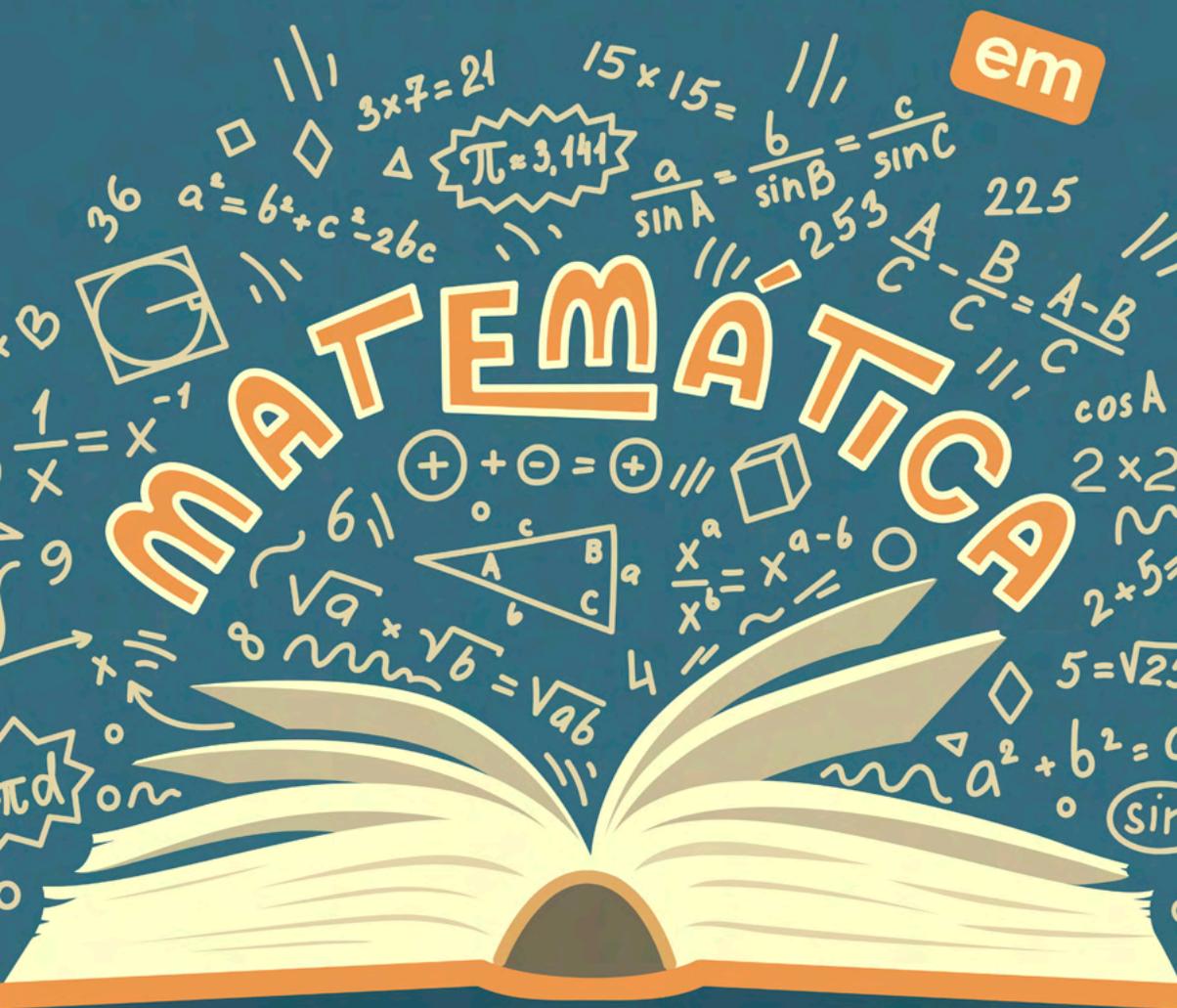


Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA

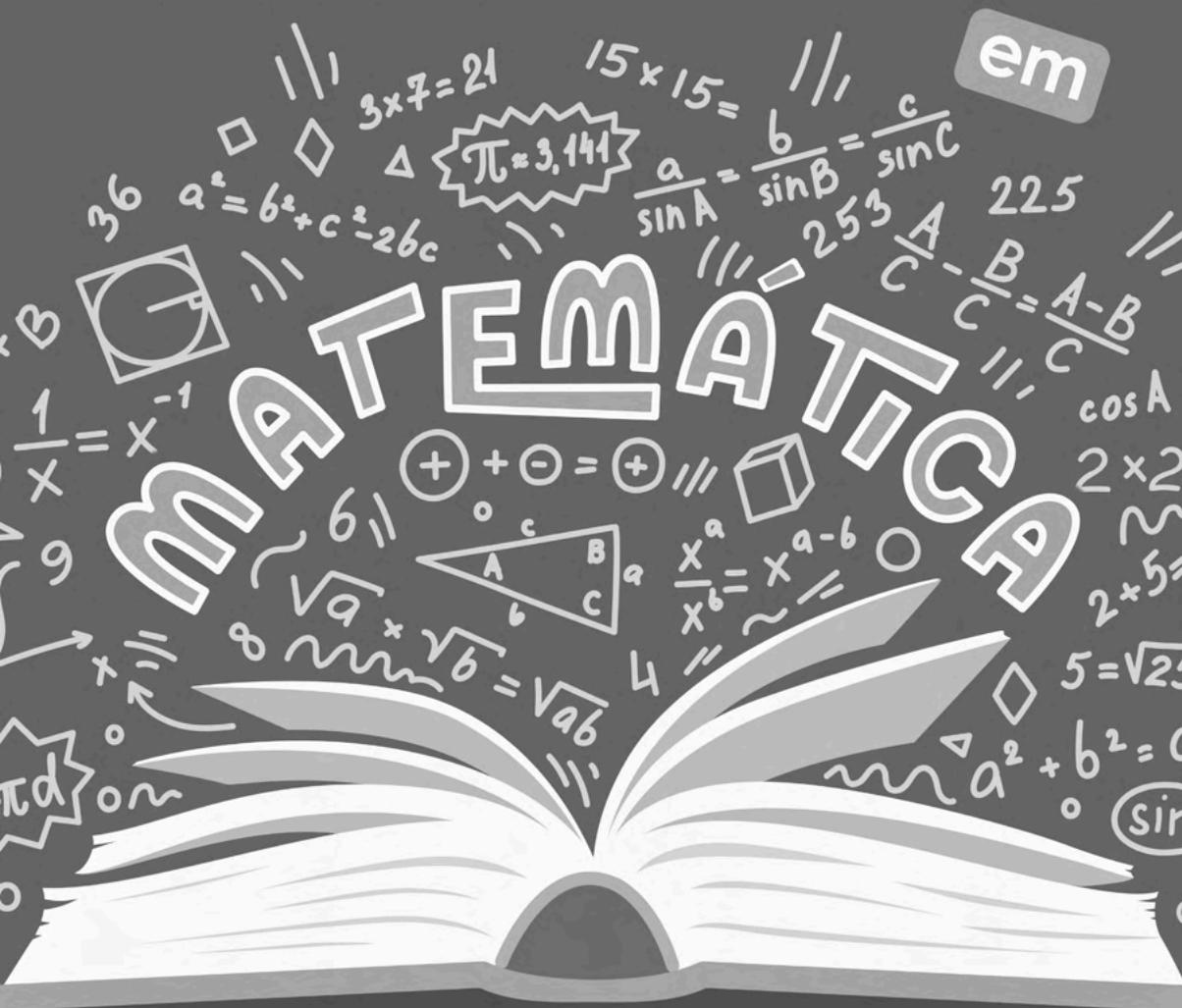


e suas aplicações


Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações


Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Bruno Oliveira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-440-2

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.402212809>

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, desta forma não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro **“Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações”** nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da Educação

Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41>. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

O USO DA ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Bruna Nogueira Simões Cobuci

Rigoberto Gregório Sanabria Castro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128091>

CAPÍTULO 2..... 12

BANCO IMOBILIÁRIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE ENSINO EM AULAS DE MATEMÁTICA

Thayná Schleider de Matos

Joyce Jaquelinne Caetano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128092>

CAPÍTULO 3..... 18

APLICAÇÃO DE MONITORIAS ON-LINES DE CÁLCULO COMO FERRAMENTA DE NIVELAMENTO E INICIAÇÃO A DOCÊNCIA

Tamires Ester Peixoto Bravo

Pedro Lucas Moreira Rodrigues

Matheus Alencar de Freitas

Enrique Dias de Matos

Pedro Augusto Araújo Sant'Ana

Ivano Alessandro Devilla

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128093>

CAPÍTULO 4..... 24

A PSICOLOGIA EDUCACIONAL, A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DISCUSSÕES SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS À APRENDIZAGEM

André de Lima Pereira Gomes

Gyliane Ornela Barbosa

Márcia Santos Melo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128094>

CAPÍTULO 5..... 34

DA INFORMALIDADE A SALA DE AULA: A MATEMÁTICA DO MEU ALUNO

Evren Ney da Silva Jean

Meiry Jane Cavalcante Rattes

Márcio Laranjeira Anselmo

Reginaldo Nascimento da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128095>

CAPÍTULO 6..... 42

A METODOLOGIA DO SISTEMA *NODET* E SUAS POSSIBILIDADES DE PESQUISA

SOBRE O USO DO ORIGAMI NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TEMPOS DE USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

Daniel Albernaz de Paiva Brito

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128096>

CAPÍTULO 7..... 57

A MATEMÁTICA DO AGRONEGÓCIO: CONTRIBUIÇÕES PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFIC(ATIVA)

Luiz Carlos dos Santos Filho

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128097>

CAPÍTULO 8..... 63

DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Willian Isao Tokura

Levi Rosa Adriano

Priscila Marques Kai

Elismar Dias Batista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128098>

CAPÍTULO 9..... 71

O ENSINO DE FUNÇÃO DO 1º GRAU NA EDUCAÇÃO INCLUSIVA: TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O SABER MATEMÁTICO PARA ALUNOS CEGOS

Camila Ferreira e Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128099>

CAPÍTULO 10..... 85

OPORTUNIDADES PARA ARTICULAÇÃO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DO USO DE *SOFTWARES* MATEMÁTICOS

José Cirqueira Martins Júnior

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280910>

CAPÍTULO 11..... 100

ENSINANDO MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM MATERIAL CONCRETO

Graciela Sieglloch Lins

Marcos Lübeck

Jocinéia Medeiros

Fernando Luiz Andretti

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280911>

CAPÍTULO 12..... 108

A UTILIZAÇÃO DO EXCEL COM ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS PARA O TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES EM CONTEÚDOS DE ESTATÍSTICA

José Cirqueira Martins Júnior

Leandro Vieira dos Santos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280912>

CAPÍTULO 13..... 119

NARRATIVAS SOBRE UM LUGAR COMUM: SALA DE RECURSOS

Rozana Morais Lopes Feitosa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280913>

CAPÍTULO 14..... 128

MODELO EPIDÊMICO SIR, COM E SEM VACINAÇÃO E MODELO EPIDÊMICO SEIR

Lívia de Carvalho Faria

Mehran Sabeti

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280914>

CAPÍTULO 15..... 139

GROUNDED THEORY COMO METODOLOGIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES, RACIOCÍNIO E PROCEDIMENTOS

Eliandra Moraes Pires

Everaldo Silveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280915>

CAPÍTULO 16..... 154

STOMACHION: UMA ABORDAGEM SOBRE A HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Paula Francisca Gomes Rodrigues

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280916>

CAPÍTULO 17..... 160

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALÉM DA SALA DE AULA: EM CENA A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Fábio Vieira Abrão

Luciano Soares Gabriel

Norma S. Gomes Allevato

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280917>

CAPÍTULO 18..... 172

APPROXIMATION OF A SYSTEM OF A NON-NEWTONIAN FLUID BY A SYSTEM OF CAUCHY-KOWALESKA TYPE

Geraldo Mendes de Araujo

Elizardo Fabricio Lima Lucena

Michel Melo Arnaud

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280918>

CAPÍTULO 19..... 191

INTERPOLAÇÃO PELO MÉTODO DE HERMITE USANDO DIFERENÇAS DIVIDIDAS

João Socorro Pinheiro Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280919>

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 20 | 208 |
| APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS | |
| Bruno José de Sá Ferraz Lemerton Matos Nogueira | |
|  https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280920 | |
| CAPÍTULO 21 | 219 |
| AS POTENCIALIDADES DE UMA AULA DO CAMPO NO ENSINO FUNDAMENTAL II | |
| Marco André Dantas Leonardo Sturion | |
|  https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280921 | |
| SOBRE OS ORGANIZADORES | 230 |
| ÍNDICE REMISSIVO | 231 |

DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Data de aceite: 01/09/2021

Data de submissão: 30/06/2021

Willian Isao Tokura

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Maracaju – MS
<http://lattes.cnpq.br/3530744794583222>

Levi Rosa Adriano

Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
<http://lattes.cnpq.br/3206466156270217>

Priscila Marques Kai

Universidade Federal de Goiás, INF
Goiânia – GO
<http://lattes.cnpq.br/8210180026970752>

Elismar Dias Batista

Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
<http://lattes.cnpq.br/3648588387524579>

RESUMO: Neste artigo, provamos que se uma variedade Riemanniana satisfaz a condição de duplicação de volume e a desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg com o mesmo expoente, então a variedade tem um crescimento de volume exatamente n -dimensional. Como aplicação, obtemos propriedades geométricas e topológicas de variedades Riemannianas que suportam uma desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg.

PALAVRAS-CHAVE: Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN), desigualdade do tipo

Hardy, desigualdade de Sobolev, rigidez, variedades Riemannianas.

CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG INEQUALITIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

ABSTRACT: We prove that if a Riemannian manifold satisfies the volume doubling condition and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality with the same exponent, then it has exactly n -dimensional volume growth. As application, we obtain geometric and topological properties of Riemannian manifolds which support a Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality.

KEYWORDS: Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) inequality, Hardy type inequality, Sobolev inequality, rigidity, Riemannian manifolds.

INTRODUÇÃO

O século XX iniciou-se com grandes avanços na área de análise matemática, em especial na teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Em meados da década de 30, Sergei Sobolev, um matemático russo, iniciou os estudos de soluções fracas para as equações hiperbólicas e a minimização de certas integrais variacionais do princípio de Dirichlet. Durante esse período, como ferramenta para resolver tais problemas, Sobolev introduziu o que conhecemos atualmente como espaço de Sobolev, o qual denotamos por $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Diante desse cenário, as ideias de Sobolev se expandiram rapidamente por conta dos

inúmeros modelos procedentes da física, química e das engenharias que poderiam ser investigadas através de Equações Diferenciais Parciais.

No estudo desse novo objeto $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, assim como qualquer outro conceito importante da matemática, surge o interesse por entender e descrever suas propriedades. Dessa forma, Sobolev em 1936 provou o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja um parâmetro $p \in [1, n)$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$, então*

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \quad (1)$$

Em outras palavras, o espaço de Sobolev pode ser incluído de maneira contínua nos espaços de Lebesgue. Equivalentemente, a expressão (1) acima pode ser reescrita como

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

A desigualdade (2) é conhecida como desigualdade de Sobolev. A importância da desigualdade (2) reside no fato que, por ela é possível extrair certas propriedades para soluções fracas no espaço $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, de fundamental importância na resolução de equações diferenciais parciais, além de permitir extrair certas informações sobre a função u por meio de sua derivada.

Como ficou claro depois de um tempo, certos modelos importantes ligados a problemas físicos, químicos e das engenharias que envolviam equações diferenciais parciais mais gerais, necessitavam de desigualdades mais gerais que as obtidas por Sobolev. Nesse sentido, Emilio Gagliardo [6] e Louis Nirenberg [11] obtiveram de maneira independente a seguinte extensão para desigualdade de Sobolev.

Teorema 2. *Sejam $p \in (1, n)$, $s < r \leq q = \frac{np}{n-p}$ e $\theta \in [0, 1]$ então*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^s dx \right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Como podemos observar, as desigualdades (2) e (3) apresentam afinidade com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , visto que elas são satisfeitas nesse espaço. Observando essa peculiaridade Ledoux [10] e Xia [15] iniciaram o estudo das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg, respectivamente. Os autores provaram que as variedades com curvatura de Ricci não negativa que suportam tais desigualdades, são muito próximas do espaço Euclidiano. Mais precisamente, considere

$$GN_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_s^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta}{\|u\|_r}, \quad S_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}},$$

as constantes ótimas para as desigualdades (3) e (2), respectivamente, onde $\|\cdot\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\cdot|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, então toda variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa que suporta (2), ou então (3), com constante C próxima da constante ótima definida acima, é difeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n ; e no caso em que C é igual a constante ótima temos que a variedade é isométrica à \mathbb{R}^n , ou seja, do ponto de vista de distância, tem o

mesmo comportamento que o espaço Euclidiano.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg (CKN) provam que, sob um regime de parâmetros $n, p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$ e a (veja Teorema 3), existe uma constante tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx\right)^{\frac{1-a}{q}}, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como podemos observar, essa desigualdade generaliza as desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg.

Seja \mathbb{R}^n o espaço Euclidiano, denote por dx o elemento de volume associado a métrica canônica e considere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções suaves no espaço Euclidiano com suporte compacto.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg provam que

Teorema 3. *Sejam $n \geq 2, p, q, r, \alpha, \beta, \sigma, a$ constantes fixadas satisfazendo:*

$$p, q \geq 1, \quad r > 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}, \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} > 0, \gamma = a\sigma + (1-a)\beta,$$

onde

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a \left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n} \right) + (1-a) \left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n} \right),$$

com

$$0 \leq \alpha - \sigma \text{ se } a > 0, \quad e \quad \alpha - \sigma \leq 1 \text{ se } a = 0 \quad e \quad \frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n}.$$

Então existe uma constante positiva C tal que para qualquer função $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx\right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Denotamos por $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ a constante ótima para a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) acima, ou seja,

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q} |u|^q dx\right)^{\frac{1-a}{q}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

E associado à constante ótima, podemos definir o conceito de função ótima, a qual satisfaz a igualdade de CKN com $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$.

Recentemente, os autores em [9] consideraram a seguinte mudança na desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

$$\alpha = -\frac{\mu}{p}, \quad \beta = -\frac{\theta}{q}, \quad \gamma = -\frac{s}{r},$$

e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 4. *Sejam $n \geq 2$, p, q, μ constantes satisfazendo*

$$1 < p < p + \mu < n, \quad 1 \leq q < p \frac{q-1}{p-1} < \frac{np}{n-p},$$

juntamente com constantes r, θ, s, a dadas por

$$r = \frac{p(q-1)}{p-1}, \quad \theta = s = \frac{n\mu}{n-p} \quad e \quad a = \frac{[(n-\theta)r - (n-s)q]p}{[(n-\theta)p - (n-p-\mu)q]r}.$$

Então com $\delta = np - q(n-p)$ tem-se

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n) = \left(\frac{n-p}{n-p-\mu} \right)^L \left(\frac{q-p}{p\sqrt{\pi}} \right)^a \left(\frac{pq}{n(q-p)} \right)^{\frac{a}{p}} \left(\frac{\delta}{pq} \right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{\Gamma\left(q \frac{p-1}{q-p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{p} \frac{\delta}{q-p}\right) \Gamma\left(n \frac{p-1}{p} + 1\right)} \right],$$

Onde

$$L = \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} - \frac{1-a}{q} - \frac{(p-1)(1-a)}{p}.$$

E as funções ótimas são da forma

$$V_0(x) = A \left(1 + B|x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{q-p}}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad B > 0.$$

Os teoremas acima nos revelam que o espaço Euclidiano é um ambiente privilegiado, visto que suporta a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, isso se torna interessante, pois, tal desigualdade desempenha fundamental importância na teoria da resolução de equações diferenciais parciais elípticas, principalmente em problemas variacionais e regularidade de soluções. Dessa forma, o espaço Euclidiano se torna importante para estudos de tais problemas.

Por outro lado, quando trazemos a desigualdade de CKN para o ramo da geometria diferencial, uma pergunta pertinente é a seguinte:

Questão. *Como é a estrutura dos espaços que suportam a desigualdade de CKN?*

Visando responder essa questão, em [1, 2, 5, 7, 10, 13, 14, 15] os autores consideram o estudo das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa que satisfazem alguma das classes particulares de CKN. Em particular, em [1, 2, 5, 10, 13, 14, 15] os autores utilizam resultados de comparação de volume e obtêm que tais espaços satisfazem exatamente o crescimento de volume n -dimensional, isto é, existe uma constante universal $C_0 > 0$ tal que

$$V_{ol}(B_x(\rho)) \geq C_0 \rho^n, \quad x \in M, \quad \rho > 0.$$

Além disso, alguns resultados de rigidez são obtidos, e entre outras coisas mostram que as variedades Riemannianas com Ricci não negativo e que suportam classes de desigualdades específicas, como: desigualdade de Sobolev, desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, desigualdade de Hardy, etc, com constante C sendo próximo da constante ótima do caso Euclidiano para desigualdade correspondente, são difeomorfa ao espaço Euclidiano, e com constante C igual a constante ótima do caso Euclidiano temos a isometria com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .

No contexto dos espaços métricos, Kristály e Ohta em [8], estudam os espaços métricos com medida (X, d, m) que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg sem termo de interpolação (isto é, $\alpha = 1$)

$$\left(\int_X \frac{|u|^r}{d(x, x_0)^{-\gamma r}} dm \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_X |Du|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

com parâmetros

$$r = \frac{2n}{n-2-2\gamma}, \quad -\gamma \in [0, 1),$$

O obtém o seguinte resultado.

Teorema 5. *Seja (X, d, m) um espaço métrico próprio com medida n -dimensional e assuma que para $a \in [0, 1), n \geq 3, p = 2n/(n-2+2a), x_0 \in X,$ e*

$$c \geq K_a = \left(\frac{1}{(n-2)(n-ap)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(2-ap)\Gamma((2n-2ap)/(2-ap))}{n\omega_n \Gamma^2((n-ap)/(2-ap))} \right)^{\frac{2-ap}{2n-2ap}},$$

a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (4) ocorra em $X,$ juntamente com as seguintes condições:

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_\rho(x))} \leq C_0 \left(\frac{R}{\rho} \right)^n, \quad \forall x \in X, \quad e \quad 0 < \rho < R,$$

e

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{m(B_\rho(x_0))}{m_E(B_\rho(0))} = 1.$$

Então

$$m(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1} \left(\frac{K_a}{C} \right)^{\frac{n}{1-a}} m_E(B_\rho(0)), \quad \forall \rho > 0, \quad x \in X.$$

Tais resultados nos motivaram a entender a geometria e a estrutura das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de

interpolação

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\mu} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}},$$

onde os parâmetros acima são dados pelo Teorema 3.

RESULTADOS PRINCIPAIS

No restante desse manuscrito, salvo menção em contrário, assumiremos os parâmetros descritos no Teorema 3. Dito isso, nosso objetivo é estender o resultado principal de Kristály e Ohta em [8] para a classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em variedades Riemannianas com termo de interpolação, isso permitirá entender o comportamento das variedades que suportam tal classe mais geral de desigualdades. Como consequência, apresentaremos teoremas de rigidez métrica e topológica em variedades Riemannianas. Tais resultados fornecem boas pistas de como são os espaços que suportam a desigualdade CKN.

Nosso principal resultado pode ser enunciado na forma do seguinte teorema.

Teorema 6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assumamos que para toda função $u \in C_0^\infty(M)$ a desigualdade de CKN ocorra. Então para todo $R > 0$ temos*

$$\left(\frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C} \right)^{\frac{n}{a}} \omega_n R^n \leq Vol(B_R(p)) \leq \omega_n R^n,$$

onde ω_n denota o volume da bola de raio unitário em \mathbb{R}^n .

Um teorema devido a Cheeger e Colding [4] afirma que dado um inteiro $n \geq 2$, existe uma constante $\delta(n) > 0$, tal que toda variedade Riemanniana (M^n, g) completa com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo

$$Vol(B_r(x)) \geq (1 - \delta(n)) \omega_n r^n, \quad \forall x \in M, \quad \forall r > 0,$$

e difeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Então combinando este resultado com o Teorema 6, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Dado um inteiro $n \geq 2$, existe $\epsilon(n) > 0$, tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta (M^n, g) com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN com constante $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \epsilon(n)$ é difeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .*

Pelo teorema de comparação de Bishop-Gromov [3, 12], temos que uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) com curvatura de Ricci não negativa satisfaz

$$Vol(B_R(p)) \geq \omega_n R^n, \quad \forall p \in M,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a bola $B_R(o)$ é isométrica a bola Euclidiana de raio R . Assim, em decorrência do Teorema 6, temos o seguinte corolário.

Corolário 2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função a desigualdade de CKN ocorra com $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$. Então M é isométrica ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .*

REFERÊNCIAS

[1] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Hardy type inequalities on complete Riemannian manifolds. **Monatshefte für Mathematik**, v. 163, n. 2, p. 115-129, 2011.

[2] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 371, n. 1, p. 372-383, 2010.

[3] CHAVEL, Isaac. Riemannian geometry: a modern introduction. **Cambridge university press**, 2006.

[4] CHEEGER, Jeff and COLDING TOBIAS. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. **Journal of Differential Geometry**, v. 46, n. 3, p. 406-480, 1997.

[5] DO CARMO, Manfredo Perdigão; XIA, Changyu. Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Compositio Mathematica**, v. 140, n. 3, p. 818-826, 2004.

[6] GAGLIARDO, Emilio. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. **Matematika**, v. 5, n. 4, p. 87-116, 1961.

[7] HEBEY, Emmanuel. Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities: Sobolev Spaces and Inequalities. **American Mathematical Soc.**, 2000.

[8] KRISTÁLY, Alexandru; OHTA, Shin-ichi. Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications. **Mathematische Annalen**, v. 357, n. 2, p. 711-726, 2013.

[9] LAM, Nguyen; LU, Guozhen. Sharp constants and optimizers for a class of Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Advanced Nonlinear Studies**, v. 17, n. 3, p. 457-480, 2017.

[10] LEDOUX, M. On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 7, n. 2, p. 347-353, 1999.

[11] NIRENBERG, Louis. On elliptic partial differential equations. In: **Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. p. 1-48.

[12] SCHOEN, Richard M.; YAU, Shing-Tung. **Lectures on differential geometry**. Cambridge, MA: International press, 1994.

[13] XIA, Changyu. Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and almost best Sobolev constant. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 45, n. 4, p. 1253-1259, 2001.

[14] XIA, Changyu. The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds. **Mathematical Research Letters**, v. 14, n. 5, p. 875-885, 2007.

[15] XIA, Changyu. The Gagliardo–Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature. **Journal of Functional Analysis**, v. 224, n. 1, p. 230-241, 2005.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Alunos cegos 71, 74, 75, 76, 80, 82, 119, 120

Análise combinatória 154, 156, 157, 159

Aprendizagem 1, 2, 5, 10, 13, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 71, 72, 73, 74, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 120, 122, 123, 124, 125, 160, 161, 162, 163, 164, 171, 192, 208, 210, 211, 213, 216, 217, 218, 220, 221, 223, 228

Arduíno 1, 3, 4, 6

Arquimedes 154, 155, 156, 157, 159

Atividade remota 18

Atividades exploratórias 85, 86, 87, 91, 92, 95, 97, 98, 108, 109, 112, 116

Auto-similaridade 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

B

BNCC 1, 2, 10, 155, 157, 159, 163, 191, 192, 193, 207

C

Curso superior 57, 58

D

Desenvolvimento 5, 12, 13, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 42, 43, 46, 49, 58, 60, 61, 73, 75, 85, 86, 88, 91, 92, 95, 101, 102, 106, 110, 115, 118, 120, 121, 126, 139, 142, 143, 151, 152, 153, 154, 159, 163, 164, 165, 192, 208, 209, 213, 217, 218, 221, 222, 228, 230

Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) 63, 65, 66, 67

Desigualdade de Sobolev 63, 64, 67

Desigualdade do tipo Hardy 63

Dificuldade de aprendizagem 24

E

Educação 4, 10, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 51, 55, 58, 62, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 83, 84, 86, 88, 89, 91, 92, 93, 98, 99, 100, 102, 107, 109, 111, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 125, 127, 139, 140, 141, 142, 143, 152, 154, 159, 160, 163, 171, 207, 210, 217, 218, 221, 228, 229, 230

Educação matemática 10, 12, 13, 14, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 33, 42, 43, 55, 58, 62, 81, 86, 88, 91, 92, 93, 98, 99, 100, 102, 107, 111, 117, 118, 119, 122, 127, 139, 140, 141, 142, 143, 152, 154, 159, 160, 171, 210, 218, 221, 229, 230

Ensino 1, 2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 62, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 117, 118, 120, 121, 122, 126, 141, 142, 143, 148, 151, 154, 155, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 170, 171, 192, 193, 208, 209, 210, 211, 212, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 228, 229, 230

Ensino básico 142, 151, 154, 155, 157, 159

Ensino de matemática 13, 30, 33, 57, 143, 229, 230

Ensino fundamental 10, 17, 24, 29, 79, 83, 100, 101, 103, 111, 118, 120, 160, 163, 164, 171, 192, 208, 209, 211, 212, 217, 218, 219, 220, 228, 229

Ensino superior 18, 19, 20, 22, 47, 58, 62, 91, 97, 171, 230

Estatística 5, 10, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 143, 230

Estudo orientado 18, 22

Excel 60, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 196, 198, 206

Experiência 18, 20, 22, 23, 27, 34, 35, 36, 38, 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 74, 79, 80, 101, 120, 127, 140, 167, 192, 202, 218, 219, 228

F

Física 1, 4, 10, 64, 121, 170, 171, 192, 229

Fração 208, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 218

Fractais 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

Função do 1º grau 71, 72, 73, 74, 76

Funções polinomiais 85, 86, 90, 92

G

Geometria 23, 36, 38, 62, 66, 67, 154, 156, 157, 160, 161, 165, 193, 220, 222

Grounded theory 139, 140, 141, 143, 151, 152, 153

H

Hermite 191, 192, 194, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 205, 206, 207

História da matemática 154, 155, 159

I

Imunidade coletiva 128, 129, 132, 133, 137

Inclusão 20, 21, 22, 71, 74, 75, 76, 78, 80, 81, 83, 84, 120, 121, 122, 127

Instrumento educativo 100

Instrumentos de pesquisa 139

Interdisciplinaridade 12, 13, 16, 17, 24, 25, 33

Interpolação 67, 68, 191, 192, 193, 194, 199, 206, 207

Itinerário formativo 191, 192, 193

J

Jogos 12, 13, 14, 16, 17, 30, 157, 193

M

Matemática 1, 2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 124, 126, 127, 129, 132, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 148, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 167, 170, 171, 172, 191, 192, 193, 207, 210, 218, 219, 221, 222, 228, 229, 230

Material concreto 27, 74, 100, 101, 103, 124

MATLAB 191, 192, 199, 206, 207

Metodologia de pesquisa 91, 111, 139, 153

Metodologias ativas 57, 58, 59, 61, 62

Modelos matemáticos 128, 129

N

Narrativas 119, 120, 122, 123, 124, 125, 127, 230

O

Operações 16, 27, 29, 36, 38, 85, 88, 100, 104, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 208, 209, 210, 212, 214, 217

Origami 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55

P

Papel do professor 24, 30, 32, 57, 109, 148, 217

Pesquisa educacional 139

Pesquisa qualitativa 5, 10, 41, 80, 85, 98, 109, 127, 139, 152, 171

Projeto investigativo 57, 58, 60, 61

R

Resolução de problemas 29, 46, 58, 59, 76, 103, 160, 161, 162, 163, 164, 167, 170, 171, 192, 193, 211, 217, 224

Rigidez 63, 67, 68

Robótica educacional 1, 2, 5, 10

S

Saberes experienciais 85, 87

SEIR 128, 129, 134, 135, 136, 137

Semelhança de triângulos 160, 161, 165, 167, 170, 219, 221, 224, 225, 227, 228

SIR 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138

Sistema NODET 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

Software GeoGebra 85

Stomachion 154, 155, 156, 157, 158, 159

T

Técnicas 33, 36, 60, 76, 77, 84, 121, 139, 140, 143, 152, 156, 162, 163, 167, 207, 208, 217

Teoria das situações didáticas 111, 118, 208, 209, 210, 211

Transposição didática 71, 75, 76, 77, 78, 80, 81

V

Variedades Riemannianas 63, 64, 66, 67, 68

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA

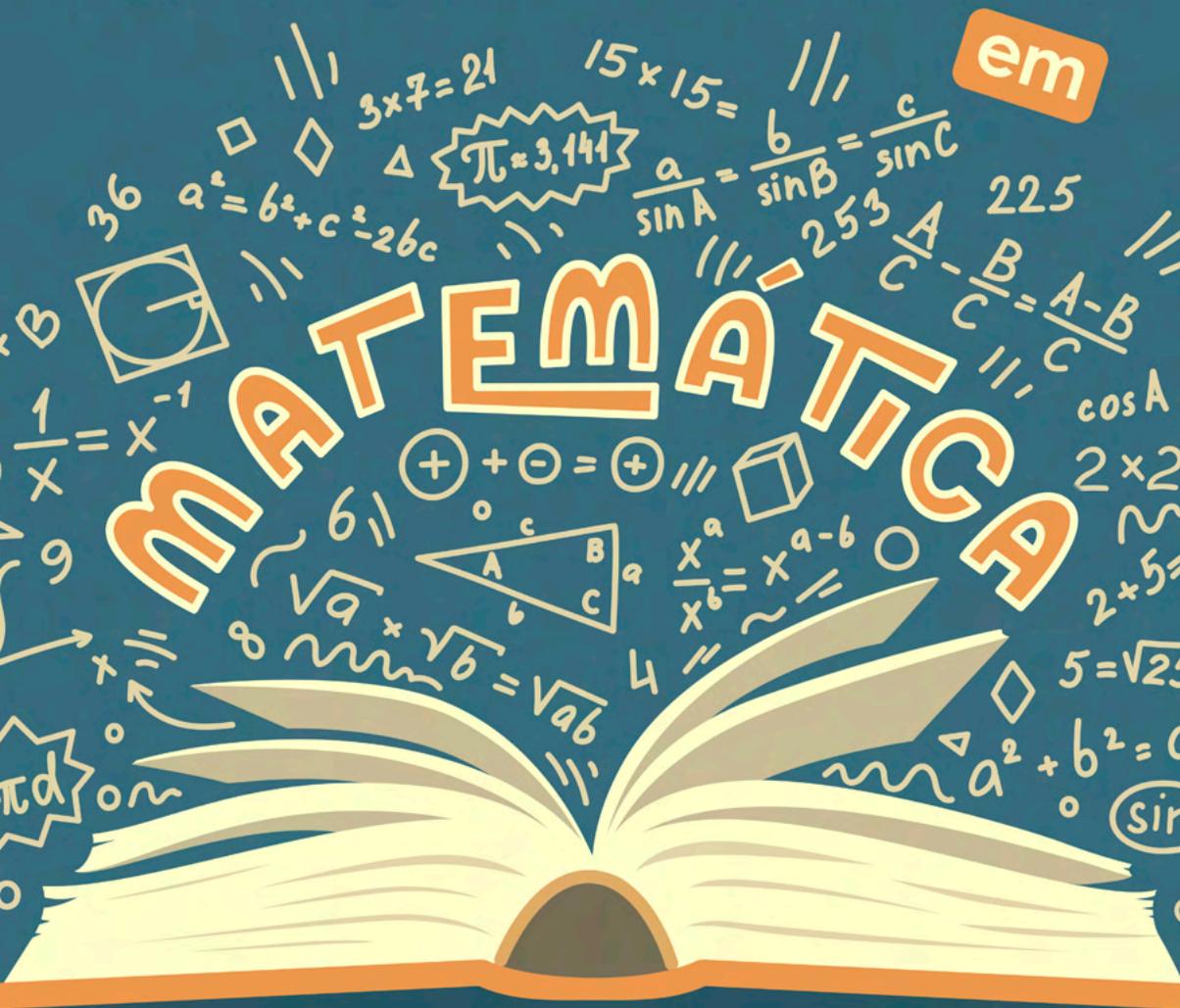


e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021