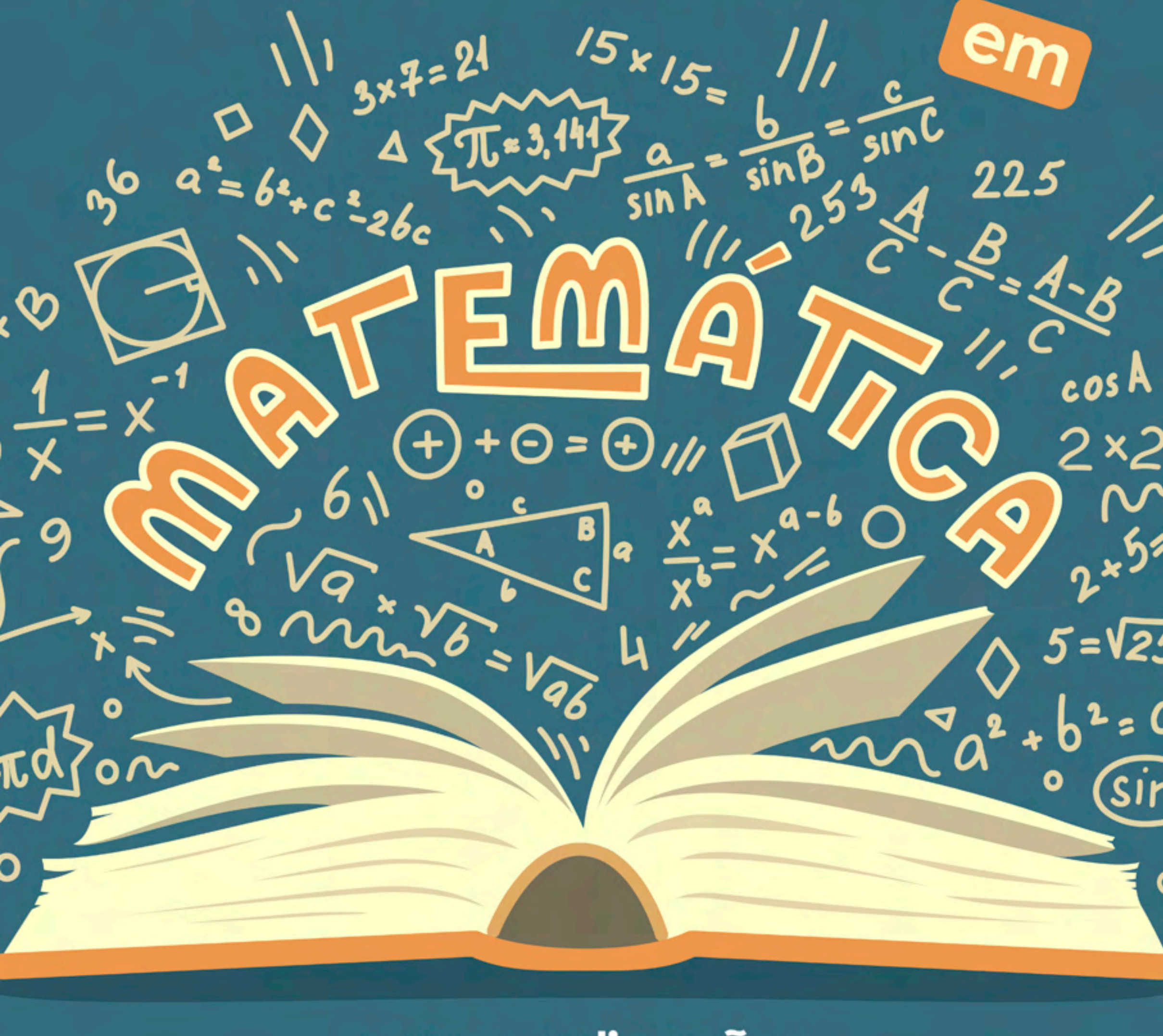
Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

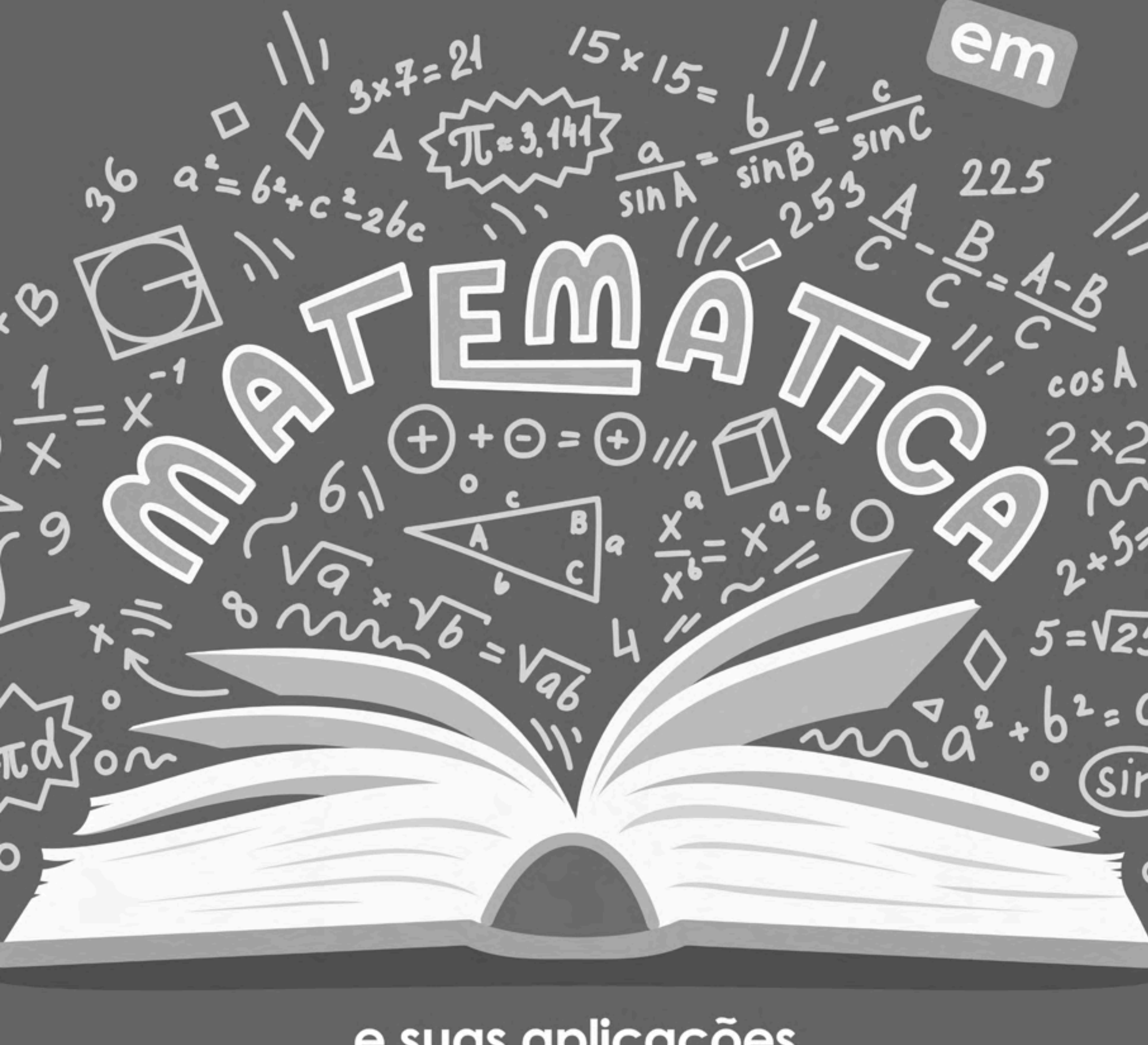
PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



Atena Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA



e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2021

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Bruno Oliveira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-440-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.402212809

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações***” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da Educação

Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

D´AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 30/06/2021

Willian Isao Tokura
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Maracaju – MS
http://lattes.cnpq.br/3530744794583222

Levi Rosa Adriano
Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/3206466156270217

Priscila Marques Kai
Universidade Federal de Goiás, INF
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/8210180026970752

Elismar Dias Batista
Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/3648588387524579

RESUMO: Neste artigo, provamos que se uma variedade Riemanniana satisfaz a condição de duplicação de volume e a desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg com o mesmo expoente, então a variedade tem um crescimento de volume exatamente n-dimensional. Como aplicação, obtemos propriedades geométricas e topológicas de variedades Riemannianas que suportam uma desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg.
PALAVRAS-CHAVE: Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN), desigualdade do tipo Hardy, desigualdade de Sobolev, rigidez, variedades Riemannianas.

CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG INEQUALITIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

ABSTRACT: We prove that if a Riemannian manifold satisfies the volume doubling condition and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality with the same exponent, then it has exactly n-dimensional volume growth. As application, we obtain geometric and topological properties of Riemannian manifolds which support a Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality.
KEYWORDS: Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) inequality, Hardy type inequality, Sobolev inequality, rigidity, Riemannian manifolds.

INTRODUÇÃO

O século XX iniciou-se com grandes avanços na área de análise matemática, em especial na teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Em meados da década de 30, Sergei Sobolev, um matemático russo, iniciou os estudos de soluções fracas para as equações hiperbólicas e a minimização de certas integrais variacionais do princípio de Dirichlet. Durante esse período, como ferramenta para resolver tais problemas, Sobolev introduziu o que conhecemos atualmente como espaço de Sobolev, o qual denotamos por $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Diante desse cenário, as ideias de Sobolev se expandiram rapidamente por conta dos inúmeros modelos procedentes da física, química e das engenharias que poderiam ser investigadas através de Equações Diferencias Parciais.

No estudo desse novo objeto $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, assim como qualquer outro conceito importante da matemática, surge o interesse por entender e descrever suas propriedades. Dessa forma, Sobolev em 1936 provou o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja um parâmetro* $p \in [1,n)$ *e* $p^* = \frac{np}{n-p}$, então

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Em outras palavras, o espaço de Sobolev pode ser incluído de maneira contínua nos espaços de Lebesgue. Equivalentemente, a expressão (1) acima pode ser reescrita como

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

A desigualdade (2) é conhecida como desigualdade de Sobolev. A importância da desigualdade (2) reside no fato que, por ela é possível extrair certas propriedades para soluções fracas no espaço $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, de fundamental importância na resolução de equações diferenciais parciais, além de permitir extrair certas informações sobre a função u por meio de sua derivada.

Como ficou claro depois de um tempo, certos modelos importantes ligados a problemas físicos, químicos e das engenharias que envolviam equações diferenciais parciais mais gerais, necessitavam de desigualdades mais gerais que as obtidas por Sobolev. Nesse sentido, Emilio Gagliardo [6] e Louis Nirenberg [11] obtiveram de maneira independente a seguinte extensão para desigualdade de Sobolev.

Teorema 2. *Sejam* $p \in (1, n)$, $s < r \leq q = \frac{np}{n-p}$ *e* $\theta \in [0,1]$ *então*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^s\, dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Como podemos observar, as desigualdades (2) e (3) apresentam afinidade com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, visto que elas são satisfeitas nesse espaço. Observando essa peculiaridade Ledoux [10] e Xia [15] iniciaram o estudo das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg, respectivamente. Os autores provaram que as variedades com curvatura de Ricci não negativa que suportam tais desigualdades, são muito próximas do espaço Euclidiano. Mais precisamente, considere

$$GN_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_s^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta}{\|u\|_r}, S_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}},$$

as constantes ótimas para as desigualdades (3) e (2), respectivamente, onde $\| \cdot \|p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} | \cdot |^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$, então toda variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa que suporta (2), ou então (3), com constante C próxima da constante ótima definida acima, é difeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$; e no caso em que C é igual a constante ótima temos que a variedade é isométrica à $\mathbb{R}^n$, ou seja, do ponto de vista de distância, tem o mesmo comportamento que o espaço Euclidiano.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg (CKN) provam que, sob um regime de parâmetros *n, p, q, r,* α*, β, σ* e *a* (veja Teorema 3), existe uma constante tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}},\ \forall n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como podemos observar, essa desigualdade generaliza as desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg.

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano, denote por *dx* o elemento de volume associado a métrica canônica e considere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções suaves no espaço Euclidiano com suporte compacto.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg provam que

Teorema 3. *Sejam* $n \geq 2$*, p, q, r,* α*, β, σ, a constantes fixadas satisfazendo:*

$$p,q \geq 1, \qquad r > 0, \qquad 0 \leq a \leq 1, \qquad \frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}, \frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n} > 0, \gamma = a\sigma + (1-a)\beta,$$

onde

$$\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(1-a)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right),$$

com

$$0 \leq \alpha - \sigma \; se \; a > 0, \qquad e \qquad \alpha - \sigma \leq 1 \qquad se \qquad a > 0 \qquad e \qquad \frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n} = \frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}.$$

Então existe uma constante positiva C tal que para qualquer função u є $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tem-se*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Denotamos por $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ a constante ótima para a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) acima, ou seja,

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)-\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

E associado à constante ótima, podemos definir o conceito de função ótima, a qual satisfaz a igualdade de CKN com $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$.

Recentemente, os autores em [9] consideraram a seguinte mudança na desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

$$\alpha = -\frac{\mu}{p}, \qquad \beta = -\frac{\theta}{q}, \qquad \gamma = -\frac{s}{r},$$

e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 4. *Sejam $n \geq 2$, p, q, μ constantes satisfazendo*

$$1 < p < p + \mu < n, \qquad 1 \leq q < p\frac{q-1}{p-1} < \frac{np}{n-p},$$

juntamente com constantes r, θ, s, a dadas por

$$r = \frac{p(q-1)}{p-1}, \qquad \theta = s = \frac{n\mu}{n-p} \qquad e \qquad a = \frac{[(n-\theta)r - (n-s)q]p}{[(n-\theta)p - (n-p-\mu)q]r}.$$

Então com $\delta = np - q\,(n-p)$ tem-se

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n) = \left(\frac{n-p}{n-p-\mu}\right)^L \left(\frac{q-p}{p\sqrt{\pi}}\right)^a \left(\frac{pq}{n(q-p)}\right)^{\frac{a}{p}} \left(\frac{\delta}{pq}\right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{\Gamma\left(q\frac{p-1}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\frac{\delta}{q-p}\right)\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right],$$

Onde

$$L = \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} - \frac{1-a}{q} - \frac{(p-1)(1-a)}{p}.$$

E as funções ótimas são da forma

$$V_0(x) = A\left(1 + B|x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p}\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{q-p}}, \qquad A \in \mathbb{R}, \qquad B > 0.$$

Os teoremas acima nos revelam que o espaço Euclidiano é um ambiente privilegiado, visto que suporta a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, isso se torna interessante, pois, tal desigualdade desempenha fundamental importância na teoria da resolução de equações diferenciais parciais elípticas, principalmente em problemas variacionais e regularidade de soluções. Dessa forma, o espaço Euclidiano se torna importante para estudos de tais problemas.

Por outro lado, quando trazemos a desigualdade de CKN para o ramo da geometria diferencial, uma pergunta pertinente é a seguinte:

Questão. *Como é a estrutura dos espaços que suportam a desigualdade de CKN?*

Visando responder essa questão, em [1, 2, 5, 7, 10, 13, 14, 15] os autores consideram o estudo das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa que satisfazem alguma das classes particulares de CKN. Em particular, em [1, 2, 5, 10, 13, 14, 15] os autores utilizam resultados de comparação de volume e obtêm que tais espaços satisfazem exatamente o crescimento de volume n-dimensional, isto é, existe uma constante universal $C_0>0$ tal que

$$V_{ol}(B_x(\rho)) \geq C_0\rho^n, \qquad x \in M, \qquad \rho > 0.$$

Além disso, alguns resultados de rigidez são obtidos, e entre outras coisas mostram que as variedades Riemannianas com Ricci não negativo e que suportam classes de desigualdades especificas, como: desigualdade de Sobolev, desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, desigualdade de Hardy, etc, com constante *C* sendo próximo da constante ótima do caso Euclidiano para desigualdade correspondente, são difeomorfa ao espaço Euclidiano, e com constante *C* igual a constante ótima do caso Euclidiano temos a isometria com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

No contexto dos espaços métricos, Kristály e Ohta em [8], estudam os espaços métricos com medida (*X, d, m*) que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg sem termo de interpolação (isto é, $a = 1$)

$$\left(\int_X \frac{|u|^r}{d(x,x_0)^{-\gamma r}}\, dm\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_X |Du|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

com parâmetros

$$r = \frac{2n}{n-2-2\gamma}, \qquad -\gamma \epsilon\, [0,1),$$

O obtém o seguinte resultado.

Teorema 5. *Seja (X, d, m) um espaço métrico próprio com medida n-dimensional e assuma que para* $a \in [0,1), n \geq 3, p = 2n/(n-2+2a)\,, x_0 \in X$, *e*

$$c \geq K_a = \left(\frac{1}{(n-2)(n-ap)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(2-ap)\Gamma((2n-2ap)/(2-ap))}{n\omega_n \Gamma^2((n-ap)/(2-ap))}\right)^{\frac{2-ap}{2n-2ap}},$$

a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (4) ocorra em X, juntamente com as seguintes condições:

$$\frac{m(B_R(x))}{m\left(B_\rho(x)\right)} \leq C_0\left(\frac{R}{p}\right)^n, \qquad \forall x \in X, \qquad e \qquad 0 < \rho < R,$$

e

$$\liminf_{\rho \to 0} \frac{m\left(B_\rho(x_0)\right)}{m_E\left(B_\rho(0)\right)} = 1.$$

Então

$$m\left(B_p(x)\right) \geq C_0^{-1}\left(\frac{K_a}{C}\right)^{\frac{n}{1-a}} m_E\left(B_\rho(0)\right), \qquad \forall p > 0, \qquad x \in X.$$

Tais resultados nos motivaram a entender a geometria e a estrutura das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de interpolação

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}}|u|^{\frac{p(q-1)}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} \quad C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\mu}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\frac{n\mu}{n-p}}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}},$$

onde os parâmetros acima são dados pelo Teorema 3.

RESULTADOS PRINCIPAIS

No restante desse manuscrito, salvo menção em contrário, assumiremos os parâmetros descritos no Teorema 3. Dito isso, nosso objetivo é estender o resultado principal de Kristály e Ohta em [8] para a classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em variedades Riemannianas com termo de interpolação, isso permitirá entender o comportamento das variedades que suportam tal classe mais geral de desigualdades. Como consequência, apresentaremos teoremas de rigidez métrica e topológica em variedades Riemannianas. Tais resultados fornecem boas pistas de como são os espaços que suportam a desigualdade CKN.

Nosso principal resultado pode ser enunciado na forma do seguinte teorema.

Teorema 6. *Seja* (M^n*, g*)*uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função u* ϵ C_0^∞ *(M) a desigualdade de CKN ocorra. Então para todo* $R > 0$ *temos*

$$\left(\frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C}\right)^{\frac{n}{a}}\omega_n R^n \le Vol\big(B_R(p)\big) \le \omega_n R^n,$$

onde ω_n *denota o volume da bola de raio unitário em* $\mathbb{R}^n$*.*

Um teorema devido a Cheeger e Colding [4] afirma que dado um inteiro n ≥ 2, existe uma constante δ(n) > 0, tal que toda variedade Riemanniana (M^n, *g*) completa com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo

$$Vol(B_r(x)) \ge \big(1-\delta(n)\big)\omega_n r^n, \qquad \forall x \in M, \qquad \forall r > 0,$$

e difeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Então combinando este resultado com o Teorema 6, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Dado um inteiro n* ≥ 2*, existe ϵ (n)* > 0*, tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta* (M^n*, g*) *com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN com constante* $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \epsilon(n)$ *é difeomorfa ao espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$*.*

Pelo teorema de comparação de Bishop-Gromov [3, 12], temos que uma variedade Riemanniana completa (M^n*, g*) com curvatura de Ricci não negativa satisfaz

$$Vol\big(B_R(p)\big) \ge \omega_n R^n, \qquad \forall p \in M,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a bola $B_R(o)$ é isométrica a bola Euclidiana de raio R. Assim, em decorrência do Teorema 6, temos o seguinte corolário.

Corolário 2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função a desigualdade de CKN ocorra com* $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$. *Então M é isométrica ao espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

REFERÊNCIAS

[1] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Hardy type inequalities on complete Riemannian manifolds. **Monatshefte für Mathematik**, v. 163, n. 2, p. 115-129, 2011.

[2] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 371, n. 1, p. 372-383, 2010.

[3] CHAVEL, Isaac. Riemannian geometry: a modern introduction. **Cambridge university press**, 2006.

[4] CHEEGER, Jeff and COLDING TOBIAS. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. **Journal of Differential Geometry**, v. 46, n. 3, p. 406-480, 1997.

[5] DO CARMO, Manfredo Perdigão; XIA, Changyu. Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Compositio Mathematica**, v. 140, n. 3, p. 818-826, 2004.

[6] GAGLIARDO, Emilio. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. **Matematika**, v. 5, n. 4, p. 87-116, 1961.

[7] HEBEY, Emmanuel. Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities: Sobolev Spaces and Inequalities. **American Mathematical Soc**., 2000.

[8] KRISTÁLY, Alexandru; OHTA, Shin-ichi. Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications. **Mathematische Annalen**, v. 357, n. 2, p. 711-726, 2013.

[9] LAM, Nguyen; LU, Guozhen. Sharp constants and optimizers for a class of Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Advanced Nonlinear Studies**, v. 17, n. 3, p. 457-480, 2017.

[10] LEDOUX, M. On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 7, n. 2, p. 347-353, 1999.

[11] NIRENBERG, Louis. On elliptic partial differential equations. In**: Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. p. 1-48.

[12] SCHOEN, Richard M.; YAU, Shing-Tung. **Lectures on differential geometry**. Cambridge, MA: International press, 1994.

[13] XIA, Changyu. Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and almost best Sobolev constant. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 45, n. 4, p. 1253-1259, 2001.

[14] XIA, Changyu. The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds. **Mathematical Research Letters**, v. 14, n. 5, p. 875-885, 2007.

[15] XIA, Changyu. The Gagliardo–Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature. **Journal of Functional Analysis**, v. 224, n. 1, p. 230-241, 2005.

ÍNDICE REMISSIVO

J

M

N

O

P

R

S

T

V

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA

e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

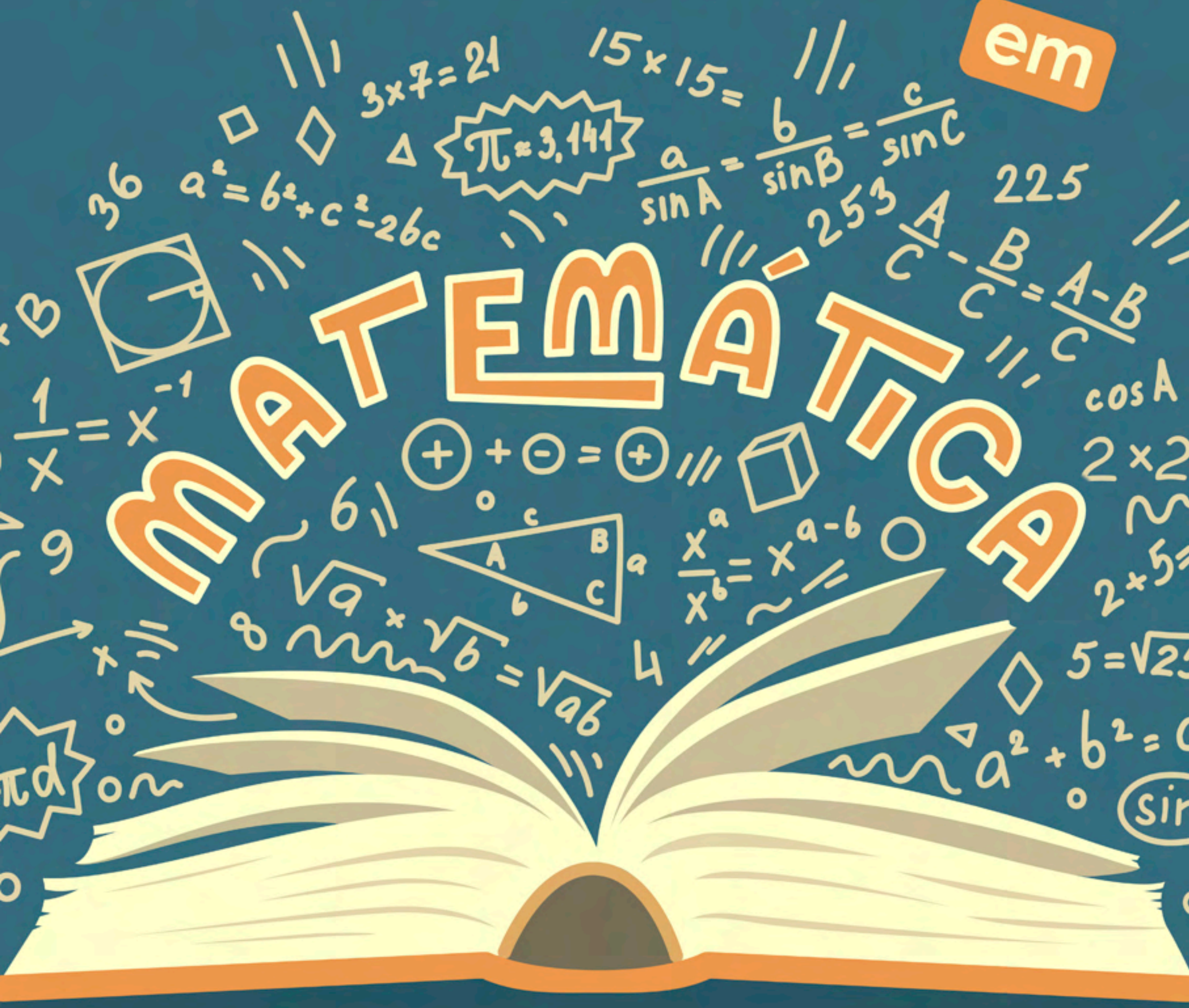
www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



Atena Editora

Ano 2021