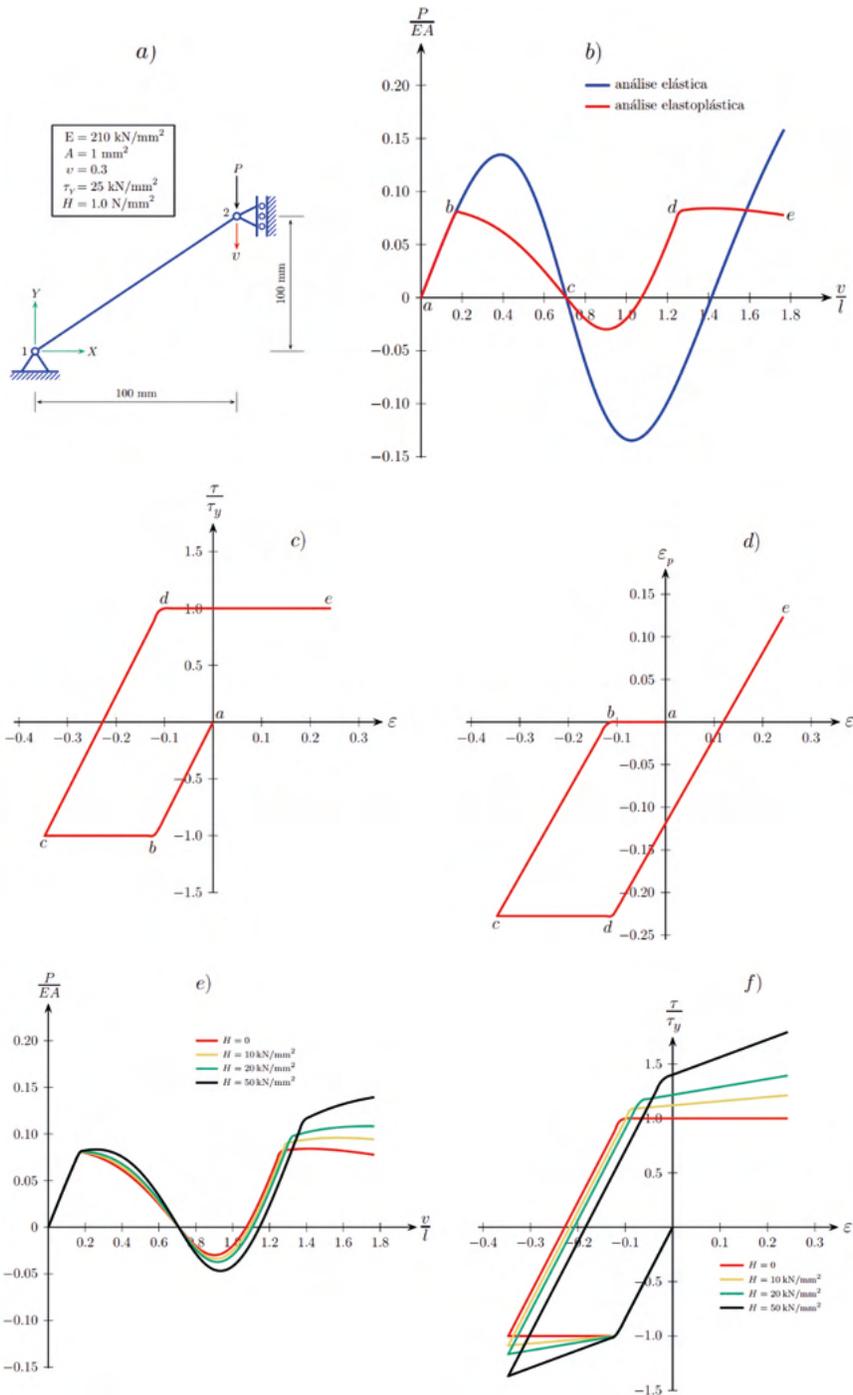


Figura 6: a) Elemento biarticulado inclinado. Características físicas e geométricas com . b) Trajetórias de equilíbrio. c). $\sigma \times \epsilon$ com $H = 0$. d) $\epsilon_p \times \epsilon$. com $H = 0$. e) Trajetórias de equilíbrio com $H \geq 0$. f) $\sigma \times \epsilon$ com $H \geq 0$.

Na Figura 6f mostram-se as relações entre tensão e deformação total para diferentes valores da constante de endurecimento. Nesta figura, nota-se que o elemento biarticulado sob compressão inicia o escoamento quando as tensões igualam-se a τ_y , e posteriormente, o escoamento do elemento biarticulado sob tração inicia-se para tensões maiores que τ_y . Desta maneira, quanto maior o valor da constante de endurecimento maior o valor da tensão que inicia o escoamento nesta fase.

7 | CONCLUSÕES

Ao adotar a decomposição multiplicativa do estiramento uniaxial da barra e definir como medida de deformação a função logarítmica deste estiramento, chegou-se a uma decomposição aditiva das deformações, o que possibilitou um tratamento analítico e numérico mais simples para retratar deformações plásticas finitas, mas isto é possível somente para estados uniaxiais de tensão-deformação. Daí a razão pela qual, neste trabalho, formulou-se a cinemática e o comportamento elastoplástico de um elemento de barra biarticulado. É importante esclarecer que este trabalho não trouxe nenhuma abordagem nova sobre o tema da plasticidade computacional, entretanto, tentou-se descrever de maneira bastante simples a formulação teórica e numérica sobre deformações finitas tanto na fase elástica quanto na fase inelástica. Quanto aos resultados das simulações numéricas obteve-se resultados qualitativos que expressam o comportamento mecânico das estruturas sob grandes translações, grandes rotações e deformações finitas. Isto é, do ponto de vista qualitativo, pode-se discretizar sólidos 2D e 3D utilizando elementos de barra biarticulados 2D e 3D, respectivamente. Talvez, o principal atrativo desses elementos é retratar temas de maior complexidade de uma maneira mais palatável e de fácil entendimento.

REFERÊNCIAS

Bonet J., Gil, A.J. and Wood R.D., 2016, **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis: statics**, Cambridge University Press.

Crisfield M.A., 1991, **Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1: Essentials**, John Wiley.

Crisfield M.A., 1997, **Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 2: Advanced Topics**, John Wiley.

Hashiguchi, K. and Yamakawa, Y., 2013, **Introduction to finite strain theory for continuum elasto-plasticity**, Wiley.

Kojić M. and Bathe K.J., 2005, **Inelastic analysis of solids and structures**, Springer.

Krenk, S., 2009, **Non-linear modeling and analysis of solids and structures**. Cambridge University Press.

Neto E.A.S, Perić D. and Owen D.R.J., 2008, **Computational methods for plasticity. Theory and applications**, John Wiley.

Simo J.C. and Hughes T.J.R., 1998, **Computational Inelasticity**, Springer.

Voyiadjis, G.Z. and Woelke, P., 2010, **Elasto-plastic and damage analysis of plates and shells**, Springer.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Altas Temperaturas 78, 79, 87, 88, 90, 91, 102, 173, 174, 175, 180

Análise Estrutural 115, 119, 122, 124, 255

Argamassa 83, 92, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 244, 249, 295, 300

Arquitetura Hospitalar 103, 107, 112

Avaliação de Desempenho 103, 104, 106, 107, 112, 113

B

Bim 3, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205

BIM 5D 58, 59, 61, 65

C

Cimento 67, 71, 73, 79, 80, 84, 90, 91, 92, 94, 95, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 162, 163, 164, 165, 207, 245, 254, 258, 304

Concreto 1, 2, 5, 12, 46, 57, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 101, 112, 114, 152, 153, 158, 159, 175, 192, 207, 220, 245, 246, 251, 254, 259, 266, 267, 271, 272, 299, 300, 302, 303, 304, 305, 307, 308, 309, 312, 313, 314

Concreto Armado 1, 2, 5, 46, 67, 68, 69, 70, 71, 75, 76, 78, 80, 82, 83, 88, 245, 246, 254, 266, 267, 271, 272, 302, 303, 304, 307, 308, 312, 313

Contenções 160, 172, 253, 255, 265

Corrosão das armaduras 67, 68, 69, 72, 75, 80, 82

D

Decreto 58, 60, 61, 65, 66, 290, 299

Deep Beams 183, 193, 194

Degradação 48, 76, 80, 87, 90, 91, 92, 102, 105, 177, 289, 294, 295, 297, 300, 337

Disseminação 58, 60, 61, 66

Durabilidade 52, 56, 69, 75, 76, 78, 80, 88, 108, 113, 126, 173, 174, 175, 181, 207, 297, 298

E

Elementos de barra biarticulados 29, 44, 317

Ementa 58, 60, 62

Empreendimentos Rurais 46, 47, 49, 55, 56

Engenharia Civil 3, 1, 12, 28, 48, 58, 60, 62, 63, 88, 90, 113, 115, 116, 117, 125, 134, 135, 150, 172, 195, 220, 265, 266, 291, 292, 303, 304, 316, 338

Engenharia Diagnóstica 78, 80

F

Fundações Superficiais 1, 2, 3, 4, 12, 265

G

Gnaisse 173, 174, 175, 176, 179, 180

Grelhas Hiperestáticas 13, 14, 26

H

Hastes de Paredes Delgadas 14, 27

Hospital Architecture 103

I

Incêndio 51, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 87, 90, 92, 97, 101, 108, 110, 111, 112, 175

Inspeção Predial 46, 47, 48, 49, 52, 55, 56, 57, 103, 109

Interação Solo-Estrutura 3, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 254, 255, 265

Íons Sulfatos 67, 69, 72, 73, 75

L

Látex da seringueira 150, 151, 157

M

Máquinas de ar condicionado 195, 196, 198, 199, 201, 202, 203

Mecânica Vetorial 115, 116, 117, 118, 119

Metodologia Empírico-Mecanística 125, 134

Microzonificación, Peligro, Vulnerabilidad, Riesgo 136

Modelagem 6D 195

Módulo de Resiliência 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135

P

Patologias 47, 48, 56, 57, 76, 115, 291, 296, 298, 300

Pavimentação 125, 129, 134, 135, 239

Performance Evaluation 103

R

Recalque 1, 3, 4, 263

S

SAP2000 1, 2, 3, 5

SFRC 183, 193

Shear Strength 183, 193

Solo-Cimento 125, 126, 128, 131, 133, 134, 135

T

Tensão de bimomento 13, 24, 26

Tensão de flexão 13, 26, 27

Tratamento Térmico 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181

Treliça 28, 29, 40, 116, 119, 120, 316, 317, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 330, 331

COLEÇÃO DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3

- 
-  www.atenaeditora.com.br
 -  contato@atenaeditora.com.br
 -  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
 -  www.facebook.com/atenaeditora.com.br

COLEÇÃO

DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3

-  www.atenaeditora.com.br
-  contato@atenaeditora.com.br
-  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
-  www.facebook.com/atenaeditora.com.br