

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 4



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 4



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Gabriel Motomu Teshima

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Armando Dias Duarte

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C691 Coleção desafios das engenharias: engenharia civil 4 /
Organizador Armando Dias Duarte. – Ponta Grossa -
PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-753-3

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.533210212>

1. Engenharia civil. I. Duarte, Armando Dias. II. Título.

CDD 624

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, desta forma não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A coleção de trabalhos intitulada “Coleção desafios das engenharias: Engenharia Civil 4” é uma obra que tem como foco principal a discussão científica por intermédio de diversos trabalhos que compõe seus capítulos. O volume abordará de forma categorizada e interdisciplinar, pesquisas cujos resultados possam auxiliar na tomada de decisão, tanto no campo acadêmico, quanto no profissional.

Os trabalhos desenvolvidos foram realizados em instituições de ensino e pesquisa no Brasil e dois trabalhos internacionais, um localizado no México e o outro no município de Valenzuela, na Espanha. Em todos esses trabalhos, foram apresentadas problemáticas distintas que são: a inovação através do desenvolvimento de um aplicativo através da tecnologia Building Information Modelling (BIM) para estimar a utilização de custos de obras em tempo real. O uso de exemplos práticos no ensino de métodos numéricos. O estudo da eliminação de erros sistemáticos através de equipamentos geodésicos e topográficos durante a execução de locações de obras. Levantamento de causas de patologias nos elevados de concreto armado. Descrição através de exemplos numéricos da habilidade do elemento de viga unificado suportar grandes translações e rotações. E por fim, uma proposta de fornecer um sistema de aterro sanitário em conjunto de um plano de gestão ambiental que seja sustentável e economicamente viável.

Os temas discutidos nesta obra, possuem a proposta de fundamentar o conhecimento de acadêmicos, mestres e todos aqueles que de alguma forma se interessam pela área da Engenharia Civil, através de temáticas atuais com resoluções inovadoras, descritas nos capítulos da coleção. Sendo assim, a divulgação científica é apresentada com grande importância para o desenvolvimento de toda uma nação, portanto, fica evidenciada a responsabilidade de transmissão dos saberes através de plataformas consolidadas e confiáveis, como a Atena Editora, capaz de oferecer uma maior segurança para os novos pesquisadores e os que já atuam nas diferentes áreas de pesquisa, exporem e divulgarem seus resultados.

Armando Dias Duarte

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVO PARA ESTIMATIVA E ATUALIZAÇÃO DE CUSTOS DE OBRA EM TEMPO REAL – BIM 5D Dieisom Henrique Macagnan Abrahão Bernardo Rohden  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102121	
CAPÍTULO 2	23
MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A LA INGENIERÍA CIVIL Francisco José Arroyo Rodríguez Mauricio Arroyo Terrazas Marco Arroyo Terrazas  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102122	
CAPÍTULO 3	34
O USO INTEGRADO DE RECEPTORES GNSS E DA ESTAÇÃO TOTAL NA LOCAÇÃO DE EDIFÍCIOS Gerson Jonas Schirmer Rafael Cardoso Gelson Lauro Dal’Forno  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102123	
CAPÍTULO 4	48
CAUSAS DE PATOLOGIAS EM OBRAS DE ELEVADOS DA REGIÃO METROPOLITANA DE BELÉM Fernando Gama Gomes Marta Marielly Gomes Silva Laércio Gouvêa Gomes  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102124	
CAPÍTULO 5	62
ANÁLISE NAO LINEAR DE ARCOS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL William Taylor Matias Silva Sebastião Simão da Silva  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102125	
CAPÍTULO 6	83
RELLENO SANITARIO PARA EL MUNICIPIO DE VALENZUELA Roberto Alejandro Rojas Holden  https://doi.org/10.22533/at.ed.5332102126	
SOBRE O ORGANIZADOR	95
ÍNDICE REMISSIVO	96

ANÁLISE NAO LINEAR DE ARCOS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Data de aceite: 01/12/2021

Data de submissão: 08/09/2021

William Taylor Matias Silva

Universidade de Brasília, Faculdade de
Tecnologia
Brasília - DF

<http://lattes.cnpq.br/3850624538330903>

Sebastião Simão da Silva

Instituto Federal de Ciência, Educação e
Tecnologia da Paraíba, Curso de Bacharelado
em Engenharia Civil
Cajazeiras – PB

<http://lattes.cnpq.br/6023548428079039>

RESUMO: Neste capítulo descreve-se a formulação co-rotacional de um elemento de viga unificado que engloba as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e que não apresenta bloqueio por cisalhamento. A cinemática co-rotacional se baseia na separação do movimento de um sólido em uma parte deformacional, e a outra, em movimento de corpo rígido. O movimento deformacional do elemento de viga é descrito por três modos naturais de deformação relacionados aos esforços axial, de flexão pura e de flexão simples, respectivamente. Os esforços internos gerados pelos modos de deformações naturais são auto-equilibrados, o que permite obter uma matriz de rigidez tangente consistente. Descreve-se de maneira detalhada a obtenção das matrizes de rigidez material e geométrica. Aplica-se o elemento de viga unificado na

análise não linear de arcos, demonstrando que esse elemento é capaz de lidar com grandes translações e rotações de corpo rígido.

PALAVRAS-CHAVE: Formulação co-rotacional; Elemento de viga Bernoulli-Timoshenko; Modos de deformação naturais; Métodos dos Elementos Finitos; Não-linearidade geométrica.

NONLINEAR ANALYSIS OF ARCHES USING CO-ROTATIONAL FORMULATION

ABSTRACT: This chapter describes the co-rotational formulation of a unified beam element that combine Euler-Bernoulli and Timoshenko theories, which don't have problems with shear locking. The co-rotational kinematics is based on separation of the motion in deformational and rigid body components. The deformation movement of the element is described by three natural modes of deformation related to the axial efforts, pure bending and simple bending. The internal forces generated by the natural deformation modes are self-balanced, which allows to obtain a consistent tangent stiffness matrix. Development of the material and geometric stiffness matrix is described in details. The unified beam element is applied in the nonlinear analysis of arches, demonstrating that it has the ability to handle large translations and rigid body rotations.

KEYWORDS: Co-rotational formulation; Bernoulli-Timoshenko element beam; Natural modes of deformation; Finite Element Methods; Geometric nonlinearity.

1 | INTRODUÇÃO

A ideia principal da formulação co-rotacional é a decomposição do movimento de um sólido na soma de um movimento de corpo rígido e de um movimento deformacional. Esta formulação é um caso particular da descrição Lagrangiana para levar em conta a não linearidade geométrica na análise estrutural fazendo o uso do método dos elementos finitos. Assume-se nesta formulação que as translações e rotações de corpo rígido poderão ter qualquer magnitude porém as deformações deverão ser pequenas. Por esta razão é possível utilizar elementos finitos lineares em problemas que envolvam a não linearidade geométrica, sendo esta a principal motivação para o uso da formulação co-rotacional. Nos anos 70 e 80 esta formulação foi utilizada na análise não linear de diversos sistemas estruturais utilizados na engenharia aeronáutica e aeroespacial, na engenharia naval e mecânica, entretanto tendo pouca aplicação na engenharia civil nessa época. Em meados dos anos 90 esta formulação foi utilizada na análise não linear física, bem como, na análise dinâmica não linear de diversos sistemas estruturais. Skallerud *et al.* [1] utilizaram a formulação co-rotacional para analisar o comportamento de dutos submarinos expostos a grandes mudanças de geometria bem como a falhas locais. Yaw *et al.* [2] aplicaram a formulação co-rotacional nos métodos sem malhas para analisar sólidos 2D sujeitos as não linearidades geométrica e física. Felippa e Haugen [3] descrevem uma formulação co-rotacional unificada para elementos finitos de vigas, placas e cascas. Por fim, podem ser citados outros autores [4,5,6,7] que utilizaram a formulação co-rotacional para análises não lineares de diversos sistemas estruturais. Neste trabalho apresenta-se a formulação co-rotacional de um elemento de viga 2D com as seguintes particularidades: a) Define-se um vetor de deslocamentos de corpo rígido através de um sistema de referência fixo no centroide do elemento; b) Este elemento pode sofrer rotações de corpo rígido de qualquer magnitude devido ao uso da função trigonométrica módulo; c) Adotam-se três modos de deformações naturais [8,9] para representar a parte deformacional do movimento do elemento; d) Estes modos de deformações naturais representam esforços internos auto-equilibrados; e) Obtém-se o vetor de forças nodais a partir dos esforços internos auto-equilibrados; f) Utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais complementar [10,11] para obter a matriz de rigidez elástica que integra as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko; g) Este elemento será aqui denominado de elemento de viga 2D unificado; h) Este elemento não apresenta bloqueio por cisalhamento; i) Descreve-se detalhadamente o desenvolvimento algébrico para o cálculo das matrizes de rigidez co-rotacional e geométrica, assim como a expressão completa da matriz de rigidez tangente. Finalmente, se aplica este elemento para a análise não linear de arcos planos.

21 DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL

Seja um sistema de coordenadas globais cuja base é ortonormal conforme mostra-se na Figura 1.

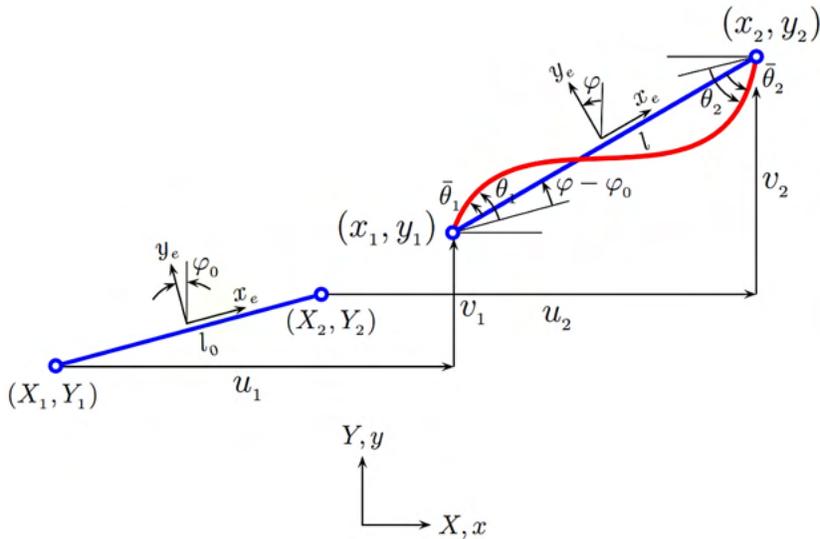


Figura 1: Movimento do elemento de viga 2D.

Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração indeformada são utilizadas as coordenadas materiais (X, Y) . Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração deformada são utilizadas as coordenadas espaciais (x, y) . Na configuração indeformada as coordenadas nodais do elemento são dadas por (X_1, X_1) e (X_2, X_2) , respectivamente. A longitude e inclinação inicial são dadas por:

$$l_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} \quad (1)$$

$$\varphi_0 = 2 \arctan\left(\frac{l_0 - X_{21}}{Y_{21}}\right)$$

em que $X_{21} = X_2 - X_1$ e $Y_{21} = Y_2 - Y_1$. Para obter a expressão (1b) foi utilizada a relação $\tan\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)$. Esta expressão é singular se $Y_{21}=0$. Se $X_{21}=l_0$, assume-se $\varphi_0=0$. Se $X_{21}=-l_0$, assume-se $\varphi_0=\pi$. De maneira similar, na configuração deformada as coordenadas nodais do elemento são dadas por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente. A longitude e inclinação atuais são dadas por:

$$l = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \quad (2)$$

$$\varphi = 2 \arctan\left(\frac{l - x_{21}}{y_{21}}\right)$$

em que $x_{21} = x_2 - x_1$ e $y_{21} = y_2 - y_1$. Para obter a expressão (2b) foi utilizada a relação $\tan\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)$. Esta expressão é singular se $y_{21}=0$. Se $x_{21}=l$, assume-se $\varphi_0=0$. Se $x_{21}=-l$, assume-se $\varphi=\pi$. Como mostra-se na Figura 1, o movimento do elemento de viga 2D é dado pelo vetor de deslocamentos nodais, expresso em coordenadas globais, como:

$$\mathbf{u}^T = (u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2) \quad (3)$$

As coordenadas nodais na configuração deformada podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais como $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2$, respectivamente. A partir destas expressões obtém-se que $x_{21} = X_{21} + u_{21}$ e $y_{21} = Y_{21} + v_{21}$, em que $u_{21} = u_2 - u_1$ e $v_{21} = v_2 - v_1$, respectivamente, o que permite reescrever que $l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2}$. Para definir o movimento de corpo rígido é fixado no centroide do elemento de viga 2D um sistema de coordenadas locais (x_θ , y_θ) que o acompanha durante todo o movimento, conforme mostra-se na Figura 1. Nota-se que o movimento de corpo rígido é definido por duas translações e uma rotação do sistema de referência local entre as configurações deformada e indeformada, e que se escreve como:

$$\mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \\ \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \\ \varphi - \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

A rotação de corpo rígido entre as configurações deformada e indeformada é dada por $\varphi - \varphi_0$. Por outro lado, o movimento deformacional em coordenadas locais, conforme mostra-se na Figura 1, é definido como:

$$\mathbf{u}_d = \begin{pmatrix} l - l_0 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

em que $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - (\varphi - \varphi_0)$ e $\bar{\theta}_2 = \theta_2 - (\varphi - \varphi_0)$ são rotações deformacionais dos nós 1 e 2, respectivamente, e $u = l - l_0$ é o estiramento ou encurtamento do elemento. Posteriormente, serão adotadas as rotações deformacionais geradas pelos esforços de flexão pura e simples, respectivamente.

2.1 Modos de deformações naturais

Foram necessários três graus de liberdade para definir o movimento de corpo rígido do elemento de viga 2D de acordo com o vetor de deslocamentos nodais dado pela equação

(4). Portanto, os três graus de liberdade restante definem o movimento deformacional do elemento de acordo com o vetor de deslocamentos nodais dado pela equação (5). Neste trabalho, adota-se o conceito dos modos de deformações naturais definidos nas referências [8,9] como mostra-se na Figura 2. O primeiro modo é obtido pela aplicação de um esforço axial nos nós do elemento conforme mostra-se na Figura 2a. O segundo modo é obtido ao considerar o elemento sujeito a um estado de flexão pura o que implica na ausência de esforço cortante. Este modo define uma linha elástica simétrica em relação ao eixo local y_e conforme mostra-se na Figura 2b. No terceiro modo o elemento está sujeito a um estado de flexão simples que resulta em um esforço cortante constante. Este modo define uma linha elástica antissimétrica em relação ao eixo local conforme mostra-se na Figura 2c.

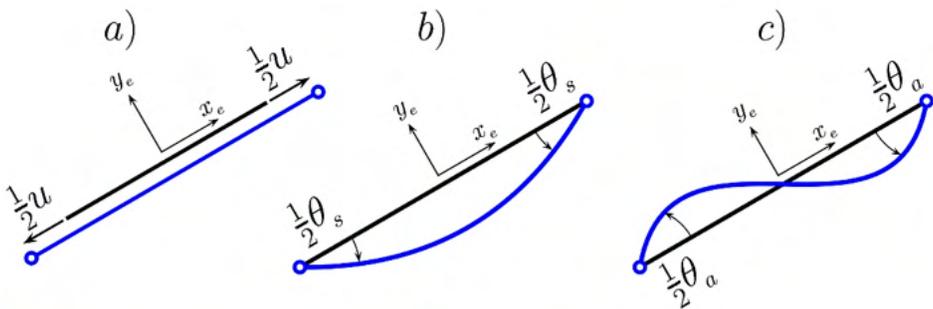


Figura 2: Modos de deformações naturais. a) estiramento. b) elástica simétrica. c) elástica antissimétrica

Portanto, pode-se reescrever o vetor de deslocamentos deformacionais dado em (5), em função dos modos de deformações naturais, da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_d^T = (u, \theta_s, \theta_a) \quad (6)$$

em que:

$$\mathbf{u} = l - l_0$$

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1 \quad (7)$$

$$\theta_a = \theta_2 + \theta_1 - 2(\varphi - \varphi_0)$$

Para obter as expressões (7b) e (7c) utilizam-se as rotações deformacionais $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ dadas em (5). Logo, conforme as Figuras 2b e 2c, somam-se a rotações simétricas e antissimétricas de cada nó do elemento. Por último, igualam-se essas somas às rotações $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, respectivamente. Este procedimento resulta no seguinte sistema de equações:

$$-\frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a = \theta_1 - (\varphi - \varphi_0) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a = \theta_2 - (\varphi - \varphi_0)$$

cuja solução obtém os valores de θ_s e θ_a dados pelas equações (7b) e (7c), respectivamente. Para que não haja restrições quanto as magnitudes dos ângulos, a expressão da rotação antissimétrica deve ser calculada usando a função trigonométrica módulo [11], tal que:

$$\theta_a = \text{mod}_{2\pi}(\theta_a + \pi) - \pi \quad (9)$$

A função módulo coloca um valor arbitrário no intervalo $[0, 2\pi]$, e o último termo restabelece a simetria em relação ao valor zero. A omissão deste passo pode levar a problemas de divergência quando o elemento de viga 2D sofre rotações, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$

Na Figura 3 mostra-se a aplicação da função módulo dada em (9) para ângulos que variam de zero até $\theta=20\pi$, que corresponde a 10 voltas em círculo de raio unitário. Nota-se que os valores estão dentro do intervalo $-\pi < \theta^* < \pi$ devido à simetria em relação ao valor zero.

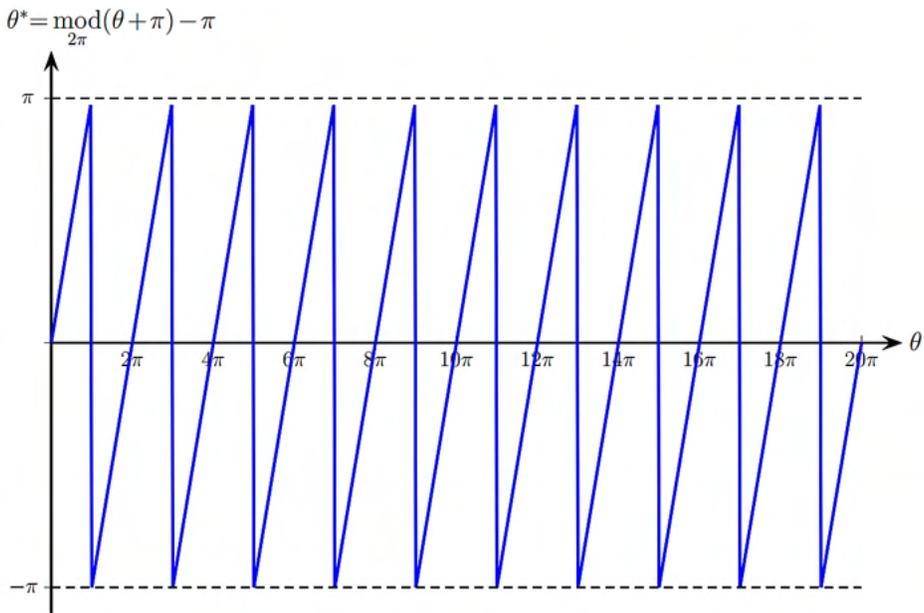


Figura 3: Função módulo para ângulos arbitrários.

2.2 Vetor de forças internas

É importante ressaltar que os modos de deformações naturais geram esforços auto-equilibrados como se mostra na Figura 4. O vetor de esforços auto-equilibrados é expresso

como:

$$\mathbf{f}_d^T = (n, m_s m_a) \quad (10)$$

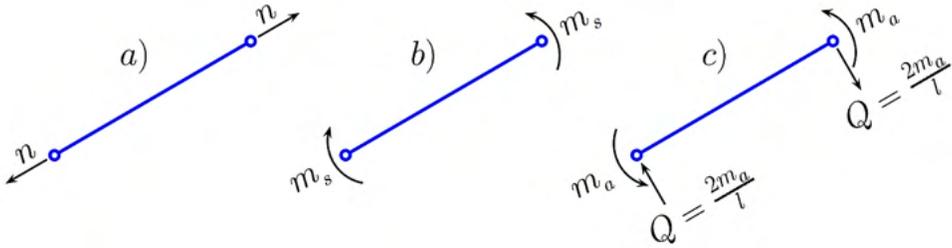


Figura 4 – Esforços auto-equilibrados. a) Esforço axial. b) Flexão pura. c) Flexão simples.

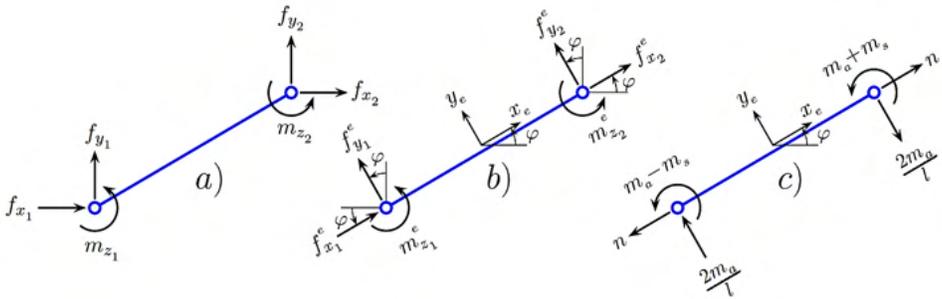


Figura 5 – Vetor de forças nodais. a) Em coordenadas globais. b) Em coordenadas locais. c) Auto-equilibradas.

A combinação dos esforços auto-equilibrados, mostrados na Figura 4, gera o vetor de forças nodais em coordenadas locais como mostram as Figura 5b e 5c. O vetor de forças nodais também pode ser expresso em coordenadas globais como mostra a Figura 5a. A relação entre o vetor de esforços auto-equilibrados e o vetor de forças nodais expresso em coordenadas locais é dada por:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (11)$$

em que \mathbf{S} é a matriz de transformação dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2/l \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Analogamente, a relação entre o vetor de forças nodais em coordenadas locais, ver Figura 4b, e o vetor de forças nodais em coordenadas globais, ver Figura 4a, é escrita como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{f}^e \quad (13)$$

em que \mathbf{R} é a matriz de rotação do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais. Define-se esta matriz através da seguinte expressão:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Finalmente, substituindo a equação (11) na equação (13), obtém-se a relação entre o vetor de forças auto-equilibradas e o vetor de forças nodais em coordenadas globais, tal que:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{f}_d \quad (15)$$

Por outro lado, os deslocamentos nodais podem ser escritos em relação ao sistema de coordenadas locais como:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{u} \quad (16)$$

3 | MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A relação entre os incrementos de deslocamentos e de forças em coordenadas locais se expressa como:

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e d\mathbf{u}^e \quad (17)$$

em que \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez tangente. Utilizando as equações (13), (16) e (17), determina-se a matriz de rigidez tangente em coordenadas globais da seguinte maneira

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{K}^e\mathbf{R}^T \quad (18)$$

Ao aplicar um incremento infinitesimal de deslocamentos a partir da configuração de equilíbrio atual conforme mostra-se na Figura 6, os incrementos de rotação de corpo rígido e de longitude do elemento se escrevem como:

$$d\varphi = \frac{dv_2^e - dv_1^e}{l}, \quad dl = du_2^e - du_1^e \quad (19)$$

em que $(du_1^e, dv_1^e, du_2^e, dv_2^e)$ são as componentes dos deslocamentos nodais em relação ao sistema de coordenadas locais.

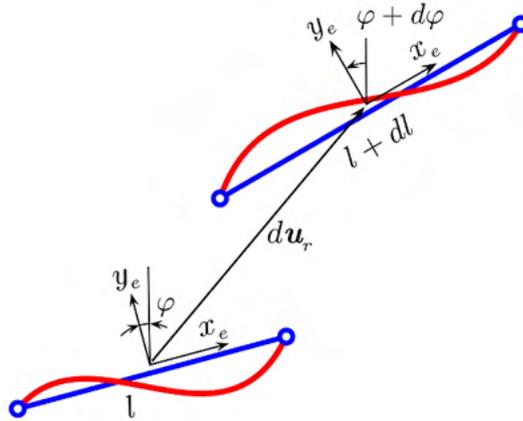


Figura 6 – Movimento incremental do elemento viga 2D.

Considerando que o trabalho interno independe do sistema de coordenadas, e levando em conta a equação (11), a variação do trabalho interno pode ser escrito como:

$$dV = d\mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e = d\mathbf{u}^{eT} \mathbf{S} \mathbf{f}_d = d\mathbf{u}_d^T \mathbf{f}_d \quad (20)$$

em que $d\mathbf{u}_d^T = (du, d\theta_s, d\theta_a)$ é a variação dos modos de deformações naturais. A última igualdade na equação acima se cumpre para qualquer valor arbitrário de \mathbf{f}_d , como consequência se obtém que:

$$d\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \quad (21)$$

A variação do vetor de forças internas dado pela equação (15) se escreve como:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{S} d\mathbf{f}_d + \mathbf{R} d\mathbf{S} \mathbf{f}_d + d\mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (22)$$

com,

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\varphi & -\text{cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\varphi & -\text{cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi, \quad d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A relação entre as variações dos esforços internos e dos modos de deformações naturais se expressa como:

$$d\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d d\mathbf{u}_d \quad (24)$$

em que \mathbf{K}_d é a matriz de rigidez elástica, cuja dimensão é 3×3 . Levando em conta as equações (13), (21) e (24), a equação (22) pode ser reescrita como:

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + (d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} \mathbf{S}) \mathbf{f}_d \quad (25)$$

Finalmente, levando em conta a equação (17), a matriz de rigidez tangente em

relação ao sistema de coordenadas locais pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{S}\mathbf{K}_d\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r \quad (26)$$

O primeiro termo leva em conta os coeficientes de rigidez devido aos modos de deformações naturais, enquanto que \mathbf{K}_r é a matriz de rigidez co-rotacional, que representa o efeito da variação da rotação de corpo rígido do sistema de referência local y do efeito do esforço cortante devido à variação da longitude do elemento de viga 2D. De acordo com a equação (25), a matriz de rigidez co-rotacional é definida como $\mathbf{K}_r = d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R}\mathbf{S}$. De acordo com a equação (23) verifica-se que a variação da matriz de transformação \mathbf{S} depende da variável dl e que a variação da matriz de rotação \mathbf{R} depende de $d\phi$. Levando em conta a equação (19), depois de um desenvolvimento algébrico, chega-se a:

$$\mathbf{K}_r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Esta matriz forma parte da matriz de rigidez geométrica completa do elemento de viga 2D como se demonstrará na seção 3.3.

3.1 Matriz de rigidez elástica

O primeiro modo de deformação é o alongamento/encurtamento do elemento de viga 2D e seu coeficiente de rigidez, de acordo com a teoria da resistência dos materiais, se obtém através da relação incremental $dN = \frac{EA}{l} du$. Para o elemento sujeito a flexão pura obtém-se o coeficiente de rigidez através do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementar (PTVC), o que resulta na seguinte relação incremental $dM_s = \frac{EA}{l} d\theta_s$. O terceiro modo de deformação natural representa o elemento sujeito a flexão simples o que resulta em um esforço cortante constante. Desta maneira, ao aplicar o PTVC, obtém-se que:

$$M_a \theta_a = \int_0^l \left(\frac{M(x)^2}{EI} + \frac{Q^2}{GA_0} \right) dx = \frac{1}{3} \frac{M_a^2 l}{EI} + \frac{Q^2 l}{GA_0} \quad (28)$$

em que A_0 é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma que leva em conta o efeito da distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal. Introduce-se o efeito da deformação por cortante através dos seguintes parâmetros:

$$\psi_a = \frac{1}{1 + \Phi}, \quad \Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2} \quad (29)$$

Usando a expressão do esforço cortante $Q = \frac{2M_a}{l}$ e a equação (28), obtém-se a seguinte relação incremental:

$$dM_a = 3\psi_a \frac{EI}{l} d\theta_a \quad (30)$$

Finalmente, a matriz elástica é definida como:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 3\psi_a \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Cabe destacar que os coeficientes de rigidez a flexão desta matriz levam em conta tanto a hipótese de Euler-Bernoulli quanto a hipótese de Timoshenko, por esta razão a denominação de elemento de viga unificado.

3.2 Matriz de rigidez geométrica

Ademais da matriz de rigidez elástica é necessário levar em consideração a matriz de rigidez geométrica devido ao efeito do esforço axial quando o elemento de viga 2D sofre um incremento de rotação de corpo rígido. Neste trabalho, para obter os coeficientes da matriz de rigidez geométrica considera-se a equação diferencial da viga-coluna sem cargas transversais e não levando em conta o efeito do esforço cortante. Considera-se o elemento de viga simplesmente apoiado para que se cumpra as condições de contorno do segundo e terceiro modos de deformações naturais como se mostra nas Figuras 2b e 2c. Desta maneira, a equação diferencial que governa o problema se escreve como:

$$EIv'''' - Nv'' = 0 \quad (32)$$

Após aplicar duas vezes a integração por partes, obtém-se a seguinte forma integral desta equação diferencial:

$$\int_0^l (\delta v'' EI v'' + \delta v' N v') dx = [\delta v Q + \delta \theta M]_0^l \quad (33)$$

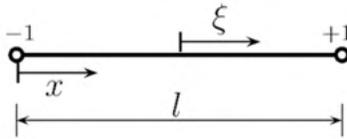
A relação incremental desta forma integral, após o desenvolvimento algébrico, se expressa como:

$$\int_0^l (\delta v'' EI dv'' + \delta v' N dv') dx = [\delta v dQ + \delta \theta dM]_0^l \quad (34)$$

Para calcular o coeficiente de rigidez geométrico devido ao segundo modo de deformação natural assume-se a seguinte igualdade:

$$\int_0^l \delta v' N dv' dx = [\delta \theta_s dM_s]_0^l \quad (35)$$

Interpola-se o campo de deslocamento incremental dv , o campo de deslocamento virtual δv e suas derivadas de primeira ordem utilizando a função de forma para a elástica simétrica definida na Figura 7.



$$x = \frac{l}{2}(1 + \xi) \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}$$

Elástica simétrica

$$v = -\frac{l}{8}(1 - \xi^2)\theta_s$$

Elástica antissimétrica

$$v = -\frac{l}{8}(1 - \xi^2)\xi\theta_s$$

Regra da cadeia

$$\frac{d(\cdot)}{dx} = \frac{d(\cdot)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

Figura 7: Função de forma.

Em seguida aplica-se a regra da cadeia obtendo que $dv = \frac{1}{2}\xi d\theta_s$ e $\delta v = \frac{1}{2}\xi\delta\theta_s$. Posteriormente, integrando a equação (35) no espaço da coordenada ξ chega-se a:

$$dM_a = \frac{1}{2}Nl d\theta_a \Rightarrow k_a = \frac{1}{2}Nl \quad (36)$$

Para calcular o coeficiente de rigidez geométrico devido ao terceiro modo de deformação natural, impõe-se a seguinte igualdade:

$$\int_0^l \delta v' N dv' dx = [\delta \theta_a dM_a]_0^l \quad (37)$$

Seguindo os passos anteriores para o caso da elástica antissimétrica, ao aplicar a regra da cadeia obtém-se que $dv = -\frac{1}{4}(1-3\xi^2) d\theta_a$ e $\delta v = -\frac{1}{4}(1-3\xi^2)\delta\theta_a$. Desta maneira, integrando a equação (37) no espaço da coordenada ξ chega-se a seguinte expressão:

$$dM_a = \frac{1}{20}Nl d\theta_a \Rightarrow k_a = \frac{1}{20}Nl \quad (38)$$

Portanto, define-se a matriz de rigidez geométrica como:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Nl & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}Nl \end{bmatrix} \quad (39)$$

3.3 Matriz de rigidez tangente completa

Para obter a matriz de rigidez tangente completa do elemento de viga 2D estendem-se as dimensões das matrizes \mathbf{K}_d e \mathbf{K}_g para suas formas completas, isto é, para matrizes de ordem 6x6 utilizando-se a matriz de transformação \mathbf{S} . Consequentemente, a forma completa da matriz de rigidez tangente se escreve como:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{S}\mathbf{K}_d\mathbf{S}^T + \mathbf{S}\mathbf{K}_g\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r = \mathbf{K}_d^e + \mathbf{K}_g^e \quad (40)$$

com,

$$\mathbf{K}_d^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a \frac{EI}{l^3} & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & 0 & -12\psi_a \frac{EI}{l^3} & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a + 1) \frac{EI}{l} & 0 & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a - 1) \frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\psi_a \frac{EI}{l^3} & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} & 0 & 12\psi_a \frac{EI}{l^3} & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a - 1) \frac{EI}{l} & 0 & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a + 1) \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{K}_g^e = \mathbf{S}\mathbf{K}_g\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & \frac{6}{5}N & \frac{1}{10}Nl & -Q & -\frac{6}{5}N & \frac{1}{10}Nl \\ 0 & \frac{1}{10}Nl & \frac{2}{5}Nl^2 & 0 & -\frac{1}{10}Nl & -\frac{1}{30}Nl^2 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -\frac{6}{5}N & -\frac{1}{10}Nl & Q & \frac{6}{5}N & -\frac{1}{10}Nl \\ 0 & \frac{1}{10}Nl & -\frac{1}{30}Nl^2 & 0 & -\frac{1}{10}Nl & \frac{2}{15}Nl^2 \end{bmatrix}$$

em que \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez tangente do elemento de viga 2D em coordenadas locais, \mathbf{K}_d^e é a matriz de rigidez material e \mathbf{K}_g^e é a matriz de rigidez geométrica. Cabe destacar que Turner *et al.* [12] foram os primeiros autores a obter a matriz de rigidez material para um elemento de viga de Timoshenko sem bloqueio por cortante e que em Przemieniecki [13] descreve-se a matriz de rigidez material em função do coeficiente ψ_a , definido em (29), através da solução de uma equação diferencial ordinária levando em consideração as hipóteses de Timoshenko. Por outro lado, assumindo $Q=0$ na matriz de rigidez geométrica

em (41b) chega-se a matriz de rigidez geométrica padrão do elemento de viga de Euler-Bernoulli que se escreve como:

$$\mathbf{K}_g^e = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Esta matriz aparece pela primeira vez no artigo publicado por Martin [14] nos anos 60.

4 | EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para realizar a análise não linear geométrica dos exemplos apresentados nesta seção, foi utilizado um programa escrito em linguagem Fortran90 denominado `co_rotating_2Dbeam.f90` escrito pelo primeiro autor deste artigo.

Deslocamentos em coordenadas globais	
$\mathbf{u}^T = (u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$	(3)
Configuração deformada	
$\mathbf{x}^T = \mathbf{X}^T + \mathbf{u}^T = (X_1 + u_1, Y_1 + v_1, \theta_1, u_2 + X_2, v_2 + Y_2, \theta_2)$	
Rotação de corpo rígido: $\varphi_r = \varphi - \varphi_0$	
$\varphi_0 = 2 \arctan\left(\frac{l_0 - X_{21}}{Y_{21}}\right), \quad \varphi = 2 \arctan\left(\frac{l - x_{21}}{y_{21}}\right)$	(1), (2)
Modos de deformações naturais	
$u = l - l_0$	
$\theta_s = \theta_2 - \theta_1$	(7)
$\theta_a = \theta_2 + \theta_1 - 2(\varphi - \varphi_0)$	
Função módulo para ângulos arbitrários	
$\theta_a = \text{mod}(\theta_a + \pi) - \pi$	(9)
Esforços internos	
$\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d$	(10), (31)
Esforços em coordenadas globais	
$\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d$	(12), (14), (15)
Matriz de rigidez tangente em coordenadas globais	
$\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^T$	(14), (18), (40)

Tabela 1: Algoritmo da descrição co-rotacional.

A Tabela 1 resume os principais passos a serem implementados em um programa computacional para o cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente do elemento de viga 2D, ambos expressos em coordenadas globais.

Em todos os exemplos apresentados nesta seção foi adotada uma tolerância para convergência de 10^{-5} . O objetivo nesta seção é mostrar o desempenho do elemento de viga unificado desenvolvido neste trabalho para reproduzir o comportamento fortemente não linear de alguns sistemas estruturais. É importante destacar, como será visto nos exemplos a seguir, que o elemento de viga unificado aqui descrito não apresenta bloqueio por cortante, além da habilidade do mesmo em lidar com grandes rotações de corpo rígido.

4.1 Arco circular de grande altura rotulado e engastado

Como mostra a Figura 8a, este exemplo consiste em um arco de grande altura de diretriz circular com uma extremidade engastada e a outra apoiada com um vínculo de segundo gênero. Este arco está sujeito a uma carga concentrada no vértice. Na Figura 8a detalham-se as propriedades geométricas e mecânicas do arco que foi discretizado com 20 elementos de viga 2D unificado.

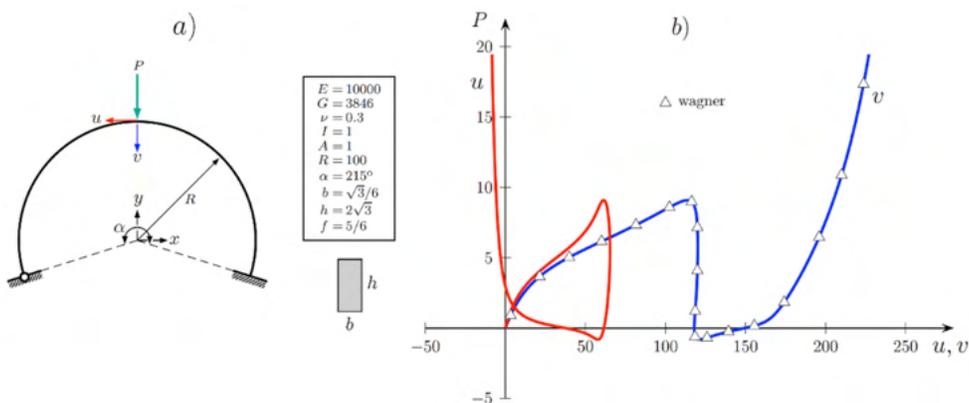


Figura 8: Arco circular de grande altura. a) Propriedades geométricas e mecânicas. b) Trajetórias de equilíbrio.

Na Figura 8b mostram-se as trajetórias de equilíbrio que descrevem a evolução dos deslocamentos horizontal u e vertical v do vértice do arco. Foram comparados os resultados da trajetória de equilíbrio $P \times v$ com os resultados obtidos por Wagner [15], onde pode-se observar uma boa concordância entre ambos resultados. Para obter as trajetórias de equilíbrio foi utilizado o método de longitude de arco com restrições das iterações em trajetória ortogonal nas fases corretoras. A longitude de arco adotada foi de 12 para 100 passos de carga e 436 iterações totais. O número médio de iterações por passo de carga foi de 4,36. Pode-se observar que as trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 8b

apresentam pontos limites e *turning points*.

4.2 Arco semicircular biarticulado

Neste exemplo considera-se um arco semicircular biarticulado sujeito a uma carga P excêntrica em relação ao seu vértice como mostra a Figura 9a. Nesta figura encontram-se detalhadas as propriedades geométricas e mecânicas do arco que foi discretizado com 50 elementos de viga unificado (EVU). Na Figura 9b mostra-se a curva da carga P versus o deslocamento v do vértice. Observa-se nesta figura que há 9 pontos limites.

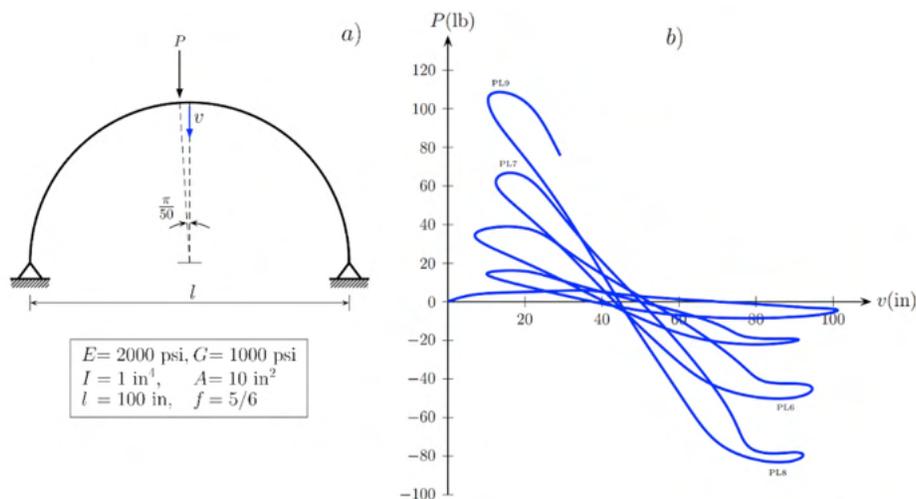


Figura 9: Arco semicircular biarticulado. a) Propriedades geométricas e mecânicas. b) Trajetórias de equilíbrio.

Os valores da carga P nos nove pontos limites foram comparados com os valores apresentados por Yang e Kuo [16]. Estes autores utilizaram a formulação Lagrangeana Atualizada, um elemento de viga que inclui termos não lineares da deformação axial de Green-Lagrange e uma malha com 26 elementos de viga 2D. Os valores destas cargas estão detalhados na Tabela 2. Nota-se que a maior diferença foi de 3,82% observada no ponto limite 9 (LP9). Para obter a trajetória de equilíbrio foi utilizado o método de controle variável dos deslocamentos. O valor inicial da longitude de arco foi de 2,2. Foram utilizados 859 passos de carga com 91 cortes automáticos devido a divergência no processo iterativo da fase corretora de alguns passos de carga. O número médio de iterações foi de 4,23. Pode-se notar que a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 9b é fortemente não linear com a presença de vários *limit points*, *turning points* e *loopings*.

	PL1	PL2	PL3	PL4	PL5	PL6	PL7	PL8	PL9
Yang y Kuo	5.813	-8.498	16.149	-22.162	38.566	-49.896	64.875	-82.420	104.611
EVU	5.811	-8.495	16.204	-22.086	38.932	-50.206	66.786	-83.138	108.61
diferença (%)	0.03	0.04	0.34	0.34	0.95	0.62	2.95	0.87	3.82

Tabela 2: Valores da carga P nos pontos limites – (lb)

4.3 Arco circular biarticulado abatido sob carga excêntrica

Neste exemplo considera-se um arco abatido de diretriz circular com ambas extremidades apoiadas e sujeito a uma carga concentrada P com uma excentricidade de $0,2m$ em relação ao seu vértice. Desta maneira, considerou-se a carga P e um momento fletor $M=0,2P$ aplicados no vértice do arco. Na Figura 10a detalham-se as propriedades geométricas e mecânicas do arco que foi discretizado com 20 elementos de viga unificado.

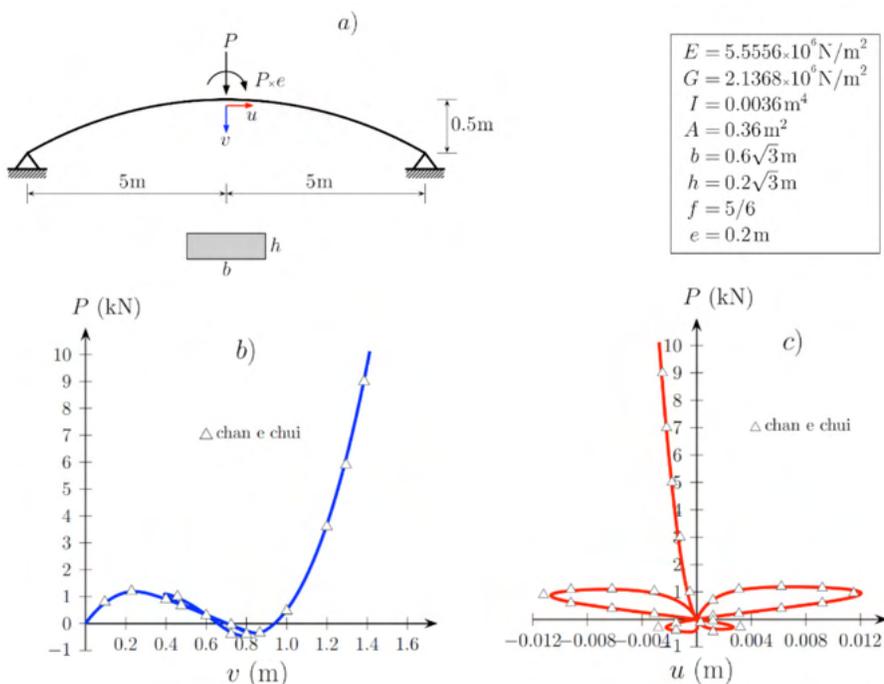


Figura 10: Arco circular biarticulado abatido. a) Propriedades geométricas e mecânicas. b) Deslocamento vertical do vértice. c) Deslocamento horizontal do vértice.

Na Figura 10b mostra-se a curva carga P versus deslocamento vertical v do vértice. Na Figura 10c mostra-se a curva carga P versus o deslocamento horizontal u do vértice. Foram comparados os resultados de ambas trajetórias de equilíbrio com os resultados obtidos por Chan e Chui [17] onde pode-se observar uma boa concordância, com exceção

de pequenas discrepâncias no tamanho dos laços na direção do eixo x apresentados na Figura 10c. Essas discrepâncias, provavelmente, devem-se ao processo de obtenção desses pontos. Esses pontos foram obtidos após a digitalização dos gráficos apresentados em [17], e também, há de se ressaltar o ajuste das escalas dos eixos coordenados. Para obter as trajetórias de equilíbrio foi utilizado o método de controle variável dos deslocamentos apresentados na referência [18]. O valor da longitude de arco foi de 0,0085 para 315 passos de carga. O número médio de iterações foi de 3,6. Nota-se que as trajetórias de equilíbrio do arco mostradas nas Figuras 10b e 10c são fortemente não lineares com a presença de alguns *limit points*, *turning points* e *loopings*.

4.4 Arco circular biarticulado abatido sob carga distribuída

Neste exemplo considera-se um arco abatido de diretriz circular biapoado e submetido a uma carga q uniformemente distribuída ao longo da metade de seu vão, conforme mostra-se na Figura 11a.

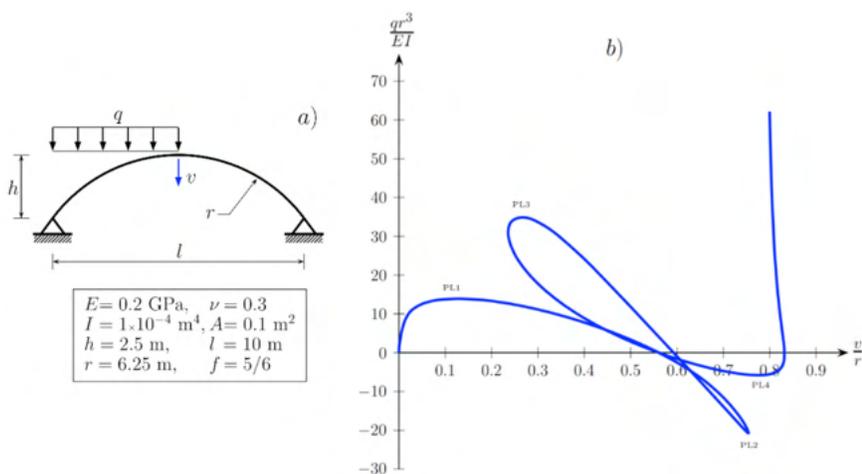


Figura 11: Arco circular biarticulado abatido. a) Propriedades geométricas e mecânicas. b) Trajetórias de equilíbrio.

Nesta Figura 11a detalham-se ainda as propriedades geométricas e mecânicas do arco que foi discretizado com 20 elementos de viga unificado (EVU). Na Figura 11b mostra-se a curva da carga normalizada qr^3/EI versus o deslocamento vertical normalizado v/r do vértice. Pode-se observar que há quatro pontos limites. Os valores normalizados das cargas nos pontos limites foram comparados com os valores obtidos por Xu e Mirmiran [19]. Estes autores utilizaram a formulação co-rotacional e um elemento de viga que inclui os termos não lineares da deformação axial de Green-Lagrange. Além disso, utilizaram uma malha com 20 elementos. Os valores destas cargas estão detalhadas na Tabela 3, onde

observou-se que a maior diferença foi de 3,1% no ponto limite 2 (PL2).

	PL1	PL2	PL3
Xu y Mirmiran	13.77	-20.09	33.99
EVU	13.92	-20.71	34.86
diferença (%)	1.09	3.09	2.56

Tabela 2: Valores da carga $\frac{qr^3}{EI}$ nos pontos limites

Para obter a trajetória de equilíbrio foi utilizado o método de controle variável dos deslocamentos. O valor inicial da longitude de arco foi de 0,1. Foram utilizados 177 passos de carga com 12 cortes automáticos devido a divergência do processo iterativo na fase corretora de alguns passos de carga. O número médio de iterações foi de 4,18. Pode-se notar que a trajetória de equilíbrio do arco mostrado na Figura 11b apresenta fortes não linearidades com a presença de alguns *limit points*, *turning points* e um *looping*.

5 | CONCLUSÕES

Neste trabalho mostrou-se, através dos exemplos numéricos, a habilidade do elemento de viga unificado em lidar com grandes translações e rotações de corpo rígido. Desta maneira, não se produz um aumento artificial da rigidez no comportamento não linear de diferentes tipologias estruturais. Foi descrita de maneira detalhada a relação entre a formulação co-rotacional e os modos de deformações naturais. A grande vantagem do uso dos modos deformacionais naturais é que os mesmos definem a priori esforços internos auto-equilibrados, o que permite obter o vetor de forças nodais e a matriz de rigidez tangente de maneira consistente, descritos em coordenadas globais, através de operações algébricas bastante simples. Ademais, neste trabalho descreveu-se de maneira explícita o movimento de corpo rígido do elemento de viga unificado e a dedução da matriz de rigidez co-rotacional. Cabe destacar que a principal vantagem da formulação co-rotacional é o desacoplamento entre os efeitos locais e globais, e isto permite utilizar uma biblioteca de elementos finitos oriundos da análise linear. A utilização de elementos finitos lineares na análise não linear geométrica através da formulação co-rotacional se deve ao fato desta formulação descrever os efeitos globais como movimento de corpo rígido. Por último, é importante ressaltar que distintas fontes de não linearidades físicas podem ser tratadas como efeitos locais na formulação co-rotacional.

REFERÊNCIAS

B. Skallerud, K. Holthe and B. Haugen, Thin shell and surface crack elements for simulation of combined failure modes, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol.194/21, 2619{2640, 2006.

L.L. Yaw, N. Sukumar and S.K. Kunnath, Meshfree co-rotational formulation for twodimensional continua, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 79(8),979{1003, 2009.

C.A. Felippa and B. Haugen, A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 81, pp.131-150, 2005.

M. Mostafa, M. V. Sivaselvan and C. A. Felippa, A solid-shell corotational element based on ANDES, ANS and EAS for geometrically nonlinear structural analysis, **International journal for numerical methods in engineering**, Vol. 95, pp. 145{180, 2013.

W.T. Matias e L.M. Bezerra, Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2D, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, Vol. 25, No. 2, pp. 163-190, 2009.

T.N. Le, J.M. Battini and M. Hjjaj, Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams, **Computational Mechanics**, Vol. 48, No. 2, 153-161, 2011.

T.N. Le, J.M. Battini and M. Hjjaj, A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 269, pp. 538{565, 2014.

J. Argyris, H. Balmer, J.St. Doltsinis, *et al*, Finite element method - the natural approach, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 17/18, pp. 1-106., 1979.

J. Argyris, H.O. Hilpert, G.A. Malejannakis and D.W. Scharpf, D.W., On the geometrical stiffness of a beam in space - A consistent V.W. approach, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 20, pp. 105-131, 1979.

S. Krenk, A general format for curved and nonhomogeneous beam elements, **Computers & Structures**, Vol. 50, pp. 449-454, 1994.

S. Krenk, **Non-linear modeling and analysis of solids and structures**, Cambridge University Press, 2009.

M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures, **Journal of the Aeronautical Sciences**, Vol. 23, pp. 805{824, 1956.

J. S. Przemieniecki, **Theory of matrix structural analysis**, McGraw-Hill, 1968.

H.C. Martin, On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, pp. 697{716, 1966.

W. Wagner, A path-following algorithm with quadratic predictor, **Computers and Structures**, Vol. 39, pp. 339-348, 1991.

Yang, Y.B. and Kuo, S.R., **Theory & analysis of nonlinear framed structures**, Prentice Hall, 1994.

S.L. Chan and P.P.T. Chui, **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semirigid connections**, Elsevier, Amsterdam, 2000.

W.T. Matias, El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería**, Vol. 18, No. 4, pp. 549-572, 2002.

Xu, Z. and Mirmiran, A., Looping behavior of arches using corotational finite element, **Computers & Structures**, Vol. 62, No. 6, pp. 1059-1071, 1997.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Acurácia 34, 39, 44

Autodesk Revit 2020 1, 14

B

BIM 1, 2, 3, 4, 9, 11, 16, 17, 20, 21, 22

C

Construção civil 1, 2, 3, 21, 22, 50, 61

Corrosão 48, 49, 54, 56, 58, 59, 60

D

Diseño 23, 81, 82, 85, 94

Dynamo 2.1 1

E

Elemento de viga Bernoulli-Timoshenko 62

Estação total 34, 35, 36, 37, 39, 46

Estruturas de concreto 48, 49, 50, 51, 59, 60, 61

F

Formulação co-rotacional 62, 63, 79, 80, 81

G

GPS 34, 35, 39, 40, 41, 43, 44

I

Ingeniería 23, 24, 32, 33, 82, 83, 85, 94

L

Locação de obra 34

M

Manutenção 3, 48, 58, 59, 60, 61

Métodos dos elementos finitos 62

Métodos numéricos 23, 24, 32, 33, 81, 82

Modos de deformação naturais 62

N

Não-linearidade geométrica 62

O

Orçamentação 1, 2, 12

P

Patologias 48, 49, 50, 60

Plan de gestión ambiental 84, 87

Plataforma 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12

Programação 1, 6, 7, 8, 9, 11

Projetos 2, 3, 12, 50, 52

S

Sinapi 1, 10, 11, 12, 13, 20

Softwares 1, 3, 6, 7, 8, 35

Suelo 84, 85, 86

T

TecNM 23

TRANSGEOLOCAL 34, 35, 40, 41, 47

COLEÇÃO DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 4

- 
-  www.atenaeditora.com.br
 -  contato@atenaeditora.com.br
 -  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
 -  www.facebook.com/atenaeditora.com.br

COLEÇÃO

DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 4

- 
-  www.atenaeditora.com.br
 -  contato@atenaeditora.com.br
 -  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
 -  www.facebook.com/atenaeditora.com.br