

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

COLEÇÃO
DESAFIOS
DAS
ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3



ARMANDO DIAS DUARTE
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Daphynny Pamplona

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizador: Armando Dias Duarte

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D812 Coleção desafios das engenharias: engenharia civil 3 /
Organizador Armando Dias Duarte. - Ponta Grossa -
PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-639-0

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.390212610>

1. Engenharia civil. I. Duarte, Armando Dias. II. Título.
CDD 624

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos - CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa - Paraná - Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, desta forma não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A coleção de trabalhos intitulada “Coleção desafios das engenharias: Engenharia Civil 3” é uma obra que tem como foco principal a discussão científica por intermédio de trabalhos diversos que compõe seus capítulos. O volume abordará de forma categorizada e interdisciplinar trabalhos, pesquisas, relatos de casos e/ou revisões que através dos resultados, possam auxiliar na tomada de decisão, tanto no campo acadêmico, quanto no desenvolvimento profissional.

Os estudos apresentados, foram desenvolvidos em diversas instituições de ensino e pesquisa do país e também um caso internacional. Em todos esses trabalhos foram apresentadas diversas problemáticas a respeito do estudo de interação solo-estrutura, orçamento de obras, desempenho de materiais, aditivos para materiais da construção civil, análises através da ferramenta Building Information Modelling (BIM), gestão de resíduos **sólidos**, entre outros. Os estudos presentes nos trazem à tona, temas interdisciplinares através da segurança de obras civis, aspectos econômicos, sociais e ambientais.

Os temas discutidos nesta obra, possuem a proposta de fundamentar o conhecimento de acadêmicos, mestres e todos aqueles que de alguma forma se interessam pela área da Engenharia Civil, com temáticas atuais e que são apresentadas como desafios enfrentados pelos profissionais e acadêmicos, deste modo a obra “Coleção desafios das engenharias: Engenharia Civil 3”, apresenta uma teoria fundamentada nos resultados práticos obtidos pelos diversos professores e acadêmicos que desenvolveram seus trabalhos e pesquisas, os quais serão apresentados de maneira concisa e didática.

A divulgação científica é de suma importância para o desenvolvimento de toda uma nação, portanto, fica evidenciada a responsabilidade de transmissão dos saberes através de plataformas consolidadas e confiáveis, sendo a Atena Editora, capaz de oferecer uma maior segurança para os novos pesquisadores e os que já atuam nas diferentes áreas de pesquisa, exporem e divulguem seus resultados.

Armando Dias Duarte


SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM EDIFICAÇÕES DE CONCRETO ARMADO SOBRE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS

Mateus Lima Barros

Vinicius Costa Correia


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126101>

CAPÍTULO 2..... 13

ANÁLISE DE HASTES DELGADAS EM GRELHAS HIPERESTÁTICAS

Antônio Luís Alves da Cunha

Luiz Carlos Mendes


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126102>

CAPÍTULO 3..... 28

ANÁLISE DE SÓLIDOS INELÁSTICOS SOB DEFORMAÇÃO FINITA USANDO ELEMENTOS BIARTICULADOS 2D E 3D

William Taylor Matias Silva

Sebastião Simão da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126103>

CAPÍTULO 4..... 46


APLICAÇÃO DA NORMA ABNT NBR 16747 (2020) – INSPEÇÃO PREDIAL EM EMPREENDIMENTOS RURAIS – ESTUDO DE CASO

Camilla Cristina Cunha Menezes

Marcos de Paulo Ramos

Thiago Pena Bortone

Rachel Jardim Martini

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126104>

CAPÍTULO 5..... 58


APLICAÇÃO DE CURSO EXTENSÃO DE ORÇAMENTO DE OBRAS EM BIM COMPARANDO COM A METODOLOGIA ATUAL DA DISCIPLINA DE ORÇAMENTO DE OBRAS DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO FEDERAL DE SERGIPE – CAMPUS ESTÂNCIA

Anna Cristina Araujo de Jesus Cruz

José Carlos de Anunciação Cardoso Júnior

Mariana Silveira Araujo

Natália Ramos dos Santos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126105>


CAPÍTULO 6..... 67

CORROSÃO NA ARMADURA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO DEVIDO AO ATAQUE DE SULFATOS

Henrique Resende dos Santos

Adriano de Paula e Silva

Eduardo Chahud
Cristiane Machado Parisi Jonov

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126106>

CAPÍTULO 7..... 78

DANOS PÓS INCÊNDIO NA ESTRUTURA DE UMA SUBESTAÇÃO ELÉTRICA. UM ESTUDO DE CASO NA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO


Rodolpho Medeiros Frossard
Anna Luiza Macachero Victor Rodrigues
Lara Sandrini
Matheus Carreiro Zani
Warribe Lima de Siqueira
Geilma Lima Vieira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126107>

CAPÍTULO 8..... 90

DEGRADAÇÃO TÉRMICA DE CONCRETOS CONVENCIONAIS SUBMETIDOS A ALTAS TEMPERATURAS E RESFRIAMENTO LENTO


Moacyr Salles Neto
Flávio Roldão de Carvalho Lelis

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126108>

CAPÍTULO 9..... 103

DESEMPENHO DE EDIFICAÇÕES HOSPITALARES VIA DIMENSÕES MORFOLÓGICAS


Alyria Donegá
João da Costa Pantoja

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3902126109>

CAPÍTULO 10..... 115

DIFICULDADE DOS DISCENTES DE ENGENHARIA CIVIL NA MATÉRIA DE MECÂNICA VETORIAL COMPARANDO OS PARÂMETROS DO ENSINO PRESENCIAL E DO ENSINO REMOTO

Alessandro Leonardo da Silva
Emanuela dos Santos Gonzaga
Gustavo Neves Quintão Gonzales
Marcelo Robert Fonseca Gontijo
Thais Prado Vasconcelos Silva
Rodrigo Silva Fonseca
Heron Viterbre Debique Sousa
Ícaro Viterbre Debique Sousa


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261010>

CAPÍTULO 11..... 125

EFEITO DO TEOR e TIPO de CIMENTO NO MÓDULO DE RESILIÊNCIA DE SOLO ARENOSO ESTABILIZADO QUIMICAMENTE

José Wilson dos Santos Ferreira
Michéle Dal Toé Casagrande

Raquel Souza Teixeira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261011>

CAPÍTULO 12..... 136

ESTUDIOS DE PELIGRO SÍSMICO EN EL MUNICIPIO DE IXHUACÁN DE LOS REYES, VERACRUZ

Gilbert Francisco Torres Morales

Ignacio Mora González

Saúl Castillo Aguilar

René Álvarez Lima

Raymundo Dávalos Sotelo

José Alberto Aguilar Cobos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261012>

CAPÍTULO 13..... 150

ESTUDO DA APLICAÇÃO DO LÁTEX DA SERINGUEIRA AMAZÔNICA (*HEVEA BRASILIENSIS*) COMO ADITIVO EM ARGAMASSA COM CIMENTO PORTLAND PARA MELHORA DE COMPORTAMENTO MECÂNICO

José Costa Feitoza

Natália da Mata Batista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261013>

CAPÍTULO 14..... 160


ESTUDO DE UMA CONTENÇÃO UTILIZANDO FERRAMENTA NUMÉRICA E MÉTODOS APROXIMADOS DE DIMENSIONAMENTO DE TIRANTES

Renathielly Fernanda da Silva Brunetta

Isabela Grossi da Silva

Leandro Canezin Guideli

Vitor Pereira Faro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261014>

CAPÍTULO 15..... 173

AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DO TRATAMENTO TÉRMICO NO GNAISSE MILONÍTICO

Kelly de Oliveira Borges da Costa

Afonso Rangel Garcez de Azevedo

Carlos Maurício Fontes Vieira


Elaine Aparecida Santos Carvalho Costa

Geovana Carla Girondi Delaqua

Gustavo de Castro Xavier

Letícia Borges da Costa

Vinícius Alves Polinicola

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261015>


CAPÍTULO 16..... 183

VIGAS DE GRAN ALTURA DE HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS. EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE

Viviana Carolina Rougier

Miqueas Ceferino Denardi

Dario Orestes Vercesi

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261016>

CAPÍTULO 17..... 195

GESTÃO E OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE AR CONDICIONADO: UMA NOVA ABORDAGEM USANDO MODELAGEM 6D

João Bosco Pinheiro Dantas Filho

Guilherme Bruno de Souza Ribeiro

Pedro Holanda

Bruna Vital Roque

Rodrigo G. Ribeiro

Artur de Almeida Evangelista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261017>

CAPÍTULO 18..... 206

GRANULOMETRIA DOS AGREGADOS GRAÚDOS COMERCIALIZADOS NOS MUNICÍPIOS DA CHAPADA DO APODI/RN – ANÁLISE COMPARATIVA COM A NORMA NBR 7211/2009

Renata Samyla Matias Nogueira

Clélio Rodrigo Paiva Rafael

Edna Lucia da Rocha Linhares

Ronald Assis Fonseca

Rokátia Lorrany Nogueira Marinho

Ligia Raquel Rodrigues Santos

Jaiana de Araújo Pinheiro

Carlos Eduardo Carvalho Oliveira

Edyelly Cristtian Galdino Fernandes

Francisco Felinto de Lima Neto

Luzianne Galvão Pimenta

Géssica de Moura Ribeiro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261018>

CAPÍTULO 19..... 221


INSPEÇÃO PREDIAL EM EMPREENDIMENTOS RURAIS APLICABILIDADE DA NBR 16747

Camilla Cristina Cunha Menezes

Marcos de Paulo Ramos

Thiago Pena Bortone

Rachel Jardim Martini

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261019>

CAPÍTULO 20..... 232


GESTÃO INTEGRADA DE RESÍDUOS SÓLIDOS

Wallace Ribeiro Nunes Neto

Camila Moraes Silva

Pedro Paulo Barbosa Nunes Sobrinho


Carlos Augusto Rocha de Moraes Rego
Louryval Coelho Paixão
Marcio Mendes Cerqueira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261020>

CAPÍTULO 21.....241

LOCUS SAECULARIS: MATERIAIS QUE CONSTRÍRAM UMA TRADIÇÃO


João Hermem Fagundes Tozatto
Crystian André Montozo Botelho

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261021>

CAPÍTULO 22.....253

MODELAGEM NUMÉRICA DE PAREDE DIAFRAGMA ATIRANTADA EM ÁREA URBANA


Isabela Grossi da Silva
Renathielly Fernanda da Silva Brunetta
Leandro Canezin Guideli
Vitor Pereira Faro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261022>

CAPÍTULO 23.....266

NOVA TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO DE TORRES EÓLICAS

Ilo Borba

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261023>

CAPÍTULO 24.....273

O CORREDOR BIOCEÂNICO: REESTRUTURAÇÃO TERRITORIAL DE NOVAS HINTERLÂNDIAS


Carlos Andrés Hernández Arriagada
Teo Felipe Bruder Gouveia




 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261024>

CAPÍTULO 25.....287

O MAPA DE DANOS COMO FERRAMENTA DE MANUTENÇÃO E RESTAURO DE EDIFICAÇÕES: UMA REVISÃO LITERÁRIA

Lucas Rodrigues Cavalcanti
Eliana Cristina Barreto Monteiro
Carlos Fernando Gomes do Nascimento
Catharina Silveira Rodrigues
Fabrício Fernando de Souza Lima
Amanda de Moraes Alves Figueira
José Maria de Moura Júnior
Sabrina Santiago Oliveira
Roberto Revoredo de Almeida Filho
Flávio Matheus de Moraes Cavalcante

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261025>

CAPÍTULO 26	302
TREINAMENTO DE REDES NEURAIAS ARTIFICIAIS PARA O DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	
João Victor Fernandes Masalkas	
Emerson Felipe Felix	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261026	
CAPÍTULO 27	316
UMA FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA DETECÇÃO DE PONTOS LIMITES E DE BIFURCAÇÃO	
William Taylor Matias Silva	
Sebastião Simão da Silva	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261027	
CAPÍTULO 28	333
UTILIZAÇÃO DO CARVÃO OBTIDO A PARTIR DA PIRÓLISE DA CASCA DE ARROZ PARA ADSORÇÃO DE AZUL DE METILENO	
Camila Ribeiro Rodrigues	
Marcelo Mendes Pedroza	
Mayara Shelly Miranda Bequimam	
David Barbosa Dourado	
Danielma Silva Maia	
Marcel Sousa Marques	
Hellen Dayany Barboza Barros	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.39021261028	
SOBRE O ORGANIZADOR	338
ÍNDICE REMISSIVO	339

UMA FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA DETECÇÃO DE PONTOS LIMITES E DE BIFURCAÇÃO

Data de aceite: 01/10/2021

Data de submissão: 08/09/2021

William Taylor Matias Silva

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Brasília - DF

<http://lattes.cnpq.br/3850624538330903>

Sebastião Simão da Silva

Instituto Federal de Ciência
Educação e Tecnologia da Paraíba
Curso de Bacharelado em Engenharia Civil
Cajazeiras – PB

<http://lattes.cnpq.br/6023548428079039>

RESUMO: Neste capítulo descreve-se analiticamente de maneira detalhada a detecção e a classificação de pontos críticos na trajetória primária de equilíbrio de sistemas estruturais. Utiliza-se a Formulação Lagrangiana Total para descrever a cinemática de um elemento de barra biarticulado 2D. Através desta formulação obtém-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente que levam em conta os efeitos da não linearidade geométrica. Assume-se um modelo constitutivo linear elástico para o estado uniaxial de tensão-deformação, usando a deformação de Green-Lagrange e a tensão axial do segundo tensor de Piola-Kirchhoff que são energeticamente conjugados. Como estudo de caso apresenta-se uma treliça plana hiperestática composta com 3 elementos biarticulados 2D e com dois graus de liberdade. Por fim,

determinam-se as condições geométricas e físicas para a coalescência entre os pontos limites e de bifurcação. A principal contribuição deste trabalho é demonstrar a necessidade de compreender melhor os fenômenos não lineares para projetar sistemas estruturais mais seguros.

PALAVRAS - CHAVE: Descrição Lagrangiana Total; Análise não-linear geométrica; Pontos críticos.

AN ANALYTICAL FORMULATION TO DETECT LIMIT AND BIFURCATION POINTS

ABSTRACT: This chapter analytically describes in detail the detection and classification of critical points in the primary equilibrium trajectory of structural systems. The Total Lagrangian Formulation is used to describe the kinematics of a 2D bi-articulated bar element. Through this formulation, the internal force vector and the tangent stiffness matrix are obtained that take into account the effects of geometric nonlinearity. A linear elastic constitutive model for the uniaxial stress-strain state is assumed, using the Green-Lagrange strain and the axial stress of the second Piola-Kirchhoff tensor which are energetically conjugated. As a case study, it is presented a statically indeterminate plane truss composed of 3 biarticulated 2D elements and with two degrees of freedom. Finally, the geometric and physical conditions for coalescence between the limits and bifurcation points are determined. The main contribution of this work is to demonstrate the need to better understand nonlinear phenomena to design safer structural systems.

KEYWORDS: Total Lagrangian Formulation;

1 | INTRODUÇÃO

Tornou-se quase imperativo, para o avanço da ciência, compreender e simular os fenômenos não-lineares em diversas áreas do conhecimento, tais como, biomecânica, mecânica dos fluidos, geotecnia, mecânica dos sólidos, engenharia de tecidos humanos, etc. Por exemplo, nas indústrias aeronáutica, aeroespacial e petrolífera a análise não linear é imprescindível no projeto de diferentes tipologias estruturais aplicadas nesses setores. Nas últimas décadas muitos autores têm publicados livros texto abordando diferentes tópicos da análise não linear na área dos métodos numéricos aplicados a engenharia, por exemplo, recomenda-se a leitura das seguintes referências: Crisfield (1991), Crisfield (1997), Bathe (1996), Belytschko *et al* (2000), Doyle (2001), Wriggers (2002), Borst *et al* (2012), Bonet & Wood (2008), Wriggers (2008), Krenk (2009). Decorre daí a necessidade de difundir os conceitos básicos e fundamentais da análise não-linear através do método dos elementos finitos e, imbuído deste espírito, o trabalho, aqui apresentado, sem maiores pretensões teóricas, tem como objetivo apresentar uma análise teórica e numérica da instabilidade estrutural que consiste na detecção e classificação de pontos singulares na trajetória de equilíbrio primária. Propõe-se utilizar elementos de barra biarticulados por sua simplicidade teórica, o que permite descrever, facilmente, a cinemática do movimento do elemento e obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente analiticamente, que são elementos imprescindíveis para uma análise não-linear em mecânica dos sólidos. Para simular deformações elásticas finitas, assume-se um modelo constitutivo hiperplástico para o estado uniaxial de tensão-deformação, utilizando a tensão axial do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e a deformação de Green-Lagrange, que formam um par energeticamente conjugado. Nos itens 2, 3 e 4 descrevem-se a cinemática do elemento biarticulado 2D adotando a Formulação Lagrangiana Total (FLT), a obtenção do vetor de forças internas e a dedução da matriz de rigidez tangente, respectivamente. No item 5 faz-se uma abordagem analítica detalhada da detecção e classificação dos pontos singulares presentes na trajetória primária de equilíbrio de uma treliça plana hiperestática discretizada por três barras biarticuladas 2D. Por último, apresentam-se as conclusões finais e as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

2 | DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Seja um sistema de coordenadas globais cuja base é ortonormal conforme mostra-se na Figura 1. Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração indeformada utilizam-se as coordenadas materiais (X, Y) , enquanto que, na configuração deformada as coordenadas espaciais (x, y) .

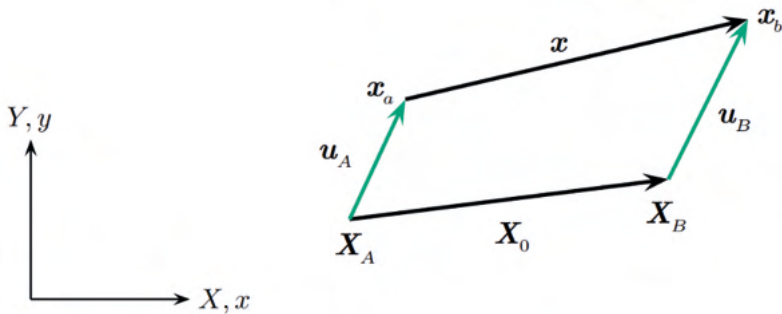


Figura 1: Movimento do elemento biarticulado 2D.

Na configuração indeformada as coordenadas nodais do elemento biarticulado 2D são dadas por $\mathbf{X}_A = (X_A, Y_A)$ e $\mathbf{X}_B = (X_B, Y_B)$, respectivamente. Sua posição e comprimento iniciais são dados pela Equação 1.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A \\ l_0^2 &= \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0\end{aligned}\quad (1)$$

Em que \overline{AB} ou \mathbf{X}_0 é o vetor posição na configuração indeformada e l_0 é o comprimento do elemento biarticulado 2D na configuração indeformada. Enquanto que na configuração deformada as coordenadas nodais do elemento biarticulado 2D são dadas por $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A)$ e $\mathbf{x}_B = (x_B, y_B)$, respectivamente. Conforme mostra-se na Figura 1 a coordenada atual do nó A é dada por $\mathbf{x}_A = \mathbf{X}_A + \mathbf{u}_A$, enquanto que a coordenada atual do nó B se expressa como $\mathbf{x}_B = \mathbf{X}_B + \mathbf{u}_B$. Sendo que $\mathbf{u}_A = (u_A, v_A)$ é o deslocamento do nó A e $\mathbf{u}_B = (u_B, v_B)$ é o deslocamento do nó B. Portanto, a posição atual do elemento é dada por meio da Equação 2.

$$\begin{aligned}\overline{ab} &= \mathbf{x} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A \\ \overline{ab} &= \mathbf{x} = (\mathbf{X}_B + \mathbf{u}_B) - (\mathbf{X}_A + \mathbf{u}_A) \\ \overline{ab} &= \mathbf{x} = (\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A) + (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \\ \overline{ab} &= \mathbf{x} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{BA}\end{aligned}\quad (2)$$

em que \overline{ab} ou \mathbf{x} é o vetor posição na configuração deformada.

As coordenadas do vetor posição atual são dadas por $x_{BA} = X_B - X_A$ e $y_{BA} = Y_B - Y_A$ respectivamente. $\mathbf{u}_{BA} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A$ é o vetor de deslocamentos nodais relativos conforme mostra-se na Figura 2. Por outro lado, o comprimento atual se expressa por meio da Equação 3.

$$l^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{BA})^T (\mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{BA}) \quad (3)$$

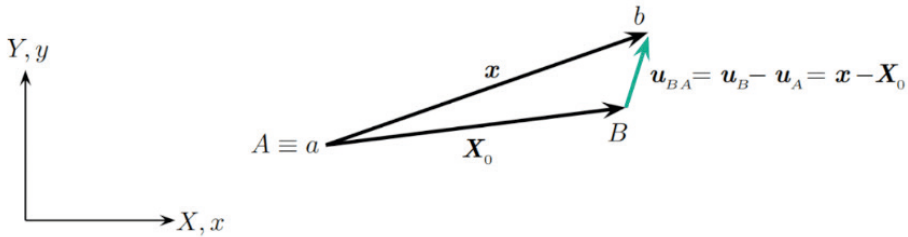


Figura 2: Vetor de deslocamentos nodais relativos.

Neste trabalho adota-se a formulação Lagrangiana Total para descrever o movimento do elemento biarticulado 2D, portanto serão usadas as coordenadas materiais (X, Y) , e a configuração indeformada para definir a medida de deformação do elemento. Dentre algumas famílias de deformação descritas em coordenadas materiais existentes na literatura técnica, adota-se neste trabalho, a medida de deformação de Green-Lagrange que compara os quadrados dos comprimentos atual l e inicial l_0 do elemento e dada por meio da Equação 4.

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{1}{l_0^2} \left(\mathbf{X}_0^T \mathbf{u}_{BA} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{BA}^T \mathbf{u}_{BA} \right) \quad (4)$$

Note-se que esta medida de deformação possui termos quadráticos em relação aos deslocamentos nodais relativos.

Para obter o vetor de forças internas utiliza-se o Princípio do Trabalhos Virtuais (PTV), portanto é necessário aplicar uma variação virtual no campo de deslocamentos na configuração de equilíbrio atual, conforme mostra-se na Figura 3, o que implica em uma variação virtual da deformação de Green-Lagrange que se escreve conforme a Equação 5.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_G &= \frac{1}{l_0^2} \left(\mathbf{X}_0^T \delta \mathbf{u}_{BA} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_{BA}^T \mathbf{u}_{BA} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{BA}^T \delta \mathbf{u}_{BA} \right) \\ \delta \varepsilon_G &= \frac{1}{l_0^2} \left(\mathbf{X}_0^T \delta \mathbf{u}_{BA} + \mathbf{u}_{BA}^T \delta \mathbf{u}_{BA} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta \varepsilon_G = \frac{1}{l_0^2} (\mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_{BA})^T \delta \mathbf{u}_{BA} = \frac{1}{l_0^2} \mathbf{x}^T \delta \mathbf{u}_{BA}$$

em que $\delta \mathbf{u}_{BA} = \delta \mathbf{u}_B - \delta \mathbf{u}_A$ é a variação virtual do vetor de deslocamentos relativos. Note-se que a variação virtual da deformação de Green-Lagrange consiste na projeção da variação virtual do vetor dos deslocamentos relativos sobre a posição atual do elemento definida pelo vetor \mathbf{x} e escalado por l_0^2 .

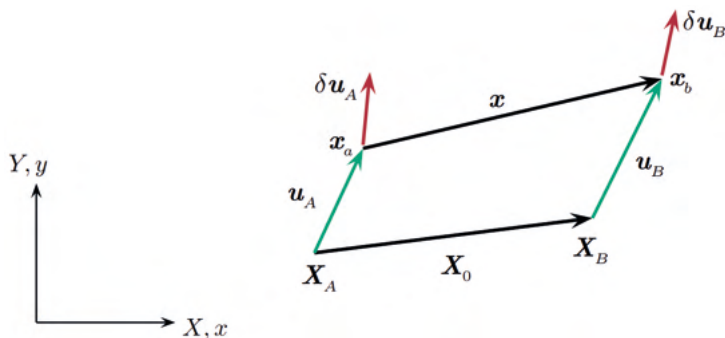


Figura 3: Variação virtual dos deslocamentos nodais.

3 I VETOR DE FORÇAS NODAIS

Como mostra-se na Figura 4, seja $\mathbf{f}_A = (f_{Ax}, f_{Ay})$ o vetor de forças do nó A, e $\mathbf{f}_B = (f_{Bx}, f_{By})$ o vetor de forças do nó B, respectivamente.

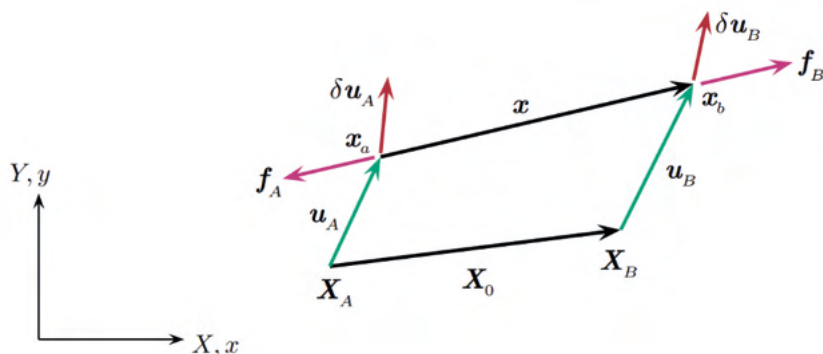


Figura 4: Vetor de forças nodais e a variação virtual dos deslocamentos nodais.

Para obter estes vetores de forças nodais aplica-se o PTV na configuração indeformada pois se está utilizando a medida de deformação de Green-Lagrange, desta maneira expressa-se este princípio como:

$$\delta V = \int_0^{l_0} N \epsilon_G ds - \mathbf{f}_A^T \delta \mathbf{u}_A - \mathbf{f}_B^T \delta \mathbf{u}_B = 0 \quad (6)$$

em que N é o esforço axial que atua no elemento e é dado por $N = \sigma_G A$. Lembrando que a tensão axial σ_G é energeticamente conjugada com a medida de deformação de Green-Lagrange e é uma das tensões normais do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchoff. Substituindo a Equação 5c na Equação 6, tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^{l_0} \frac{N}{l_0^2} \mathbf{x}^T \delta \mathbf{u}_{BA} ds - \mathbf{f}_A^T \delta \mathbf{u}_A - \mathbf{f}_B^T \delta \mathbf{u}_B = 0 \\ \delta V &= \int_0^{l_0} \frac{N}{l_0^2} \mathbf{x}^T (\delta \mathbf{u}_B - \delta \mathbf{u}_A) ds - \mathbf{f}_A^T \delta \mathbf{u}_A - \mathbf{f}_B^T \delta \mathbf{u}_B = 0 \\ \delta V &= \delta \mathbf{u}_A^T \left(- \int_0^{l_0} \frac{N}{l_0^2} \mathbf{x} ds - \mathbf{f}_A \right) + \delta \mathbf{u}_B^T \left(\int_0^{l_0} \frac{N}{l_0^2} \mathbf{x} ds - \mathbf{f}_B \right) = 0 \\ \mathbf{f}_A &= -\frac{N}{l_0} \mathbf{x}, \quad \mathbf{f}_B = \frac{N}{l_0} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{7}$$

Conforme mostra-se na Figura 4, por convenção, o sinal do vetor de forças internas f_A é negativo porque está no sentido contrário do vetor posição x , enquanto que o sinal do vetor de forças internas f_B é positivo porque possui o mesmo sentido do vetor x . Neste trabalho assume-se que $\sigma_G = E \varepsilon_G$, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, assim o esforço axial pode ser definido como $N = EA \varepsilon_G$ e a Equação 7d pode ser reescrita conforme a Equação 8.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A &= -\frac{EA}{l_0} \varepsilon_G \mathbf{x}, \quad \mathbf{f}_B = \frac{EA}{l_0} \varepsilon_G \mathbf{x} \\ \mathbf{f}_A &= -EA \varepsilon_G \begin{Bmatrix} \frac{x_{BA}}{l_0} \\ \frac{y_{BA}}{l_0} \\ \frac{z_{BA}}{l_0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B = EA \varepsilon_G \begin{Bmatrix} \frac{x_{BA}}{l_0} \\ \frac{y_{BA}}{l_0} \\ \frac{z_{BA}}{l_0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

4 I MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Ao aplicar um incremento infinitesimal nos vetores de deslocamentos nodais u_A e u_B na configuração deformada, obtém-se um incremento infinitesimal dos vetores de forças internas f_A e f_B , respectivamente, através da matriz de rigidez tangente. Portanto, define-se a relação entre os incrementos infinitesimais dos vetores de forças internas e dos vetores de deslocamentos nodais conforme a Equação 9.

$$\begin{Bmatrix} df_A \\ df_B \end{Bmatrix} = K_T \begin{Bmatrix} du_A \\ du_B \end{Bmatrix} \tag{9}$$

sendo que K_T é a matriz de rigidez tangente de ordem 4 x 4. Portanto, levando em conta a Equação 2d e diferenciando-se a Equação 7d em relação ao vetor de deslocamentos relativos, obtém-se que:

$$dq_A = -x \frac{dN}{l_0} - \frac{N}{l_0} dx \quad (10a)$$

$$dq_A = - \left(\frac{x}{l_0} \frac{dN}{du_{BA}} + \frac{N}{l_0} I \right) d(u_B - u_A) \quad (10b)$$

$$dq_B = -dq_A \quad (10c)$$

sendo I a matriz identidade de ordem 2×2 . Por outro lado, diferenciando-se o esforço axial em relação ao vetor dos deslocamentos relativos, e levando em conta as Equações 2d, 4 e 5, chega-se a Equação 11.

$$\frac{dN}{du_{BA}} = EA \frac{dv}{du_{BA}} = \frac{EA}{l_0^2} (X_0^T + u_{BA}^T) = \frac{EA}{l_0^2} x^T \quad (11)$$

Por último, substituindo a Equação 11 na Equação 10b e levando em conta a Equação 10c, obtém-se que:

$$\begin{Bmatrix} dq_A \\ dq_B \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{l_0^3} \begin{bmatrix} x \otimes x & -x \otimes x \\ -x \otimes x & x \otimes x \end{bmatrix} + \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} du_A \\ du_B \end{Bmatrix} \quad (12)$$

com:

$$K_M = \frac{EA}{l_0^3} \begin{bmatrix} x \otimes x & -x \otimes x \\ -x \otimes x & x \otimes x \end{bmatrix}; \quad K_\sigma = \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}; \quad x \otimes x = \begin{bmatrix} x_{BA}^2 & x_{BA} y_{BA} \\ x_{BA} y_{BA} & y_{BA}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que K_M é a matriz de rigidez material, de ordem 4×4 , que depende do vetor posição atual do elemento x cujas componentes são: $x_{BA} = x_B - x_A$ e $y_{BA} = y_B - y_A$. K_σ é a matriz de rigidez geométrica que depende do esforço axial N e é de ordem 4×4 e o símbolo \otimes é o produto tensorial ou aberto. Portanto, a matriz de rigidez tangente se expressa como $K_T = K_M + K_\sigma$.

5 | FORMULAÇÃO ANALÍTICA

Seja uma treliça plana com um grau de indeterminação estática conforme mostra-se na Figura 5a. Nesta figura mostram-se as propriedades geométricas e as condições de contorno, onde H é a altura e S é o vão. Considera-se que a rigidez axial de todas as barras da treliça é igual a EA_0 , onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e A_0 é área da seção transversal de cada barra indeformada.

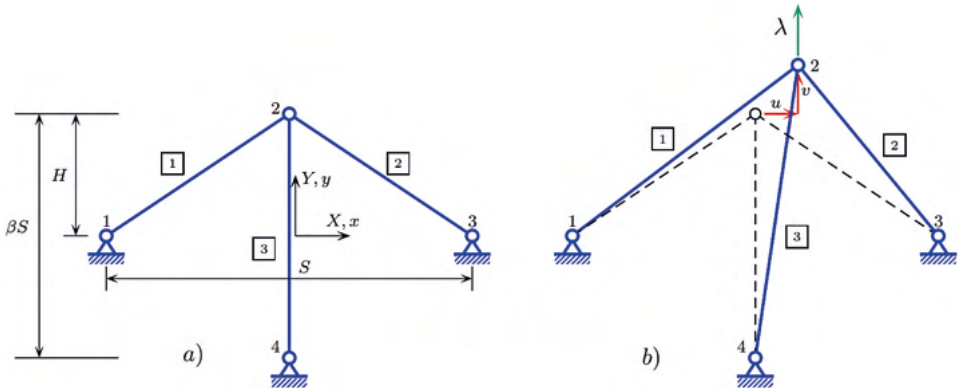


Figura 5: Treliça plana hiperestática. a) Configuração indeformada. b) Configuração deformada.

Discretiza-se a treliça com 3 elementos de barras biarticulado 2D conforme se mostra na Figura 5a. O comprimento do terceiro elemento é βS , onde β é um parâmetro adimensional. O nó 2 está livre para deslocar-se nas direções dos eixos x e y , respectivamente. Os demais nós estão restringidos por apoios de segundo gênero. Na Tabela 1 detalham-se as conectividades adotadas para cada elemento da treliça.

Elemento	Nó inicial	Nó final
1	1	2
2	2	3
3	2	4

Tabela 1: Conectividades dos elementos.

Neste item faz-se a análise da estabilidade do equilíbrio da treliça plana hiperestática na configuração deformada como mostra-se na Figura 5b ao aplicar-se uma carga λ na direção do eixo y . Estuda-se duas trajetórias de equilíbrio possíveis para este caso. A primeira condição refere-se à trajetória primária de equilíbrio onde o nó 2 irá deslocar-se somente na direção do eixo y devido à simetria geométrica e das propriedades mecânicas da treliça, além de não haver carga aplicada na direção do eixo x no nó 2. Considera-se tanto o fator de carga aplicado quanto o deslocamento vertical no sentido negativo do eixo y . Neste caminho de equilíbrio a treliça irá apresentar um fenômeno de instabilidade conhecido na literatura técnica de *snap-through* que é a perda da capacidade portante da treliça quando a matriz de rigidez tangente da estrutura torna-se singular para um valor máximo de carga denominado de ponto limite.

Na segunda condição de equilíbrio ocorre a flambagem da treliça no plano (x, y) ainda que a carga esteja aplicada na direção do eixo x , o nó 2 irá deslocar-se na direção

do eixo , podendo ser no sentido positivo ou negativo deste eixo. Neste caso denomina-se caminho de equilíbrio secundário. Posteriormente, demonstra-se que estas trajetórias de equilíbrio interceptam-se em determinados pontos denominados de pontos de bifurcação. Ao impor o campo de deslocamento (u, v) no nó 2 da treliça, conforme mostra-se na Figura 5b, as barras irão deslocar-se, alterar seus comprimentos e direções, sofrer deformações e estarem submetidas a esforços axiais. Na Tabela 2 mostra-se a descrição cinemática, apresentada no item 2, de cada barra de maneira detalhada.

Parâmetro geométrico	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
$a_x = \frac{x_{BA}}{l_0} = \frac{X_{BA}+u_{BA}}{l_0}$	$\frac{\frac{S}{2}+u}{l_0}$	$\frac{\frac{S}{2}-u}{l_0}$	$-\frac{u}{\beta S}$
$a_y = \frac{y_{BA}}{l_0} = \frac{Y_{BA}+v_{BA}}{l_0}$	$\frac{H+v}{l_0}$	$-\frac{H+v}{l_0}$	$-\frac{\beta S+v}{\beta S}$
$l_0 = \sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2}$	$\sqrt{\frac{S^2}{4} + H^2}$	$\sqrt{\frac{S^2}{4} + H^2}$	βS
$l = \sqrt{(X_{BA}+u_{BA})^2 + (Y_{BA}+v_{BA})^2}$	$\sqrt{(\frac{S}{2}+u)^2 + (H+v)^2}$	$\sqrt{(\frac{S}{2}-u)^2 + (H+v)^2}$	$\sqrt{u^2 + (\beta S + v)^2}$
$\varepsilon_G = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2}$	$\frac{Su+2Hv+u^2+v^2}{2l_0^2}$	$\frac{-Su+2Hv+u^2+v^2}{2l_0^2}$	$\frac{u^2+2\beta Sv+v^2}{2\beta^2 S^2}$

Tabela 2: Descrição cinemática dos elementos.

Para obter as trajetórias de equilíbrio primária e secundária é necessário montar o vetor de forças internas da treliça. Como somente o nó 2 pode se deslocar, então basta montar o vetor de forças internas correspondente a este nó. Portanto levando em conta a Equação 8 monta-se o vetor de forças internas do nó 2 com a contribuição dos esforços internos de cada barra da treliça conectada a este nó como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_2^{(1)+(2)+(3)} &= N^{(1)} \begin{Bmatrix} a_x^{(1)} \\ a_y^{(1)} \end{Bmatrix} - N^{(2)} \begin{Bmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \end{Bmatrix} - N^{(3)} \begin{Bmatrix} a_x^{(3)} \\ a_y^{(3)} \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{f}_2^{(1)+(2)+(3)} &= EA_0 \varepsilon_G^{(1)} \begin{Bmatrix} a_x^{(1)} \\ a_y^{(1)} \end{Bmatrix} - EA_0 \varepsilon_G^{(2)} \begin{Bmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \end{Bmatrix} - EA_0 \varepsilon_G^{(3)} \begin{Bmatrix} a_x^{(3)} \\ a_y^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (14) \\
 \mathbf{f}_2^{(1)+(2)+(3)} &= \frac{EA_0}{2l_0^3} \{u(S^2 + 2u^2 + 4Hv + 2v^2)\} + \frac{EA_0}{2\beta^3 S^3} \{u(u^2 + 2\beta Sv + v^2) \\
 &\quad - (\beta S + v)(u^2 + 2\beta Sv + v^2)\}.
 \end{aligned}$$

Note-se que o sinal negativo nos dois últimos termos da Equação 14a é devido ao nó 2 ser o nó inicial das barras 2 e 3, respectivamente. Por outro lado, na Equação 14c foi utilizado os valores das deformações de cada barra dados na Tabela 2. Para que o nó 2

esteja em equilíbrio é necessário que o vetor de forças internas seja igual ao vetor de forças externas aplicadas neste nó, portanto obtém-se um sistema de duas equações não lineares que se expressam como:

$$\frac{EA_0}{2l_0^3\beta^3S^3} \left\{ \begin{array}{l} u(S^2 + 2u^2 + 4Hv + 2v^2)\beta^3S^3 + u(u^2 + 2\beta Sv + v^2)l_0^3 \\ 2(H+v)(u^2 + 2Hv + v^2)\beta^3S^3 + (\beta S + v)(u^2 + 2\beta Sv + v^2)l_0^3 \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

5.1 Trajetória primária de equilíbrio

Para obter a trajetória primária de equilíbrio impõe-se que o deslocamento horizontal do nó 2 seja igual a zero, $u = 0$, no sistema de equações acima. Portanto, a primeira equação se anula e a segunda equação pode ser reescrita como a Equação 16.

$$\lambda^p = \frac{EA_0}{2l_0^3\beta^3S^3} ((4H^2\beta^3S^3 + 2\beta^2S^2l_0^3)v + (6H\beta^3S^3 + 3\beta Sl_0^3)v^2 + (2\beta^3S^3 + l_0^3)v^3). \quad (16)$$

Trata-se de um polinômio de grau três em função dos deslocamentos verticais do nó 2 da treliça. Para obter o gráfico desta curva adotou-se os seguintes valores para as propriedades geométricas e mecânicas da treliça: $E = 1$, $A_0 = 1$, $S = 2$ e $H = 3$. Atribui-se a β os valores 1,0; 1,5; e 2,0. Desta maneira, obtém-se o gráfico de três trajetórias primárias de equilíbrio como mostra-se na Figura 6. Nota-se que essas curvas possuem dois pontos extremos conhecidos como pontos limites. Nos próximos itens discute-se em detalhes a detecção e obtenção desses pontos.

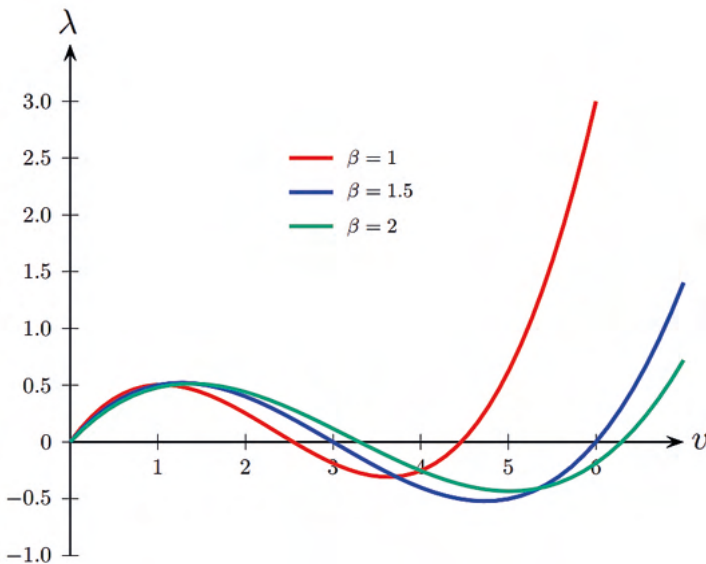


Figura 6: Trajetórias primárias de equilíbrio.

5.2 Trajetória secundária de equilíbrio

Inicialmente a treliça permanece na trajetória de equilíbrio primária, mas para determinadas condições geométricas e mecânicas, poderá flambar o que implica no deslocamento horizontal do nó 2. Para determinar essas condições impõe-se no sistema de Equações 15 que $u \neq 0$. Como consequência, a primeira equação daquele sistema deve cumprir que:

$$(S^2 + 2u^2 + 4Hv + 2v^2)\beta^3 S^3 + (u^2 + 2\beta S v + v^2)l_0^3 = 0 \quad (17)$$

Colocando em evidência o deslocamento na equação 17 obtém-se que:

$$u = \pm \sqrt{-v^2 - \frac{(4H\beta^3 S^3 + 2\beta S l_0^3)}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} v - \frac{\beta^3 S^5}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)}} \quad (18)$$

que é válida para a seguinte restrição:

$$\begin{aligned} v^2 + \frac{(4H\beta^3 S^3 + 2\beta S l_0^3)}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} v + \frac{\beta^3 S^5}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} &< 0 \\ \frac{-\beta S(2H\beta^2 S^2 + l_0^3)}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} - \Delta < v < \frac{-\beta S(2H\beta^2 S^2 + l_0^3)}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} + \Delta & \quad (19) \\ \Delta = \frac{\beta S \sqrt{(2H\beta^2 S^2 + l_0^3)^2 - \beta S^3(2\beta^3 S^3 + l_0^3)}}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} \\ \Delta^* = (2H\beta^2 S^2 + l_0^3)^2 - \beta S^3(2\beta^3 S^3 + l_0^3) &> 0 \end{aligned}$$

Mostra-se na Figura 7 a relação entre os deslocamentos vertical e horizontal do nó 2 quando ocorre a flambagem da treliça dada pela Equação 18.

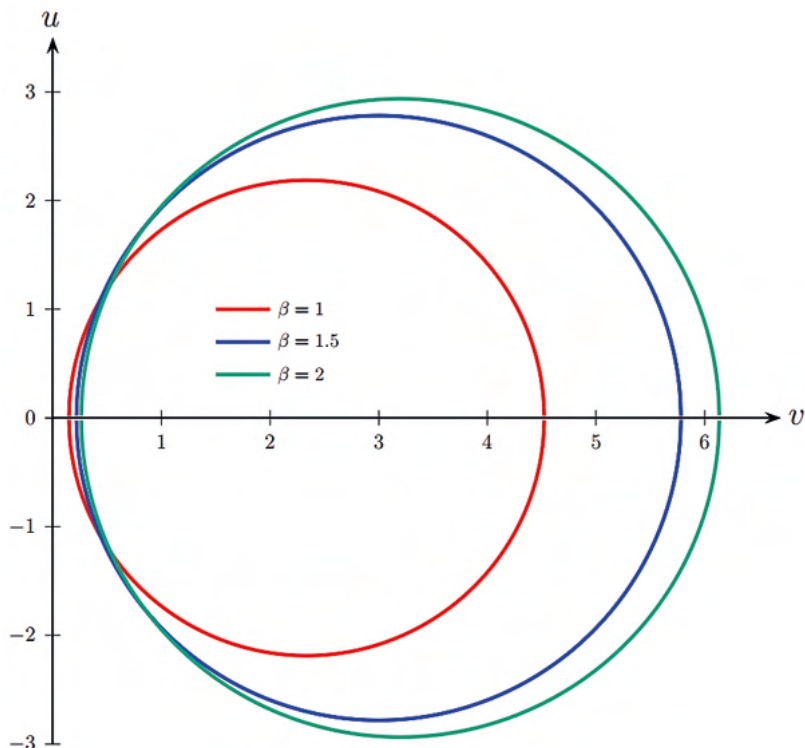


Figura 7: Projeção das trajetórias de equilíbrio secundárias no plano .

Em todas as simulações a seguir assumem-se os seguintes dados para a treliça mostrada na Figura 5: ($E = 1$; $A_0 = 1$; $S = 2$; $H = 3$; $\beta = 1,0$; $\beta = 1,5$; $\beta = 2,0$). Observa-se nesta figura que valores crescentes de β implica em valores crescentes de u e v pois aumenta-se o comprimento da barra vertical 3 da treliça e diminui-se sua rigidez axial, o que confere uma maior flexibilidade ao deslocamento do nó 2. Nota-se na Figura 7 que inicialmente o deslocamento u é nulo, depois ocorre a bifurcação para a trajetória secundária quando o valor de u é crescente até um certo valor máximo para em seguida decrescer até zero quando a treliça retorna à trajetória primária. Observa-se nesta figura que do ponto de vista matemático o deslocamento u pode ser no sentido positivo ou negativo do eixo x . A segunda restrição que surge para que ocorra a flambagem é que o discriminante da Equação 19d seja maior que zero. Note-se que essa restrição é essencialmente geométrica e, portanto, a ocorrência ou não da flambagem depende somente das características geométricas da treliça. Na Figura 8 mostra-se a partir de que valores de H , para cada valor de β , ocorre a bifurcação. Por fim, ao substituir a Equação 18 na Equação 15b obtém-se a trajetória secundária de equilíbrio em função do deslocamento vertical que se escreve como:

$$\lambda^s = \frac{EA_0}{2l_0^3(2\beta^3S^3 + l_0^3)} [((-8\beta SH - S^2 + 4H^2 + 4\beta^2S^2)l_0^3 - 2\beta^3S^5)v - \beta S^3(2\beta^2S^2H + l_0^3)] \quad (20)$$

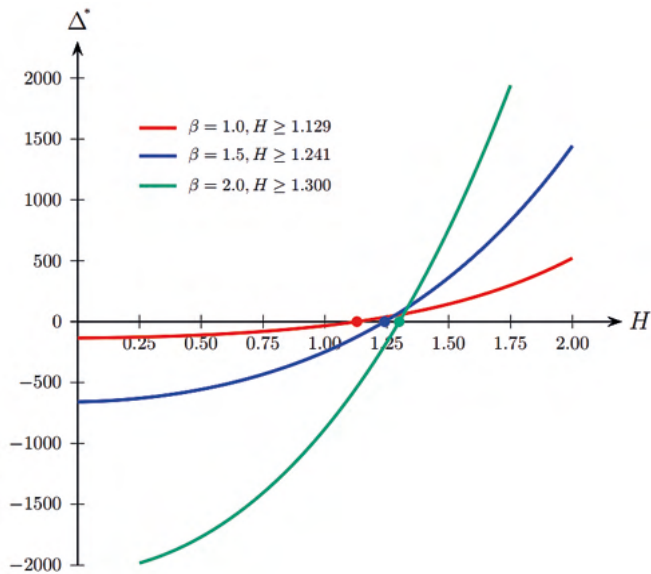


Figura 8: Valores de H a partir dos quais podem ocorrer bifurcação.

As trajetórias de equilíbrio dadas pelas Equações 16 e 20 estão em função do deslocamento vertical do nó 2 da treliça mostrada na Figura 5a. Nas Figuras 9a, 9b e 9c mostram-se as trajetórias de equilíbrio primária e secundária dadas pelas Equações 16 e 20, respectivamente, obtidas para os diferentes valores de β adotados neste trabalho. Nota-se nessas figuras os pontos de bifurcação onde ocorre a intersecção entre as trajetórias primária e secundária de equilíbrio. Também pode ser observado os pontos limites que representam os extremos das trajetórias de equilíbrio primária. Na Figura 9d mostram-se as trajetórias de equilíbrio em função dos deslocamentos horizontal e vertical do nó 2 e, novamente, observa-se a intersecção entre as trajetórias primária e secundária de equilíbrio mostrada no plano (λ, v, u) . Observa-se na Figura 9d que a trajetória de equilíbrio dada pela Equação 20 é a projeção da trajetória de equilíbrio secundária no plano (λ, u) . Por outro lado, a projeção das trajetórias de equilíbrio secundárias mostradas nesta figura no plano (v, u) é mostrada na Figura 7.

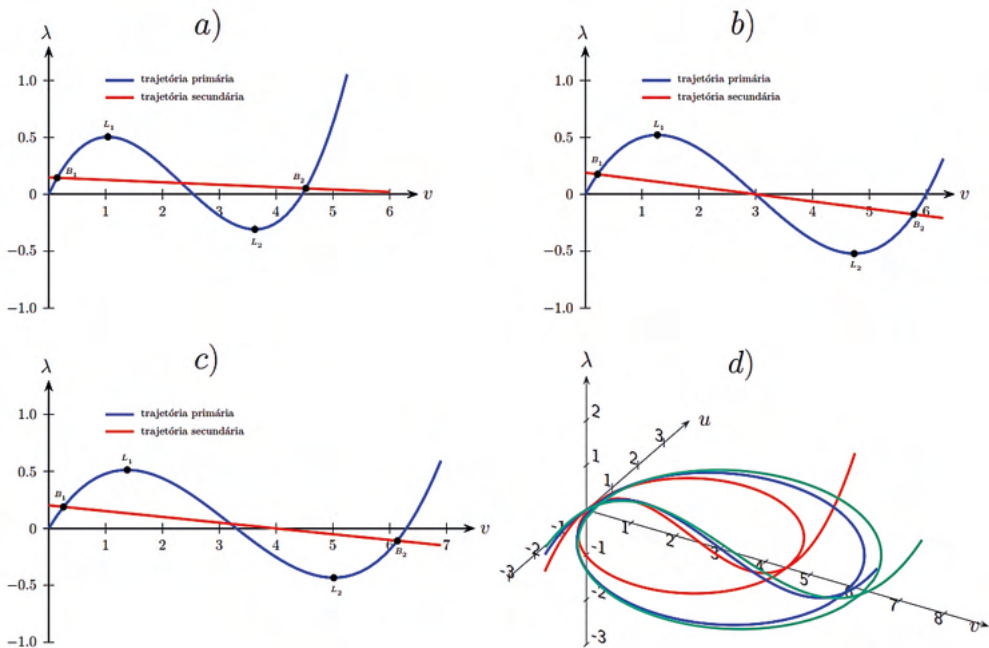


Figura 9: Trajetórias de equilíbrio. a) Trajetórias de equilíbrio para $\beta = 1.0$. b) Trajetórias de equilíbrio para $\beta = 1.5$. c) Trajetórias de equilíbrio para $\beta = 2.0$. d) Trajetórias de equilíbrio no plano (v, u, λ) .

5.3 Pontos críticos

Detectam-se os pontos limites ao aplicar a condição $d\lambda^p/dv = 0$ na trajetória primária de equilíbrio descrita na Equação 16. Abaixo descreve-se este procedimento algébrico como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^p}{\partial v} &= (6\beta^3 S^3 + 3l_0^3)v^2 + (12H\beta^3 S^3 + 6\beta S l_0^3)v + (4H^2\beta^3 S^3 + 2\beta^2 S^2 l_0^3) = 0 \\ v_1^l &= \frac{-(12H\beta^3 S^3 + 6\beta S l_0^3) + \sqrt{(12H\beta^3 S^3 + 6\beta S l_0^3)^2 - (24\beta^3 S^3 + 12l_0^3)(4H^2\beta^3 S^3 + 2\beta^2 S^2 l_0^3)}}{(12\beta^3 S^3 + 6l_0^3)} \\ v_2^l &= \frac{-(12H\beta^3 S^3 + 6\beta S l_0^3) - \sqrt{(12H\beta^3 S^3 + 6\beta S l_0^3)^2 - (24\beta^3 S^3 + 12l_0^3)(4H^2\beta^3 S^3 + 2\beta^2 S^2 l_0^3)}}{(12\beta^3 S^3 + 6l_0^3)} \end{aligned} \quad (21)$$

Por outro lado, detectam-se os pontos de bifurcação impondo a condição de $u = 0$ na Equação 18, o que leva às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} v_1^b &= \frac{-\beta S(2H\beta^2 S^2 + l_0^3) + \beta S \sqrt{(2H\beta^2 S^2 + l_0^3)^2 - \beta S^3(2\beta^3 S^3 + l_0^3)}}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} \\ v_2^b &= \frac{-\beta S(2H\beta^2 S^2 + l_0^3) - \beta S \sqrt{(2H\beta^2 S^2 + l_0^3)^2 - \beta S^3(2\beta^3 S^3 + l_0^3)}}{(2\beta^3 S^3 + l_0^3)} \end{aligned} \quad (22)$$

Para calcular os fatores de carga limite λ^l e de bifurcação λ^b , substitui-se os valores dados nas Equações 21 e 22, respectivamente, na Equação 16. Na Tabela 3 mostram-se os valores dos pontos críticos obtidos para $E = 1$; $A_0 = 1$; $S = 2$; $H = 3$; $\beta = 1,0$; $\beta = 1,5$; $\beta = 2,0$.

β	pontos limites				pontos de bifurcação			
	v_1^l	λ_1^l	v_2^l	λ_2^l	v_1^b	λ_1^b	v_2^b	λ_2^b
1.0	1.0436	0.5044	3.6283	-0.3082	0.1486	0.1446	4.5234	0.0516
1.5	1.2679	0.5211	4.7321	-0.5211	0.2182	0.1759	5.7818	-0.1759
2.0	1.3806	0.5136	5.0156	-0.4335	0.2614	0.1890	6.1348	-0.1089

Tabela 3: Pontos críticos.

5.4 Fatores de cargas críticos

Como mostra-se nas Figuras 9a, 9b e 9c, as trajetórias de equilíbrio primárias possuem quatros pontos críticos, dois pontos limites, L_1 e L_2 , e dois pontos de bifurcação, B_1 e B_2 . Nessas figuras também observou-se que os primeiros pontos de bifurcação B_1 ocorreram antes dos primeiros pontos limites L_1 para os casos de $\beta = 1,0$; $\beta = 1,5$ e $\beta = 2,0$. O propósito deste item é discutir a sequência de ocorrência desses pontos críticos. Para isso estudam-se as variações dos fatores de cargas para os primeiros pontos críticos em função das variações das propriedades geométricas da treliça. Aqui em particular propõe-se estudar a variação do fator de carga crítico em função da variação da altura da treliça, isto é, em função da variável H . Ao substituir o deslocamento vertical v_j^l dado pela Equação 21a na Equação 16 obtém-se o fator de carga para o primeiro ponto limite λ_j^l . Este fator de carga estará em função das propriedades geométricas e mecânicas da treliça, isto é, $\lambda_1^l(E, A_0, l_0, S, H, \beta)$. Por outro lado, ao substituir o deslocamento vertical v_j^b dado pela Equação 22a na Equação 16 obtém-se o fator de carga para o primeiro ponto b de bifurcação λ . Da mesma maneira, este fator de carga estará em função das propriedades geométricas e mecânicas da treliça, isto é, $\lambda_1^b(E, A_0, l_0, S, H, \beta)$. Portanto para obter as curvas do fator de carga crítico em função da altura da treliça assumem-se os seguintes valores para as demais variáveis: $E = 1$, $A_0 = 1$, $S = 2$, e os valores 1, 1,5 e 2 para o parâmetro β . Nas Figuras 10a, 10b e 10c mostram-se as curvas dos fatores de cargas críticos tanto para o ponto limite λ_{max}^{pl} quanto para o ponto de bifurcação λ_{max}^{pb} para o intervalo $0 < H < 5$ e para os diferentes valores de β .

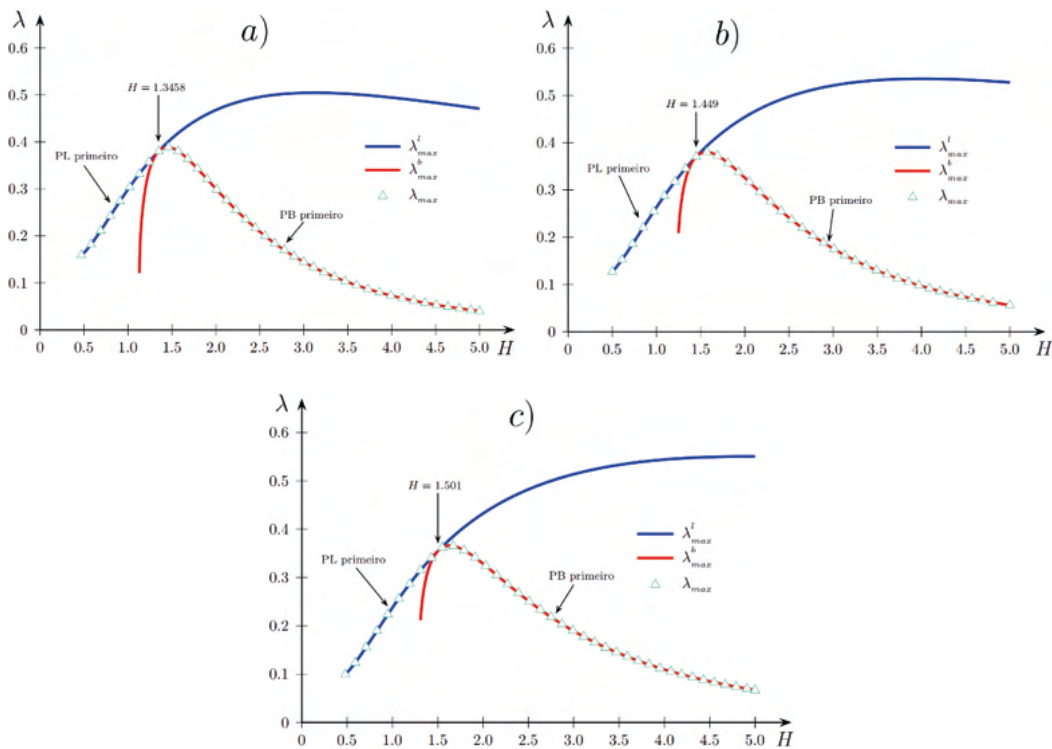


Figura 10: Fatores de carga críticos. a) Carga crítica para $\beta = 1.0$. b) Carga crítica para $\beta = 1.5$. c) Carga crítica para $\beta = 2.0$.

Conforme mostra-se na Figura 10a para valores de $H < 1,3458$ o ponto limite ocorre primeiro. Quando H alcança o valor 1,3458 ocorre a coalescência entre o ponto limite e o ponto de bifurcação. Para $H > 1,3458$ o ponto de bifurcação ocorre primeiro. Ainda nesta figura observa-se que a carga de flambagem é muito menor que a carga limite e por fim mostra-se a capacidade portante máxima λ_{max} da treliça levando em conta a possibilidade de perda de rigidez da estrutura ou a flambagem. As mesmas observações podem ser feitas para as Figuras 10b e 10c, com valores diferentes de H , em relação a sequência de ocorrência dos pontos críticos bem como da capacidade portante máxima da treliça em relação à perda de rigidez e à flambagem.

6 | CONCLUSÕES

De maneira sucinta pode-se dizer que neste trabalho foi descrito de forma objetiva, concisa e detalhada a abordagem analítica para a detecção, classificação e sequência de ocorrência de pontos críticos na trajetória primária de equilíbrio de um sistema físico simples. Determinou-se as condições geométricas e físicas para as quais ocorrem a

coalescência entre os pontos limites e os pontos de bifurcação. A condição de coalescência de pontos críticos deve ser um requisito em estudos de otimização relativos à estabilidade estrutural. Portanto, é necessário levar em consideração a não linearidade geométrica na análise da estabilidade de equilíbrio de sistemas estruturais. É importante destacar que o principal objetivo deste trabalho foi demonstrar a necessidade de compreender melhor os fenômenos não lineares para projetar sistemas estruturais mais seguros.

REFERÊNCIAS

Bathe, K.J., 1996, **Finite element procedures**, Prentice-Hall, 1037 p.

Belytschko T., Liu W. K. & Moran B., 2000, **Nonlinear finite elements for continua and structures**, John Wiley, 650 p.

Bonet J. & Wood R.D., 2008, **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**, Second Edition, Cambridge University Press, 318 p.

Borst R., Crisfield M.A., Remmers J.J.C & Verhoosel C.V., 2012, **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, Second Edition, Wiley, 516 p.

Crisfield M.A., 1991, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, **Volume 1: Essentials**, John Wiley, 345 p.

Crisfield M.A., 1997, **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, **Volume 2: Advanced Topics**, John Wiley, 494 p.

Doyle J.F., 2001, **Nonlinear analysis of thin-walled structures. Statics, Dynamics and Stability**, Springer, 511 p.

Krenk, S., 2009, **Non-linear modeling and analysis of solids and structures**. Cambridge University Press, 349 p.

Wriggers P., 2008, **Nonlinear finite element methods**, Springer, 559 p.

Wriggers P., 2002, **Computational contact mechanics**, Second Edition, Springer, 518 p.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Altas Temperaturas 78, 79, 87, 88, 90, 91, 102, 173, 174, 175, 180

Análise Estrutural 115, 119, 122, 124, 255

Argamassa 83, 92, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 244, 249, 295, 300

Arquitetura Hospitalar 103, 107, 112

Avaliação de Desempenho 103, 104, 106, 107, 112, 113

B

Bim 3, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205

BIM 5D 58, 59, 61, 65

C

Cimento 67, 71, 73, 79, 80, 84, 90, 91, 92, 94, 95, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 162, 163, 164, 165, 207, 245, 254, 258, 304

Concreto 1, 2, 5, 12, 46, 57, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 101, 112, 114, 152, 153, 158, 159, 175, 192, 207, 220, 245, 246, 251, 254, 259, 266, 267, 271, 272, 299, 300, 302, 303, 304, 305, 307, 308, 309, 312, 313, 314

Concreto Armado 1, 2, 5, 46, 67, 68, 69, 70, 71, 75, 76, 78, 80, 82, 83, 88, 245, 246, 254, 266, 267, 271, 272, 302, 303, 304, 307, 308, 312, 313

Contenções 160, 172, 253, 255, 265

Corrosão das armaduras 67, 68, 69, 72, 75, 80, 82

D

Decreto 58, 60, 61, 65, 66, 290, 299

Deep Beams 183, 193, 194

Degradação 48, 76, 80, 87, 90, 91, 92, 102, 105, 177, 289, 294, 295, 297, 300, 337

Disseminação 58, 60, 61, 66

Durabilidade 52, 56, 69, 75, 76, 78, 80, 88, 108, 113, 126, 173, 174, 175, 181, 207, 297, 298

E

Elementos de barra biarticulados 29, 44, 317

Ementa 58, 60, 62

Empreendimentos Rurais 46, 47, 49, 55, 56

Engenharia Civil 3, 1, 12, 28, 48, 58, 60, 62, 63, 88, 90, 113, 115, 116, 117, 125, 134, 135, 150, 172, 195, 220, 265, 266, 291, 292, 303, 304, 316, 338

Engenharia Diagnóstica 78, 80

F

Fundações Superficiais 1, 2, 3, 4, 12, 265

G

Gnaisse 173, 174, 175, 176, 179, 180

Grelhas Hiperestáticas 13, 14, 26

H

Hastes de Paredes Delgadas 14, 27

Hospital Architecture 103

I

Incêndio 51, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 87, 90, 92, 97, 101, 108, 110, 111, 112, 175

Inspeção Predial 46, 47, 48, 49, 52, 55, 56, 57, 103, 109

Interação Solo-Estrutura 3, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 254, 255, 265

Íons Sulfatos 67, 69, 72, 73, 75

L

Látex da seringueira 150, 151, 157

M

Máquinas de ar condicionado 195, 196, 198, 199, 201, 202, 203

Mecânica Vetorial 115, 116, 117, 118, 119

Metodologia Empírico-Mecanística 125, 134

Microzonificación, Peligro, Vulnerabilidad, Riesgo 136

Modelagem 6D 195

Módulo de Resiliência 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135

P

Patologias 47, 48, 56, 57, 76, 115, 291, 296, 298, 300

Pavimentação 125, 129, 134, 135, 239

Performance Evaluation 103

R

Recalque 1, 3, 4, 263

S

SAP2000 1, 2, 3, 5

SFRC 183, 193

Shear Strength 183, 193

Solo-Cimento 125, 126, 128, 131, 133, 134, 135

T

Tensão de bimomento 13, 24, 26

Tensão de flexão 13, 26, 27

Tratamento Térmico 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181

Treliça 28, 29, 40, 116, 119, 120, 316, 317, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 330, 331

COLEÇÃO DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3

- 
-  www.atenaeditora.com.br
 -  contato@atenaeditora.com.br
 -  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
 -  www.facebook.com/atenaeditora.com.br

COLEÇÃO

DESAFIOS DAS ENGENHARIAS:

ENGENHARIA CIVIL 3

-  www.atenaeditora.com.br
-  contato@atenaeditora.com.br
-  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
-  www.facebook.com/atenaeditora.com.br