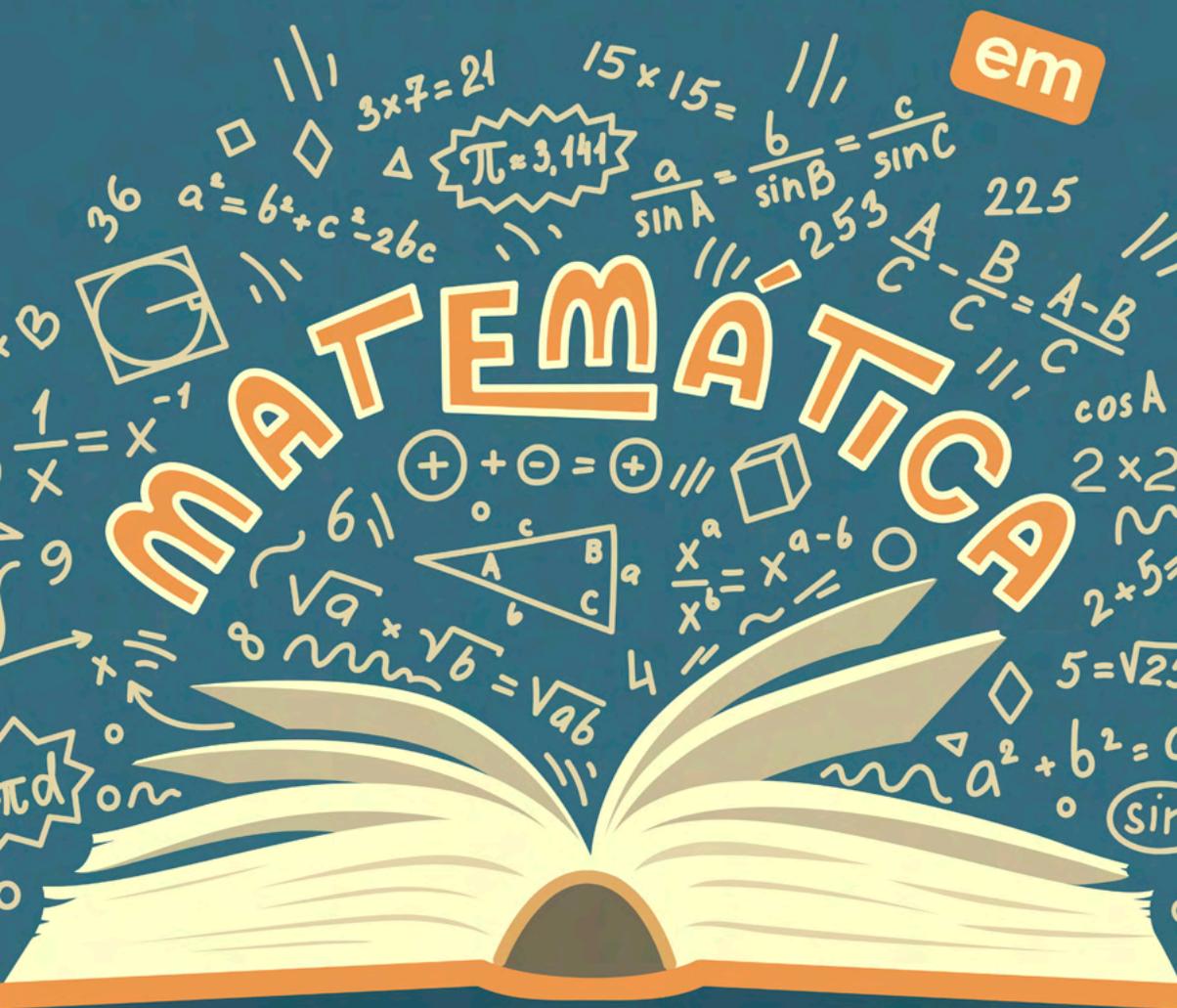


Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA

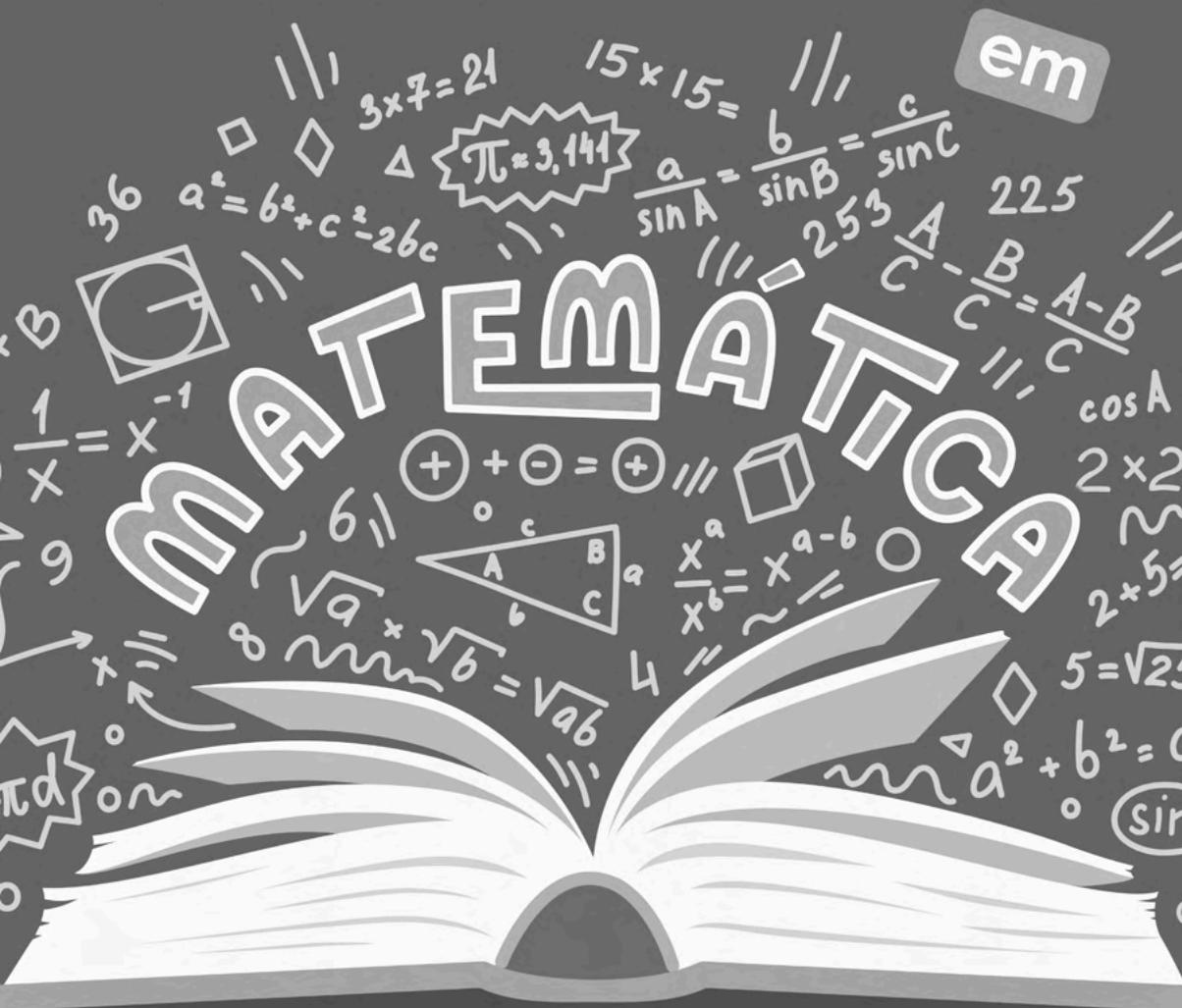


e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2021 Os autores

Copyright da edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremona
Correção: Bruno Oliveira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5983-440-2

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.402212809>

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, desta forma não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro **“Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações”** nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da Educação

Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41>. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

O USO DA ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Bruna Nogueira Simões Cobuci

Rigoberto Gregório Sanabria Castro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128091>

CAPÍTULO 2..... 12

BANCO IMOBILIÁRIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE ENSINO EM AULAS DE MATEMÁTICA

Thayná Schleider de Matos

Joyce Jaquelinne Caetano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128092>

CAPÍTULO 3..... 18

APLICAÇÃO DE MONITORIAS ON-LINES DE CÁLCULO COMO FERRAMENTA DE NIVELAMENTO E INICIAÇÃO A DOCÊNCIA

Tamires Ester Peixoto Bravo

Pedro Lucas Moreira Rodrigues

Matheus Alencar de Freitas

Enrique Dias de Matos

Pedro Augusto Araújo Sant'Ana

Ivano Alessandro Devilla

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128093>

CAPÍTULO 4..... 24

A PSICOLOGIA EDUCACIONAL, A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DISCUSSÕES SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS À APRENDIZAGEM

André de Lima Pereira Gomes

Gyliane Ornela Barbosa

Márcia Santos Melo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128094>

CAPÍTULO 5..... 34

DA INFORMALIDADE A SALA DE AULA: A MATEMÁTICA DO MEU ALUNO

Evren Ney da Silva Jean

Meiry Jane Cavalcante Rattes

Márcio Laranjeira Anselmo

Reginaldo Nascimento da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128095>

CAPÍTULO 6..... 42

A METODOLOGIA DO SISTEMA *NODET* E SUAS POSSIBILIDADES DE PESQUISA

SOBRE O USO DO ORIGAMI NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TEMPOS DE USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

Daniel Albernaz de Paiva Brito

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128096>

CAPÍTULO 7..... 57

A MATEMÁTICA DO AGRONEGÓCIO: CONTRIBUIÇÕES PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFIC(ATIVA)

Luiz Carlos dos Santos Filho

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128097>

CAPÍTULO 8..... 63

DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Willian Isao Tokura

Levi Rosa Adriano

Priscila Marques Kai

Elismar Dias Batista

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128098>

CAPÍTULO 9..... 71

O ENSINO DE FUNÇÃO DO 1º GRAU NA EDUCAÇÃO INCLUSIVA: TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O SABER MATEMÁTICO PARA ALUNOS CEGOS

Camila Ferreira e Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4022128099>

CAPÍTULO 10..... 85

OPORTUNIDADES PARA ARTICULAÇÃO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DO USO DE *SOFTWARES* MATEMÁTICOS

José Cirqueira Martins Júnior

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280910>

CAPÍTULO 11..... 100

ENSINANDO MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM MATERIAL CONCRETO

Graciela Sieglloch Lins

Marcos Lübeck

Jocinéia Medeiros

Fernando Luiz Andretti

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280911>

CAPÍTULO 12..... 108

A UTILIZAÇÃO DO EXCEL COM ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS PARA O TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES EM CONTEÚDOS DE ESTATÍSTICA

José Cirqueira Martins Júnior

Leandro Vieira dos Santos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280912>

CAPÍTULO 13..... 119

NARRATIVAS SOBRE UM LUGAR COMUM: SALA DE RECURSOS

Rozana Morais Lopes Feitosa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280913>

CAPÍTULO 14..... 128

MODELO EPIDÊMICO SIR, COM E SEM VACINAÇÃO E MODELO EPIDÊMICO SEIR

Lívia de Carvalho Faria

Mehran Sabeti

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280914>

CAPÍTULO 15..... 139

GROUNDED THEORY COMO METODOLOGIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES, RACIOCÍNIO E PROCEDIMENTOS

Eliandra Moraes Pires

Everaldo Silveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280915>

CAPÍTULO 16..... 154

STOMACHION: UMA ABORDAGEM SOBRE A HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Paula Francisca Gomes Rodrigues

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280916>

CAPÍTULO 17..... 160

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALÉM DA SALA DE AULA: EM CENA A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Fábio Vieira Abrão

Luciano Soares Gabriel

Norma S. Gomes Allevato

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280917>

CAPÍTULO 18..... 172

APPROXIMATION OF A SYSTEM OF A NON-NEWTONIAN FLUID BY A SYSTEM OF CAUCHY-KOWALESKA TYPE

Geraldo Mendes de Araujo

Elizardo Fabricio Lima Lucena

Michel Melo Arnaud

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280918>

CAPÍTULO 19..... 191

INTERPOLAÇÃO PELO MÉTODO DE HERMITE USANDO DIFERENÇAS DIVIDIDAS

João Socorro Pinheiro Ferreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280919>

CAPÍTULO 20	208
APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	
Bruno José de Sá Ferraz Lemerton Matos Nogueira	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280920	
CAPÍTULO 21	219
AS POTENCIALIDADES DE UMA AULA DO CAMPO NO ENSINO FUNDAMENTAL II	
Marco André Dantas Leonardo Sturion	
 https://doi.org/10.22533/at.ed.40221280921	
SOBRE OS ORGANIZADORES	230
ÍNDICE REMISSIVO	231

MODELO EPIDÊMICO SIR, COM E SEM VACINAÇÃO E MODELO EPIDÊMICO SEIR

Data de aceite: 01/09/2021

Data de submissão: 04/06/2021

Livia de Carvalho Faria

Universidade Federal de Viçosa - *Campus*
Florestal
Betim - Minas Gerais
<http://lattes.cnpq.br/8125113309224788>

Mehran Sabeti

Universidade Federal de Viçosa - *Campus*
Florestal
Florestal - Minas Gerais
<http://lattes.cnpq.br/1192944329873105>

RESUMO: Ao longo dos anos, o estudo de fenômenos biológicos através de modelos matemáticos se aperfeiçoou e continua se aperfeiçoando, tornando-se cada vez mais necessário. Esses modelos são ferramentas utilizadas para prever o comportamento, por exemplo, de doenças epidemiológicas em uma população, se a doença irá se extinguir ou não e o efeito da vacinação e da quarentena ao longo do tempo. Será abordado o modelo SIR (Suscetíveis-Infetados-Recuperados) com e sem a incorporação de vacinação e o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infetados-Recuperados), e simulações numéricas dos respectivos modelos. Além disso, os conceitos de reprodutibilidade basal e imunidade de rebanho também serão apresentados.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos matemáticos, SIR, SEIR, imunidade coletiva.

SIR EPIDEMIC MODEL, WITH AND WITHOUT VACCINATION AND SEIR EPIDEMIC MODEL

ABSTRACT: Over the years, the study of biological phenomena through mathematical models has improved and continues to improve, becoming increasingly necessary. These models are tools used to predict the behavior, for example, of epidemiological diseases in a population, whether the disease will become extinct or not, and the effect of vaccination and quarantine over time. The SIR (Susceptible-Infected-Recovered) model will be addressed with and without the incorporation of vaccination and the SEIR model (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered), and numerical simulations of the respective models. In addition, the concepts of basal reproducibility and herd immunity will also be presented.

KEYWORDS: Mathematical models, SIR, SEIR, collective immunity.

1 | INTRODUÇÃO

Alguns conceitos são fundamentais para a compreensão do assunto que será abordado neste artigo. O primeiro deles é a epidemiologia: ciência que estuda os fenômenos associados ao processo saúde-doença em determinada população. Pode-se aplicar procedimentos matemáticos a esses fenômenos ou qualquer outro fenômeno biológico, com o intuito de prever, prevenir ou extinguir determinado acontecimento. A esse processo dá-se o nome de biomatemática.

A principal razão para o estudo de doenças epidemiológicas é o controle e erradicação de determinada infecção. E os modelos matemáticos são ótimas ferramentas que permitem o direcionamento de medidas de controle que visam diminuir a média de transmissão da doença.

Os pesquisadores Anderson McKendrick e William Kermack foram os primeiros a dar forma a chamada epidemiologia matemática. Anteriormente, diversos pesquisadores já tinham contribuído com inúmeras descobertas, mas foram nos anos de 1927, 1932 e 1933 que Kermack e McKendrick publicaram artigos relatando a dinâmica de transmissão de uma doença através de equações diferenciais e além disso, apresentaram os conceitos de imunidade e vacinação em termos matemáticos [1].

Em 1927, os dois pesquisadores desenvolveram o modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis-Infetados-Recuperados) que será um dos objetos de estudo deste trabalho. O modelo em questão será analisado com a implementação da vacinação constante. Será estudado também o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infetados-Recuperados) referente a COVID-19, assim como o conceito de reprodutibilidade basal e imunidade coletiva. Algumas simulações de ambos os modelos, desenvolvidas no Python, serão apresentadas afim de demonstrar os resultados obtidos através dos estudos [4].

2 | MODELO SIR COM DINÂMICA VITAL

O modelo SIR (Suscetíveis-Infetados-Recuperados), desenvolvido por Kermack e McKendrick em 1927 se refere a doenças em que o indivíduo adquire imunidade após curar-se da infecção. Algumas doenças que podem ser modeladas pelo SIR são rubéola, sarampo, catapora e varíola [1].

Para diminuir as variáveis do sistema e simplificar os cálculos, o modelo deverá conter algumas premissas, que são elas:

- Todos os indivíduos nascem suscetíveis;
- O tamanho da população é constante, ou seja, a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade;
- Desconsidera-se imigração e emigração;
- Todos na população têm a mesma chance de se infectar;
- Os indivíduos infectados que se recuperam ganham imunidade.

As premissas dispostas acima serão consideradas durante todo o trabalho. Além disso, a população é dividida em três compartimentos disjuntos: O compartimento dos indivíduos suscetíveis, S , dos infectados, I , e dos recuperados, R . O esquema compartimental do Modelo SIR está representada na figura abaixo.

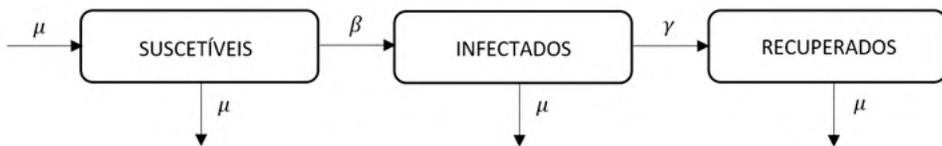


Figura 1: Esquema compartimental do modelo SIR.

Onde os parâmetros μ, β e γ representam as taxas de natalidade/mortalidade, taxa de infecção e taxa de recuperação, respectivamente. E, além disso $0 < \mu, \gamma < 1$ e $\beta > 0$.

O modelo SIR é representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

Assim $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ representam, respectivamente, a proporção de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados no instante de tempo t . E considerando a população total, $T(t)=1$, temos $S(t) + I(t) + R(t)=1$, reescrevendo, $R(t)=1 - S(t) - I(t)$.

Agora, analisaremos a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do Modelo SIR. Para tanto, podemos considerar apenas as duas primeiras equações do sistema (1).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \end{cases} \quad (2)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são aqueles onde a derivada se anula, ou seja, as taxas de crescimento e decrescimento das populações de suscetíveis e infectados permanecem constantes.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

A partir da análise desse sistema, os pontos de equilíbrios encontrados foram $(S^*, I^*, R^*)=(1,0,0)$ e $(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma}, 1 - \frac{\mu+\gamma}{\beta}\right)$ denominados equilíbrio livre de infecção e equilíbrio endêmico, respectivamente. Ambos podem ser classificados de acordo

com sua estabilidade e para isso será introduzido abaixo o conceito de reprodutibilidade basal.

A **reprodutibilidade basal** ou **valor limiar**, denotado por R_0 , é o número médio de casos secundários da doença que são gerados a partir de um caso inicial [3]. Para determinar o valor de R_0 devemos levar em conta a força de infecção, β , a taxa de mortalidade, μ e a taxa de recuperação, γ . Se a taxa de mortalidade for alta, então os indivíduos ficarão menos tempo no compartimento dos infectados e o caso contrário acontece para a taxa de recuperação, se γ for alta, o período no compartimento dos infectados é mais longo.

$$\text{Período médio de infecção} = \frac{1}{\mu + \gamma}$$

A reprodutibilidade basal é diretamente proporcional ao período médio de infecção (4) e à taxa de infecção, β :

Se $R_0 > 1$, então cada indivíduo infectado é capaz de infectar mais de uma pessoa suscetível e a probabilidade de haver uma epidemia nessa população é maior. Portanto, nesse caso as autoridades devem buscar e aplicar medidas que visem conter uma possível epidemia, como por exemplo, vacina e quarentena. Mas caso $R_0 < 1$ a tendência é que a doença desapareça daquela população de forma natural ao longo do tempo.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser analisada através da matriz Jacobiana associada ao sistema e seus autovalores.

O ponto de equilíbrio livre de infecção $(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$ será estável se $R_0 < 1$ e instável se $R_0 > 1$. Já o ponto de equilíbrio endêmico $(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu + \gamma}, 1 - \frac{\mu + \gamma}{\beta}\right)$ será estável de $R_0 > 1$ e caso contrário, será instável.

2.1 Modelo SIR com vacinação constante

Uma das estratégias de combate e prevenção de uma epidemia é a vacinação constante, que consiste em vacinar uma porcentagem dos recém nascidos. Indicaremos por p a proporção da população vacinada, sendo $0 < p < 1$. Na figura abaixo está representado o esquema compartimental de modelo SIR com vacinação.

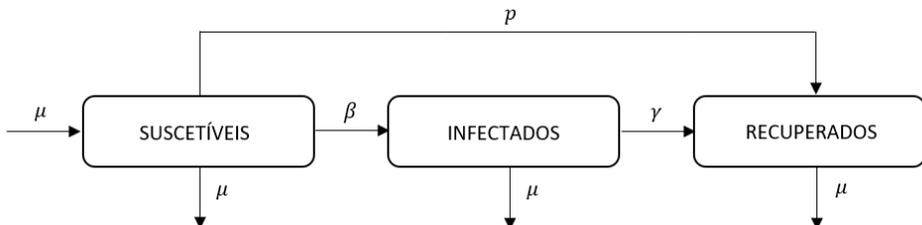


Figura 2: Esquema compartimental do modelo SIR com vacinação.

O intuito da vacinação é que parte da população suscetível se torne recuperada sem adquirir a doença, ou seja, sem passar pelo compartimento dos infectados. Portanto, a equação que representa o compartimento dos indivíduos suscetíveis terá uma modificação: a proporção de recém-nascidos diminui para $(1-p)\mu$ e a equação que representa os indivíduos recuperados terá um aumento de $p\mu$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = (1-p)\mu - \beta IS - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = p\mu + \gamma I - \mu R \end{array} \right. \quad (6)$$

Para a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema com campanha de vacinação, deve-se considerar $R_0 > 1$. Além disso, denota-se por p_c a proporção mínima de vacinação, dada por $p_c = 1 - 1/R_0$.

Assim como o modelo SIR sem campanha de vacinação, aqui admite-se dois pontos de equilíbrios, também denotados por equilíbrio livre de infecção e equilíbrio endêmico, dados por $(S^*, I^*) = (1-p, 0)$ e $(S^*, I^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu \frac{\mu + \gamma}{\beta} - \mu \frac{1}{\beta} \right)$, respectivamente.

A análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita a partir dos parâmetros p e p_c , da seguinte maneira:

1. se a taxa de vacinação for maior que a taxa mínima de vacinação, ou seja, se $p > p_c$, então o equilíbrio livre de infecção é estável e o equilíbrio endêmico é biologicamente irrelevante.
2. caso contrário, ou seja, se $p < p_c$, então o equilíbrio endêmico é estável e o equilíbrio livre de doença é instável.

Na tabela abaixo estão representados alguns valores de reprodutibilidade basal, R_0 , e a taxa mínima de vacinação, p_c , em algumas localidades.

Doença	Localidade	Período	R_0	p_c
Sarampo	Reino Unido	1950 - 1968	16 - 18	$\simeq 0,9375 - 0,9444$
Rubéola	Polônia	1970 - 1977	11 - 12	$\simeq 0,9090 - 0,9166$
HIV (Tipo 1)	Kampala, Uganda (Heterossexuais)	1985 - 1987	10 - 11	$\simeq 0,9 - 0,9090$

Tabela 1: Valores estimados de R_0 e p_c para algumas doenças.

2.1.1 Imunidade coletiva

Um conceito muito importante dentro de epidemiologia matemática é o de imunidade

coletiva, também conhecido como imunidade de rebanho. É a porcentagem da população que precisa estar recuperada, ou ser vacinada, para que determinada doença se extinga da população. Assim como a taxa mínima de vacinação, a imunidade coletiva também pode ser denominada por p_c e dada por $p_c = 1 - 1/R_0$

Os valores estimados de p_c na Tabela 1, representam então a porcentagem da população que precisa se tornar recuperada, ou ser vacinada para que haja imunidade coletiva e a doença desapareça.

2.1.2 Simulações numéricas

Para realizar as simulações numéricas foi utilizado o programa Python. Essas simulações foram feitas a partir de parâmetros genéricos e não condizem necessariamente com alguma situação real.

Os parâmetros Utilizados para fazer a simulação dos modelos SIR com e sem vacinação foram: $\mu=0,004$, $\gamma=0,1429$, $\beta=0,9$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0)) = (0,90; 0,10)$, e para o modelo com vacinação, $p = 0,50$.

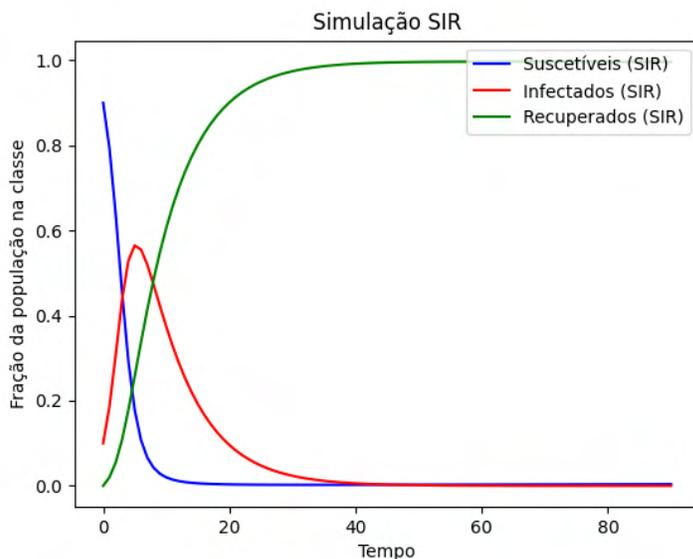


Figura 3: Simulação modelo SIR sem vacinação. Os parâmetros utilizados foram $\mu=0,004$, $\gamma=0,1429$, $\beta=0,9$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0))=(0,90; 0,10)$.

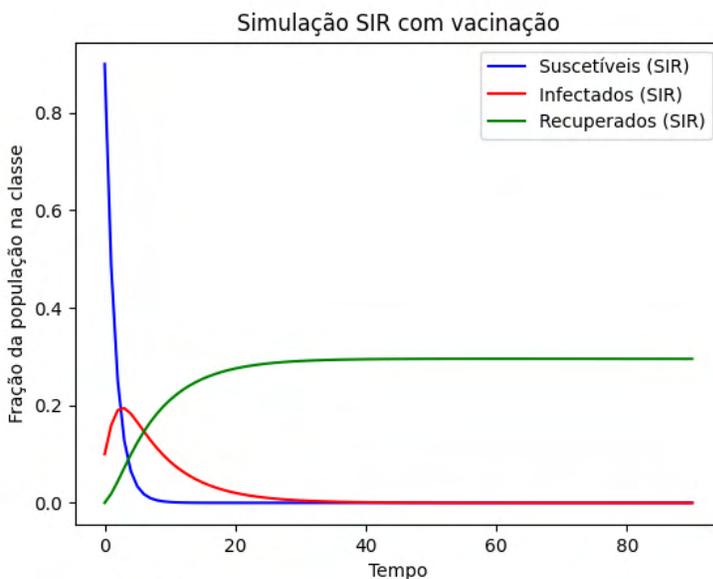


Figura 4: Simulação modelo SIR sem vacinação. Os parâmetros utilizados foram $\mu=0,004$, $\gamma=0,1429$, $\beta=0,9$, $\rho=0,50$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0))=(0,90; 0,10)$.

As simulações numéricas mostram o efeito da campanha de vacinação durante uma epidemia. O pico da curva dos infectados diminui significativamente, conseqüentemente diminuindo o número de óbitos e possivelmente a ocupação de leitos hospitalares por conta da doença. Pode-se observar também que a curva dos infectados de torna zero em menos tempo com a incorporação da vacina no modelo.

3 | MODELO SEIR

Durante o processo de transmissão de um vírus, inicialmente o patógeno se reproduz rapidamente, mas sem ser notado pelo sistema imunológico e sem que haja transmissão da doença pelo indivíduo infectado. Portanto, o hospedeiro não pode ser classificado como suscetível, infectado ou recuperado. Esses indivíduos são classificados como expostos, e representados por E . A adição de um período latente representa um pequeno atraso no sistema. Além disso, um novo parâmetro é incorporado ao modelo, que representa os indivíduos que saem da classe dos expostos e passam para a classe dos infectados, dado por σ . O esquema compartimental do modelo SEIR está representado na figura abaixo.

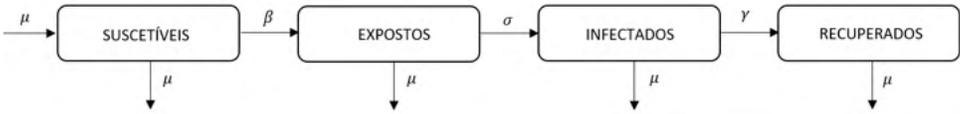


Figura 5: Esquema compartimental do modelo SEIR sem vacinação.

Um exemplo de doença infecciosa que pode ser modelada pelo SEIR, é o COVID-19. Considerando as mesmas premissas utilizadas no modelo SIR, o sistema de equações a seguir define o modelo SEIR:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \mu E - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{array} \right. \quad (7)$$

A reprodutibilidade basal do modelo SEIR é dado por:

$$R_0 = \frac{\beta\sigma}{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma)} \quad (8)$$

O sistema possui dois pontos de equilíbrio, denominados equilíbrio livre de doença e equilíbrio endêmico, dados por $(S^*, E^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0, 0)$ e $(S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma)}{\beta\sigma}, \frac{\mu + \gamma}{\sigma} \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta} (R_0 - 1)\right)$, respectivamente.

Quanto a estabilidade dos pontos de equilíbrio, se $R_0 < 1$, então o equilíbrio livre de doença é estável, se $R_0 > 1$, então o equilíbrio endêmico será estável.

3.1 Simulações numéricas

Os parâmetros Utilizados para fazer a simulação do modelo SEIR foram os mesmos utilizados no modelo SIR: $\mu=0,004$, $\gamma=0,1429$, $\beta=0,9$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0))=(0,90;0,10)$, e para o modelo com vacinação, $p=0,50$. Além disso, consideramos $\sigma = 0,07$.

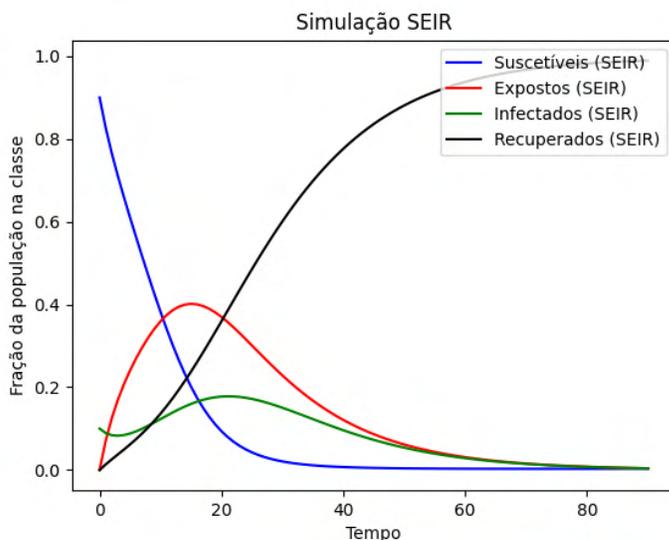


Figura 6: Simulação modelo SEIR. Os parâmetros utilizados foram $\mu = 0,004$, $\gamma = 0,1429$, $\beta = 0,9$, $\sigma = 0,07$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0)) = (0,90; 0,10)$.

Comparando as simulações dos modelos SEIR e SIR sem vacinação podemos perceber uma grande diferença nas curvas, principalmente a classe dos infectados. Isso ocorre pois os indivíduos que adquiriam a doença eram classificados como infectados no modelo SIR, mas no modelo SEIR são divididos em duas classes, expostos e infectados.

4 | CORONAVÍRUS (COVID-19)

No final de 2019, foi notificado o primeiro caso de COVID-19 em Wuhan, na China. A doença mostrou-se muito letal e em pouco tempo já tinha se espalhado por todo mundo. Em 20 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) classificou o surto como Emergência de Saúde Pública de Âmbito Internacional e, em 11 de março de 2020, como pandemia. Desde o início da pandemia 16,1 milhões de casos de COVID-19 já foram notificados e aproximadamente 449,8 mil pessoas morreram no Brasil [5].

Após muitas observações e pesquisas, o modelo SEIR é o que melhor se adapta ao COVID19 atualmente, podendo ser incorporados ao modelo a vacinação e a quarentena. Abaixo será apresentada uma simulação com dados reais da infecção de COVID-19 no Brasil, afim de demonstrar os gráficos em uma situação real de epidemia.

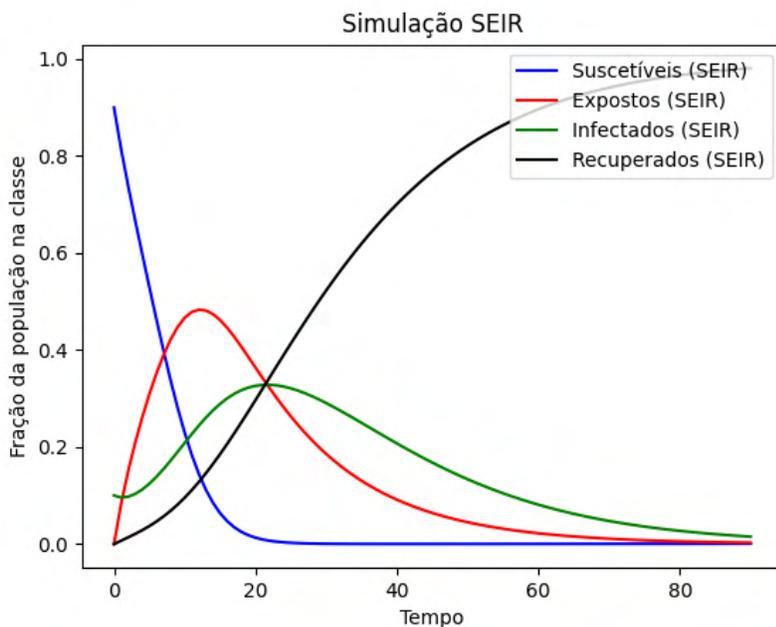


Figura 7: Simulação modelo SEIR. Os parâmetros utilizados foram $\mu=0,00003$, $\gamma=0,07$, $\beta=1,02$, $\sigma=0,07$, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial $(S(0), I(0))=(0,90; 0,10)$. [5] [6] [7]

Pode-se perceber que a curva dos infectados, para os parâmetros da COVID-19, é preocupante. Com a implementação da vacinação e da quarentena haveria uma melhoria nas curvas do gráfico acima, diminuindo o número de infectados e, conseqüentemente, de mortes. A reprodutibilidade basal para o COVID-19 é de, aproximadamente, 2,5, ou seja, a proporção mínima de vacinação, $p_c = 0,6$, que representa 60% da população que deve se tornar recuperada ou vacinada para que haja a imunidade coletiva.

5 | CONCLUSÃO

Neste artigo foram apresentados os modelos SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados), desenvolvido por McKendrick e Kermack, que podem modelar doenças como a Rubéola, Sarampo e a Varíola, e o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infectados-Recuperados), que modela, por exemplo, o COVID-19. Verificamos importantes conceitos, como o de Imunidade Coletiva e Reprodutibilidade basal. Além disso, através das simulações numéricas pode-se perceber a importância das campanhas de vacinação, que resultam na diminuição dos números de infectados, diminuição da ocupação dos leitos de UTI e como resposta, diminuição no número de óbitos. Outra questão de extrema importância é a proporção mínima de vacinação, p_c , analisada no modelo SIR.

Todas essas questões tratadas aqui demonstram a relevância dos modelos

compartimentais, que permitem, de certa forma, prever o que poderia acontecer ao longo do tempo com determinada população que esteja sendo acometida por uma infecção, e mais ainda, determinar qual a melhor medida protetiva que deve ser usada em cada caso, tal como vacinação e quarentena.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, Priscila Roque de. *MODELOS EPIDÊMICOS SIR, CONTÍNUOS E DISCRETOS, E ESTRATÉGIAS DE VACINAÇÃO*. 2014. Dissertação (Pós-graduação) - Universidade Federal de Viçosa, 2014.

[2] MARTCHEA, Maia. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, v.61.

[3] KEELING, Matt J.; ROHANI, Pejman. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton University Press, 2008.

[4] SILVA, Lucas Dantas da; RODRIGUES, Walter Martins; VILLARREAL, Elmer Rolando Llanos. *MODELAGEM MATEMÁTICA DOS CASOS CONFIRMADOS DE CORONAVÍRUS NO BRASIL E NO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE*. Universidade Federal Rural do Semi-árido.

[5] CORONAVÍRUS/BRASIL. COVID-19: *Painel Coronavírus*. Disponível em: <https://covid.saude.gov.br/>. Acesso em junho de 2021.

[6] AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. *Em 2019, expectativa de vida era de 76,6 anos*. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-denoticias/releases/29502-em-2019-expectativa-de-vida-era-de-76-6-anos>. Acesso em junho de 2021.

[7] VEJA. *Covid-19: após um mês, taxa de transmissão volta a subir no Brasil*. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/saude/covid-19-apos-1-mes-taxa-de-transmissao-volta-a-subir-no-brasil/>. Acesso em junho de 2021.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Alunos cegos 71, 74, 75, 76, 80, 82, 119, 120

Análise combinatória 154, 156, 157, 159

Aprendizagem 1, 2, 5, 10, 13, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 71, 72, 73, 74, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 120, 122, 123, 124, 125, 160, 161, 162, 163, 164, 171, 192, 208, 210, 211, 213, 216, 217, 218, 220, 221, 223, 228

Arduíno 1, 3, 4, 6

Arquimedes 154, 155, 156, 157, 159

Atividade remota 18

Atividades exploratórias 85, 86, 87, 91, 92, 95, 97, 98, 108, 109, 112, 116

Auto-similaridade 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

B

BNCC 1, 2, 10, 155, 157, 159, 163, 191, 192, 193, 207

C

Curso superior 57, 58

D

Desenvolvimento 5, 12, 13, 16, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 42, 43, 46, 49, 58, 60, 61, 73, 75, 85, 86, 88, 91, 92, 95, 101, 102, 106, 110, 115, 118, 120, 121, 126, 139, 142, 143, 151, 152, 153, 154, 159, 163, 164, 165, 192, 208, 209, 213, 217, 218, 221, 222, 228, 230

Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) 63, 65, 66, 67

Desigualdade de Sobolev 63, 64, 67

Desigualdade do tipo Hardy 63

Dificuldade de aprendizagem 24

E

Educação 4, 10, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 51, 55, 58, 62, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 83, 84, 86, 88, 89, 91, 92, 93, 98, 99, 100, 102, 107, 109, 111, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 125, 127, 139, 140, 141, 142, 143, 152, 154, 159, 160, 163, 171, 207, 210, 217, 218, 221, 228, 229, 230

Educação matemática 10, 12, 13, 14, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 33, 42, 43, 55, 58, 62, 81, 86, 88, 91, 92, 93, 98, 99, 100, 102, 107, 111, 117, 118, 119, 122, 127, 139, 140, 141, 142, 143, 152, 154, 159, 160, 171, 210, 218, 221, 229, 230

Ensino 1, 2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 62, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 117, 118, 120, 121, 122, 126, 141, 142, 143, 148, 151, 154, 155, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 170, 171, 192, 193, 208, 209, 210, 211, 212, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 228, 229, 230

Ensino básico 142, 151, 154, 155, 157, 159

Ensino de matemática 13, 30, 33, 57, 143, 229, 230

Ensino fundamental 10, 17, 24, 29, 79, 83, 100, 101, 103, 111, 118, 120, 160, 163, 164, 171, 192, 208, 209, 211, 212, 217, 218, 219, 220, 228, 229

Ensino superior 18, 19, 20, 22, 47, 58, 62, 91, 97, 171, 230

Estatística 5, 10, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 143, 230

Estudo orientado 18, 22

Excel 60, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 196, 198, 206

Experiência 18, 20, 22, 23, 27, 34, 35, 36, 38, 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 74, 79, 80, 101, 120, 127, 140, 167, 192, 202, 218, 219, 228

F

Física 1, 4, 10, 64, 121, 170, 171, 192, 229

Fração 208, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 218

Fractais 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

Função do 1º grau 71, 72, 73, 74, 76

Funções polinomiais 85, 86, 90, 92

G

Geometria 23, 36, 38, 62, 66, 67, 154, 156, 157, 160, 161, 165, 193, 220, 222

Grounded theory 139, 140, 141, 143, 151, 152, 153

H

Hermite 191, 192, 194, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 205, 206, 207

História da matemática 154, 155, 159

I

Imunidade coletiva 128, 129, 132, 133, 137

Inclusão 20, 21, 22, 71, 74, 75, 76, 78, 80, 81, 83, 84, 120, 121, 122, 127

Instrumento educativo 100

Instrumentos de pesquisa 139

Interdisciplinaridade 12, 13, 16, 17, 24, 25, 33

Interpolação 67, 68, 191, 192, 193, 194, 199, 206, 207

Itinerário formativo 191, 192, 193

J

Jogos 12, 13, 14, 16, 17, 30, 157, 193

M

Matemática 1, 2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 124, 126, 127, 129, 132, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 148, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 167, 170, 171, 172, 191, 192, 193, 207, 210, 218, 219, 221, 222, 228, 229, 230

Material concreto 27, 74, 100, 101, 103, 124

MATLAB 191, 192, 199, 206, 207

Metodologia de pesquisa 91, 111, 139, 153

Metodologias ativas 57, 58, 59, 61, 62

Modelos matemáticos 128, 129

N

Narrativas 119, 120, 122, 123, 124, 125, 127, 230

O

Operações 16, 27, 29, 36, 38, 85, 88, 100, 104, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 208, 209, 210, 212, 214, 217

Origami 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55

P

Papel do professor 24, 30, 32, 57, 109, 148, 217

Pesquisa educacional 139

Pesquisa qualitativa 5, 10, 41, 80, 85, 98, 109, 127, 139, 152, 171

Projeto investigativo 57, 58, 60, 61

R

Resolução de problemas 29, 46, 58, 59, 76, 103, 160, 161, 162, 163, 164, 167, 170, 171, 192, 193, 211, 217, 224

Rigidez 63, 67, 68

Robótica educacional 1, 2, 5, 10

S

Saberes experienciais 85, 87

SEIR 128, 129, 134, 135, 136, 137

Semelhança de triângulos 160, 161, 165, 167, 170, 219, 221, 224, 225, 227, 228

SIR 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138

Sistema NODET 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55

Software GeoGebra 85

Stomachion 154, 155, 156, 157, 158, 159

T

Técnicas 33, 36, 60, 76, 77, 84, 121, 139, 140, 143, 152, 156, 162, 163, 167, 207, 208, 217

Teoria das situações didáticas 111, 118, 208, 209, 210, 211

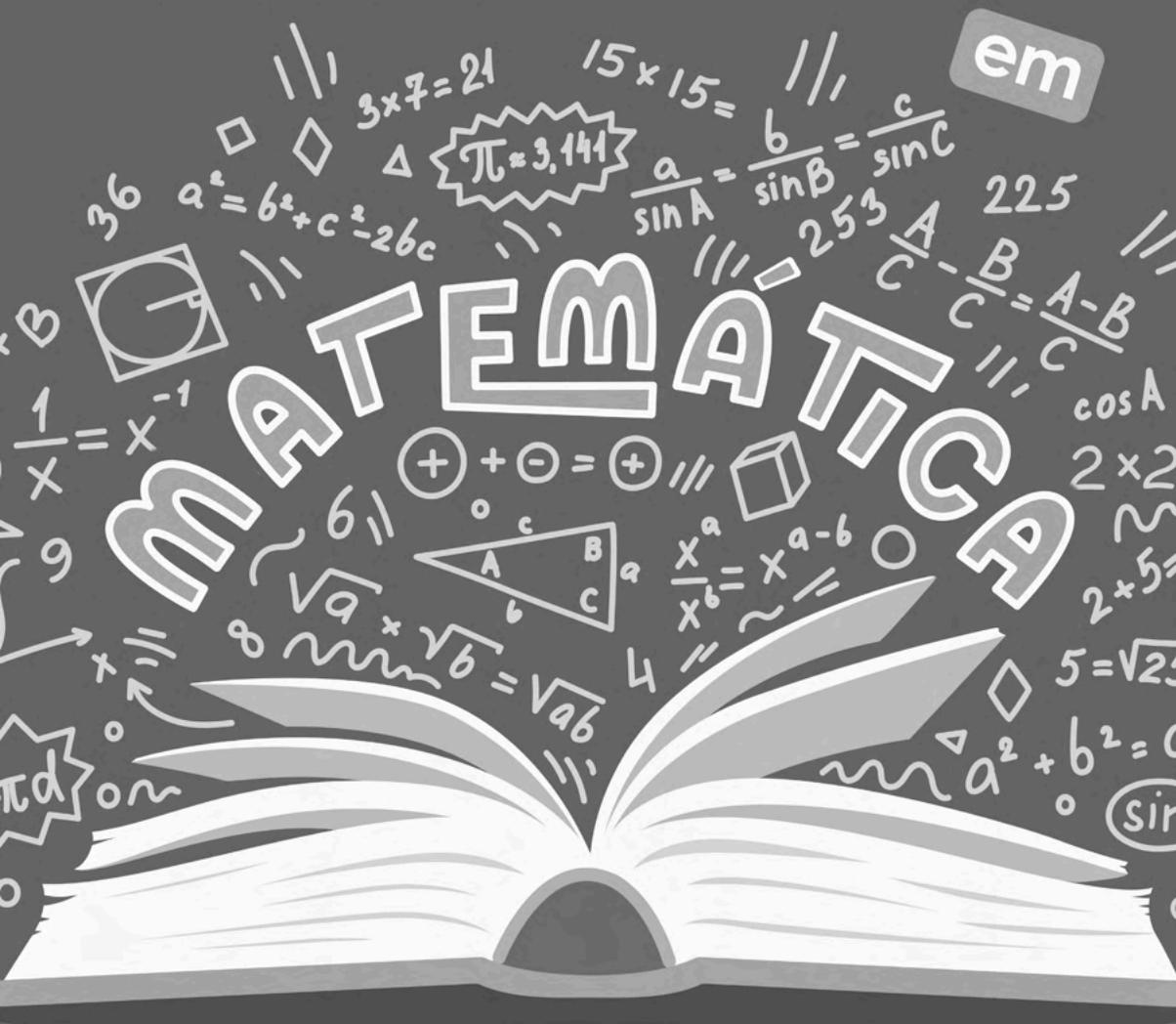
Transposição didática 71, 75, 76, 77, 78, 80, 81

V

Variedades Riemannianas 63, 64, 66, 67, 68

 www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br
 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações


Ano 2021

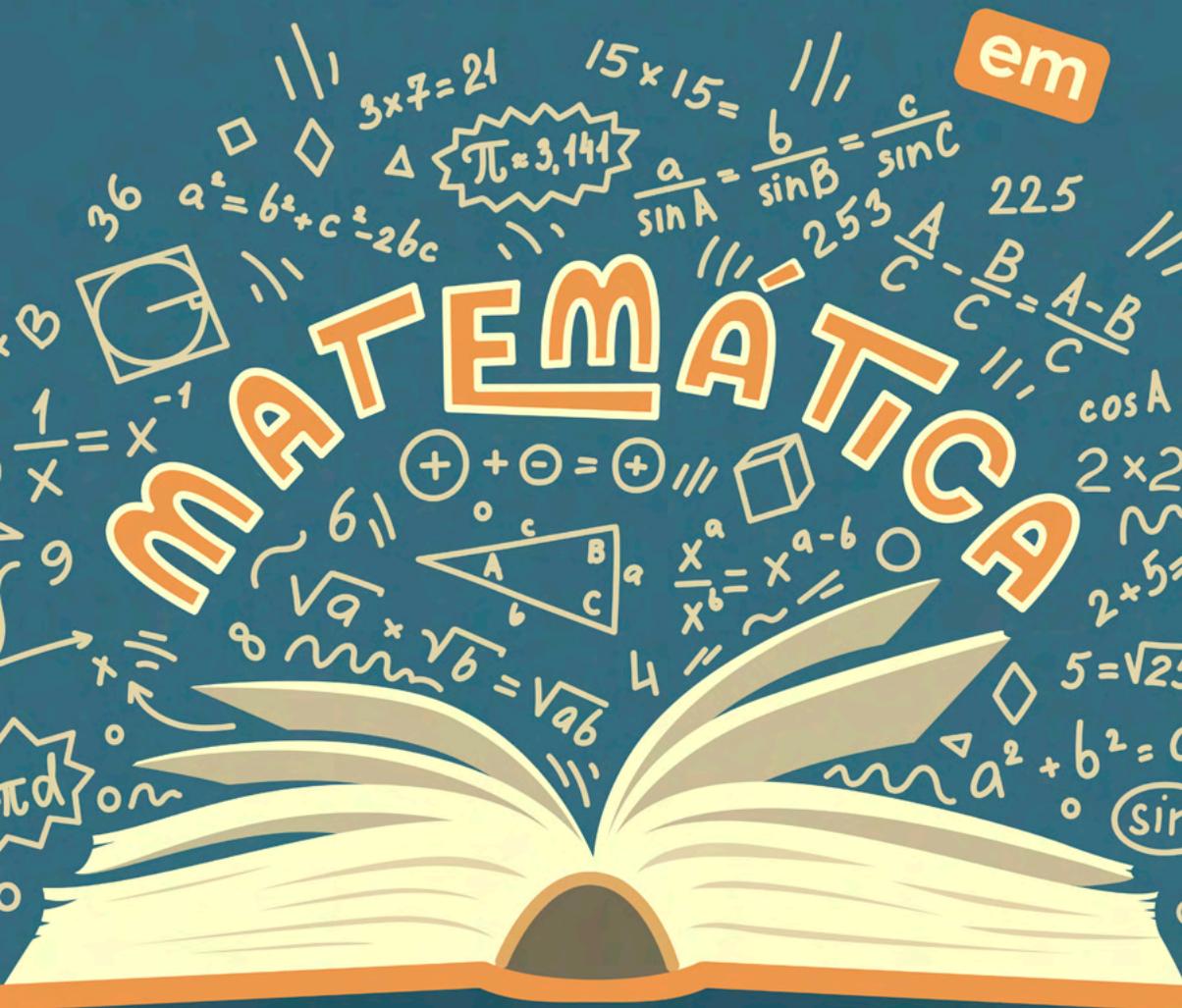
www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA



e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2021