Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

Atena Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

Atena
Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática

Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Maiara Ferreira
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-110-4
DOI 10.22533/at.ed.104212805

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentado por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam desta obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática***" nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

REFERÊNCIAS

D´AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no "novo normal". **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

O CONCEITO DE FUNÇÃO: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Data de aceite: 21/05/2021

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
http://lattes.cnpq.br/6562031070856171

RESUMO: Se estuda o **conceito de função** em um de seus aspectos mais importantes desde a perspectiva do ensino, sua **definição**. Especificamente, trata das diversas versões que aparecem no contexto da Licenciatura. Através da análise de alguns textos universitários que poderiam-se considerar na bibliografia complementar de algumas disciplinas, o estudo leva à verificação da existência de três formas principais de definição que se descrevem e comentam: função como **conjunto de pares ordenados**, função como **grafo funcional** e função como **correspondência**.
PALAVRAS-CHAVE: Relação; Correspondência; Função

THE CONCEPT OF FUNCTION: DEFINITION OF FUNCTION.

ABSTRACT: One studies the **concept of function** in one of its most important aspects from the perspective of teaching, its definition. Specifically, it deals with the various versions that appear in the context of the Degree. Through the analysis of some university texts that could be considered in the complementary bibliography of some disciplines, the study leads to the verification of the existence of three main forms of definition that are described and commented on: function as a **set of ordered pairs**, function as a **functional graph** and function as **correspondence**.
KEYWORDS: Relation; Correspondence; Function

1 I INTRODUÇÃO

Um estudo acerca do conceito de função compreenderia como questões conceituais a resolver: o ***significado do termo***, as ***formas de representar***}, as ***propriedades*** de uma função e ***quais representações garantiriam quais propriedades***. Neste artigo estudamos o ***conceito de função*** em um de seus aspectos mais importantes desde a perspectiva do ensino, sua ***definição***, é dizer intentamos resolver a primeira das questões conceituais, o significado do termo. Nosso estudo se refere especificamente, as diversas versões de definição que aparecem no contexto da Licenciatura e se realiza através da análise de textos universitários que poderíamos considerar na bibliografia complementar de algumas disciplinas. Este estudo leva à verificação da existência de três formas principais de definição que descrevemos e comentamos na seguinte distribuição temática: na secção 1, função como ***conjunto de pares ordenados***, a secção 2 trata da função como ***grafo funcional*** e, finalmente, na secção 3 se trata da função como ***correspondência***.

2 I FUNÇÃO COMO CONJUNTO DE PARES ORDENADOS:

Mac Lane, (MAC LANE, 1998), descreve algumas das ***ideias intuitivas*** das funções e da dependência funcional: ***fórmula, regra, gráfico (curva do plano), tabela de valores, dependência e sintaxe***. Logo de assinalar suas limitações, manifesta a necessidade de uma definição formalmente rigorosa do termo.

A seguinte é uma definição dada por Mac Lane:

> **Definição**. Uma função f do conjunto X no conjunto Y é um conjunto $S \subset X$ x Y de pares ordenados que para cada $x \in X$ contém exatamente um par ordenado $\langle x, y \rangle$ com o primeiro componente x. O segundo componente desse par é o valor da função f no argumento x, escrito $f(x)$. Chamamos X de domínio e Y o contradomínio da função f.
>
> (MAC LANE, 1998, p.127-129)

Mac Lane diz que f é função do conjunto X no conjunto Y se

1. f é um subconjunto S de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.
2. para cada $x \in X$, S contém exatamente um par ordenado $\langle x, y \rangle$ com o primeiro componente x, equivalentemente, para cada $x \in X$ existe exatamente um $y \in Y$ tal que S contém o par ordenado $\langle x, y \rangle$. Assim,

(a) $f \subset X \times Y$ e

(b) $\forall x \in X$: f contém exatamente um par ordenado com o primeiro componente x.

É fácil ver que a condição (b) é equivalente com:

(b)' $(\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y)$: $\langle x, y \rangle \in f$.

Observe-se também que não há menção alguma ao termo ***relação***. Claro está que isto não invalida a definição dada.

Finalmente, no parágrafo citado a seguir, o autor, declara que esta definição é formal e que de maneira plausível mantém as intenções das descrições pré-formais de uma função.

> Isso fornece uma definição formal que, de maneiras plausíveis, corresponde à intenção das várias descrições pré-formais de uma função. Especificamente, ele fornece y, dependendo de x. Se alguém imaginar uma lista de todos os pares ordenados $\langle x_1, y_1 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle$, $\langle x_3, y_3 \rangle$, … no conjunto ***S***, essa lista será apenas a tabela (geralmente infinita) de valores da função. Se alguém visualizar os conjuntos ***X*** e ***Y*** como “espaços” de algum tipo, o produto cartesiano X × Y será um “espaço” (na Figura 1 um cilindro) e a função S será um subconjunto do produto que corta a cada subespaço “vertical” $\{x\} \times Y$ em exatamente um ponto. Portanto, S é uma curva nesse espaço do produto. Em vista desses exemplos, o conjunto S de pares ordenados é frequentemente chamado de grafo1 da função - embora em nossa definição, a função seja seu grafo.
>
> (MAC LANE, 1998, p.127-129)

1 No texto original: **graph**

Examinemos agora outra definição de função dentro desta linha de apresentação:

> Se X e Y são conjuntos, o produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de modo que $x \in X\ e\ y \in Y$. Uma relação de X a Y é um subconjunto de $X \times Y$.
>
> (Se $X = Y$, falamos de uma relação em X.). Se R for uma relação de X a Y, iremos às vezes escrever xRy para significar que $(x, y) \in R$. (FOLLAND,1999, p.3)
>
> Os tipos mais importantes de relações são as seguintes: [...]
>
> **Mapeamentos**. Um mapeamento $f: X \mapsto Y$ é uma relação R de X a Y com a propriedade que para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que xRy, neste caso escrevamos $y = f(x)$. Às vezes, os mapeamentos são chamados **mapas** ou **funções**; geralmente reservamos o último nome para o caso em que Y é $\mathbb{C}$ ou algum subconjunto dele.
>
> (FOLLAND,1999, p.3)

A partir desta definição, podemos destacar que:

1. R é uma relação de $X\ a\ Y \Leftrightarrow R \subset X \times Y$ (definição)
2. $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$ (notação)
3. $f \subset X \times Y$ é uma função, $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y): (x, y) \in f$. (definição)
4. $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$ (notação)

De aqui, concluímos que as *funções* de X em Y são *relações* de X em Y e que nem toda relação de X em Y é uma função de X em Y. A expressão $f: X \mapsto Y$ é simplesmente uma notação para indicar que a relação f é uma função. A alusão a R na definição de função dada pelo autor é dispensável.

A seguir uma apresentação do conceito que, dentro desta forma de definir função, como conjunto de pares ordenados, parece ser mais coerente.

1. Pares ordenados:

Par ordenado

Sejam x e y objetos quaisquer. O par ordenado (*x, y*) é definido como o conjunto {{*x*}, {*x,y*}}. É fácil verificar a propriedade fundamental dos pares ordenados (*x,y*) = (*u,v*) se e somente se *x* =*y* e *u* = *v*. De maneira mais geral, podemos definir de forma semelhante uma n-upla ordenada $(x_1, \ldots, x_n)$ com a propriedade $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ se e somente se $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

(MADDOX, 1970 p.5)

Conforme a definição, temos:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \text{ e } (x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \mathrm{x = u \ e \ y = v}.$$

Observe-se que um par ordenado é por definição um conjunto.

2. Relação:

De posse do conceito de par ordenado, procede a definir o conceito de relação.

Relação

Uma relação ρ é definida como um conjunto de pares ordenados. Por exemplo,

$\rho = \{(1,2), (a, b)\}$ é uma relação.

Notação equivalente para $(x, y) \in \rho$ é $x\rho y$. Assim, em nosso exemplo, podemos escrever $1\rho 2$ em vez de $(1,2) \in \rho$.

(MADDOX, 1970 p.5)

Pode-se observar que o conceito de **relação** é geral e não faz alusão a outro conjunto que não seja a relação mesma.

3. Produto cartesiano de conjuntos:

Um tipo importante de relação é o

Produto cartesiano

Sejam X e Y conjuntos. Então

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \; e \; y \in Y\}$

> é chamado o produto cartesiano de X e Y.
>
> (MADDOX, 1970 p.5)

Sendo o produto cartesiano um conjunto de pares ordenados, em virtude da definição dada, é uma relação. De fato, conforme a definição dada, q*ualquer subconjunto do produto cartesiano é uma relação.*

4. Domínio e Imagem:[2]

> O domínio de uma relação é o conjunto de todas as primeiras coordenadas de seus membros. A ***imagem*** é o conjunto de todas as segundas coordenadas. (MADDOX, 1970, p.6)

Se R é uma relação, isto é, um conjunto de pares ordenados, então

$$x \in Domínio\ de\ \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{R}: z = (x, y).$$

Também

$$y \in Imagem\ de\ \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{R}: z = (x, y).$$

5. Função:

De forma análoga ao de *relação*, a definição de função é geral. Ela não faz alusão a conjunto algum a não ser ele mesmo, pois, sendo uma relação, a *função é um conjunto de pares ordenados.*

> **Função**
>
> Uma função f é definida como uma relação, de modo que se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$. Quatro outros termos para a função são mapa, mapeamento, operador e transformação.
>
> Nosso conceito de função como um determinado conjunto de pares ordenados é o que alguns chamariam de grafo[3] de uma função. pois eles definem uma função como uma \`regra' ou algo assim. Na ocasião, usaremos o termo \`grafo da função', quando isso parecer mais expressivo. No entanto, para nós, uma função e seu grafo são exatamente a mesma coisa.
>
> (MADDOX, 1970 p.6)

2 Traduzimos o termo *range* como *imagem* de uma relação.

3 No texto original **graph**.

Segundo a definição, *uma relação f é uma função se, e somente se, cumpre:*

$$(x, y) \in f \ e \ (x, z) \in f \Rightarrow y = z.$$

6. Função de X em Y:

> Se f é uma função e $(x, y) \in f$, escrevemos $y = f(x)$, que é a notação convencional para y como função de x. Dizemos que y é o valor de f em x ou que y é a imagem de x pela função f.
>
> A notação $f: X \mapsto Y$ atualmente é amplamente utilizada em matemática. É interpretado como 'f é uma função do conjunto X no conjunto Y'. O significado de $f: X \mapsto Y$ é que X é o domínio de f e que a imagem de f é um subconjunto de Y, não necessariamente todo Y.
>
> (MADDOX, 1970 p.7)

Assim, uma "*função de X em Y*" é uma "*função*" com Domínio *X* e Imagem contida em *Y*.

3 I FUNÇÃO COMO GRAFO DE UMA RELAÇÃO FUNCIONAL

Antes de iniciar a exposição desta forma de definir função, deve-se fazer algumas observações relativas ao significado dos termos usados.

Relação: Define-se *relação* R entre elementos x de um conjunto X e elementos y de um conjunto Y uma *propriedade definida no conjunto* $X \times Y$ característica de um subconjunto G de $X \times Y$. Isto enquadra-se na definição mais geral seguinte:\

Propriedade definida em um conjunto: Seja E um conjunto e A uma parte de E. Chama-se *propriedade característica* de A todo ***critério*** que permite decidir, para todo x de E, entre as duas proposições "$x \in A, x \notin A$". Assim, se p é uma propriedade característica do conjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ e $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, então a proposição *"x cumpre a propriedade p"* é verdadeira e escreve-se p(x). Logo

$$x \in A \ \Leftrightarrow p(x) \ \ e \ \ A = \{x \in E \mid p(x)\}.$$

Isto permite estabelecer o significado do termo ***grafo*** como sendo o conjunto $G \subset X \times Y$ para o qual R é uma propriedade característica. Assim, para $(x, y) \in X \times Y$, a proposição $R(x, y)$ é equivalente a $(x, y) \in G \ e \ G = \{(x, y) \in X \times Y \mid R(x, y)\}$. Como pode se ver, neste contexto, o termo grafo não tem o sentido intuitivo de ***gráfico*** como ***curva representativa*** de uma relação.

Segue a definição dada por Dieudonne:

Grafo de uma relação funcional:

4. Mapeamentos[4]

> Sejam X, Y dois conjuntos, $R(x,y)$ uma relação entre $x \in X$ e $y \in Y$; diz-se que R é ***funcional em y***, se, para cada $x \in X$, houver um e apenas um, $y \in Y$, de modo que $R(x,y)$ é verdadeiro. O grafo dessa relação é chamado de ***grafo funcional*** em $X \times Y$; esse subconjunto F de $X \times Y$ é, portanto, caracterizado pelo fato de que, para cada $x \in X$, há um e apenas um $y \in Y$ de modo que $(x,y) \in F$; esse elemento y é chamado de ***valor*** de F ***em*** x e é denotado por $F(x)$.
>
> (DIEUDONNE, 1960, p.5)

Função é um grafo funcional:

> Um grafo funcional em $X \times Y$; também é chamado de ***mapeamento*** de X em Y ou uma função ***definida em*** X, ***assumindo seus valores em*** Y. É habitual, na linguagem, falar de um mapeamento e de um grafo funcional como se fossem dois tipos diferentes de objetos em correspondência um a um, e falar, portanto, do "grafo do mapeamento", mas isso é uma mera distinção psicológica (que corresponde a se olhar para F "geometricamente" ou "analiticamente".
>
> (DIEUDONNE, 1960, p.5)

Distinção entre a função e um de seus valores:

$$F \neq F(x), F \in \mathcal{P}(X \times Y), F(x) \in Y.$$

> Em qualquer caso, é fundamental, na matemática moderna, acostumar-se a considerar um mapeamento como um objeto simples}, apenas como um ponto ou número, e fazer uma distinção clara entre o mapeamento F e qualquer um de seus valores *F* (*x*); o primeiro é um elemento de *P* (*X x Y*), o segundo elemento de Y, tem-se *F* = {(*x,y*) *є X x Y* I *y* = F (x)}. Os subconjuntos de *X x Y*, que possuem a propriedade de serem grafos funcionais, formam um subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$, é chamado de *conjunto de mapeamentos de X em Y* e escrito Y^x ou $\mathcal{F}$ (*X.Y*).
>
> (DIEUDONNE, 1960, p.5)

Nesta definição podemos destacar os seguintes aspectos:

1. Dada uma *relação* R entre $x \in X$ e $y \in Y$.

$$R \text{ é } funcional\ em\ y \Leftrightarrow (\forall x \in X) : (\exists!\, y \in Y) : R(x,y).$$

4 Na versão traduzida ao espanhol: *Aplicações*. (DIEUDONNE, 1966, p.15).

.

2. Seja $F = \{(x,y) \in X \times Y : R(x,y)\} \subset X \times Y$. F se diz *grafo funcional em X* x*Y*, é chamado também *aplicação de X em Y* ou *função definida em X tomando valores em Y.*

3. F é um subconjunto de X × Y caracterizado por

$$(\forall x \in X) : (\exists!\, y \in Y) : (x,y) \in F$$

$R(x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in F \Leftrightarrow y = F(x)$, y é chamado o valor de F em x.

Assim, segundo Dieudonne:

uma função F é o grafo de uma relação R ***entre*** $x \in \mathbf{X}$ **e** $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ ***funcional em y***.

Pode-se determinar uma função pela construção dos valares funcionais:

> Se, para cada $x \in X$, construímos um objeto $T(x)$ que é um elemento de Y, a relação $y = T(x)$ é funcional em y; o mapeamento correspondente é escrito $x \mapsto T(x)$. Esta é, obviamente, a definição usual de um mapeamento; ele coincide essencialmente com o dado acima, pois se F é um gráfico funcional, é o mapeamento x ↦ F(x).
>
> (DIEUDONNE, 1960, p.6)

Sendo a função um conjunto, pode-se enunciar a igualdade de funções pela igualdade dos valores que assumem para cada valor do argumento.

> Da definição de igualdade de conjuntos (1.1) segue que a relação *F* = *G* entre dois mapeamentos de X em Y é equivalente à relação "*F* (x) = *G* (x), para todo $x \in X$".
>
> (DIEUDONNE, 1960, p.6)

Observe-se que, segundo a definição dada por Dieudonne, uma função é também um conjunto de pares ordenados. Porém o enfoque é diferente.

4 I FUNÇÃO COMO CORRESPONDÊNCIA

Um dos livros de uso frequente nos cursos de graduação é o da coleção Schaum {\it Teoria de conjuntos e Temas Afins}. Nele encontramos a seguinte definição de função:

> Se a cada elemento de um conjunto A, de alguma forma, se faz corresponder um elemento único de um conjunto B, diz-se que essa correspondência é uma *função*. Denotando essa correspondência por f, escrevemos

$$f: A \longmapsto B$$

que se lê “f é uma função de A em B”. O conjunto A é chamado ***domínio de definição*** da função f, e B é chamado ***codomínio*** de f. Por outro lado, se a ∈ A, o elemento de B que corresponde à a é chamado de imagem de a e é indicado por

$$f(a)$$

que lê “f de a”.

(LIPSCHUTZ, 1972)

Pode-se observar nesta definição a presença do termo *correspondência*. O autor afirma que **essa correspondência é uma função**. Assim, *uma função é uma correspondência*. O termo **correspondência** que define o objeto não é previamente definido. Isto, deixa a definição dada na informalidade.

A seguinte é uma definição de correspondência que faz uso do termo ``comparação”. Estabelece a formação do conceito a partir de um processo de comparação dos elementos de um conjunto com os elementos de outro conjunto.

1-4 CORRESPONDÊNCIAS

a) Definição de correspondência.

Vamos examinar dois conjuntos X e Y. Os elementos desses conjuntos podem ser comparados entre si de alguma maneira, formando pares (x,y). Se o método dessa comparação for determinado, para cada elemento $x \in X$ o elemento $y \in Y$ com o qual o elemento x é comparado é indicado, diz-se que entre os conjuntos X e Y a correspondência foi estabelecida, portanto, não é absolutamente necessário que todos os elementos dos conjuntos X e Y participem da comparação.

(KORSHUNOV, 1976, p.44)

Aqui se descreve o processo de como se estabelece uma correspondência, mas ainda não diz o que é uma correspondência.

Para representar uma correspondência, é necessário destacar:

1. o conjunto X cujos elementos são comparados com os elementos do outro conjunto;

2. o conjunto Y cujos elementos são comparados com os do primeiro conjunto;

3. o conjunto $Q \subset X \times Y$ que define a lei de acordo com a qual a correspondência é aplicada, ou seja, que lista todos os pares (x, y) que participam da comparação. Assim, o mapeamento designado por q representa a tríade de conjuntos

$$q = (X, Y, Q) \qquad (1\text{-}49)$$

em que $Q \subset X \times Y$. Nesta expressão, o primeiro componente X é chamado de domínio de partida da correspondência, o segundo componente Y, o domínio de chegada da correspondência e o terceiro componente Q é o grafo[5] da correspondência.

(KORSHUNOV, 1976, p.45)

Segue sem definir correspondência e assinala que *para representar uma correspondência* é necessário destacar três conjuntos. Assim, se procede a representar um objeto ainda não definido. Diz-se, que *a correspondência* q *representa-se pela tríade* (X,Y,Q). Talvez deveria se dizer que *a correspondência q é a tríade* (X, Y, Q) definindo assim o termo correspondência.

Anuncia que o termo grafo será explicado ao estudar um tipo particular de correspondência, a função.

O termo "grafo" será explicado em mais detalhes ao estudar o tipo específico de correspondência chamado função

Assim, uma *função* é uma *correspondência*. Assinala que existem outros dois conjuntos indissoluvelmente ligados com a correspondência. Define logo o *domínio de definição*, Pr_1Q, e o *domínio de valores*, Pr_2Q, da correspondência.

Além dos três conjuntos examinados X, Y, Q, os dois conjuntos a seguir também estão inseparavelmente relacionados a cada correspondência: o conjunto Pr_1Q denominado domínio de definição de correspondência, formado pelos elementos do conjunto X que entram em comparação e o conjunto Pr_2Q chamado o domínio de valores da correspondência, composto pelos elementos do conjunto Y que são comparados.

(KORSHUNOV, 1976, p.45)

As definições dadas podem-se exprimir da forma seguinte:

$$x \in Pr_1 \Leftrightarrow (\exists z \in Q): z = (x, y)$$

$$y \in Pr_2 \Leftrightarrow (\exists z \in Q): z = (x, y)$$

5 No texto traduzido ao espanhol: **gráfica**.

A seguir se define *reflexo* como uma *correspondência* e, a sua vez, *função*, como um *reflexo*.

1-5 REFLEXOS E FUNÇÕES

a) Reflexos e suas propriedades

Seja X e Y conjunto, sendo $\Gamma \subset X \times Y \ e \ Pr_1 = X$. A tríade dos conjuntos (X, Y, Γ) define uma certa correspondência que possui a propriedade de que seu domínio de definição $Pr_1 \Gamma$ coincide com o conjunto de partida, ou seja, com X e, portanto, essa correspondência é definida em todas as partes em X. Em outras palavras, para cada $x \in X$ existe um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Gamma$. Essa correspondência definida em todo lugar é chamada ***reflexo*** de X em Y e é expressa por

$$\Gamma: X \longmapsto Y$$

(KORSHUNOV, 1976, p.47)

Segundo a definição um *reflexo* é uma *correspondência* cujo domínio de definição é todo o conjunto de partida. A seguir a definição de *função*:

c) Função, funcional e operador

Vamos examinar um certo reflexo

$$f: X \longmapsto Y \qquad (1\text{-}72)$$

Esse reflexo é chamado ***função*** se for unívoco, ou seja, para qualquer par $(x_1, y_1) \in f \ e \ (x_2, y_2) \in f$ de $x_1 = x_2$ de , segue-se que $y_1 = y_2$.

(KORSHUNOV, 1976, p.51)

Conforme isto, uma *função* é um *reflexo unívoco*. Assim, uma ***função*** é uma ***correspondência unívoca cujo conjunto de definição é o conjunto de partida***.

$$(X, Y, f) \text{ é } uma\ função \Leftrightarrow (i)\ Pr_1 f = X\ e\ (ii)\ [(x, y_1) \in f\ e\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$$

Esta ausência de uma definição previa de *correspondência*, que achamos ao inicio, também é preenchida por Queysanne:

10. Correspondência entre elementos de um conjunto A e elementos de um conjunto B.

a) Seja R uma relação entre x elemento de A e y elemento de B, seja G seu grafo; chama-se *correspondência* entre A y B o *tripleto* (A, B, G). A é o *conjunto de saída*, B o *conjunto de chegada*, G é o *grafo da correspondência.*

(QUEYSANNE, 1964, p.29)

De pose da definição de *correspondência*, Queysanne, passa a caracterizar uma função como sendo uma correspondência enunciando a seguinte definição de *correspondência funcional*:

c) Uma correspondência (A, B, G) é *funcional* em y se, qualquer que seja x de A lhe corresponde um elemento y de B e somente um pela correspondência.

(QUEYSANNE, 1968, p.30)

Finalmente, a definição de função:

Noção de aplicação (ou função)

Dados dois conjuntos A e B, uma **aplicação** f de A em B é uma correspondência entre um elemento de A e um elemento de B, funcional para este elemento de B.

(QUEYSANNE, 1964, p.31)

Desta maneira, ***função é uma correspondência funcional***. A seguir se dá uma explicação mais extensa da definição dada:

Em outras palavras:

Qualquer que seja x elemento de A, a aplicação f faz corresponder a x *um único elemento* y de B. Dizemos que f *aplica* A em B ou f é uma *aplicação* de A em B.

(QUEYSANNE, 1964, p.31)

Agora um pouco de notação e nomenclatura:

A palavra *função* é sinônimo da palavra aplicação; dizemos que a função f é definida em A e toma seus valores em B.

A é o conjunto de saída ou o conjunto de definição de f, B o conjunto de chegada de f.

Queysanne comenta o costume do uso do termo função para referir-se a aquelas que possuem valores numéricos.

> 1, É habitual usar a palavra "função" especialmente quando o conjunto de chegada é um conjunto de "números", ou seja, uma parte de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mas esta regra não é absoluta.
>
> (QUEYSANNE, 1964, p.31)

Define logo o *argumento* e o *valor* da função:

> O elemento arbitrário x de A é a ***variável*** ou ***argumento*** da função. O elemento único y de B que corresponde a x é denotado como f(x); é o ***valor*** da função em x ou a ***imagem*** de x por f se lê "f de x".
>
> (QUEYSANNE, 1964, p.31)

Deve-se lembrar o que é o *grafo* da função:

> O grafo da aplicação ou função f é a parte de A × B definida por:
>
> $$G = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$
>
> **Notações**. Escrevemos:
>
> $$f : A \mapsto B \ \ ou\ A \overset{f}{\mapsto} B$$
>
> que lemos: "f aplica A em B". Também escrevemos:
>
> $$(\forall x \in A) : [x \mapsto f(x) \in B]$$
>
> ou mais simplesmente:
>
> $$x \mapsto f(x)$$
>
> quando nenhuma confusão deve ser temida; lemos "x dá f(x) por f" ou "x tem imagem f(x) por f" ou "f envia x a f(x)".
>
> Em vez de f(x), escrevemos em alguns casos fx que lemos "f subíndice x"; [···].
>
> (QUEYSANNE, 1964, p.31-32)

O seguinte parágrafo ressalta o fato de que uma função f de A em B, sendo uma correspondência, é um tripleto (A, B, G), isto é, f = (A, B, G). Isto permite estabelecer a igualdade de funções e, consequentemente, determinar quando duas funções são diferentes:

Uma aplicação é, portanto, uma terna ordenada! $f = (A, B, G)$, duas aplicações $f = (A, B, G)$ e $g = (A', B', G')$ são, portanto, iguais se e somente se:

$$A = A', B = B', G = G'$$

isto é, se eles tiverem o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada e se:

$$(\forall x \in A): \; f(x) = g(x)$$

então escrevemos: $f = g$.

(QUEYSANNE, 1964, p.32)

Assim, por exemplo, as funções

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = sen\, x \;\; e \; g: \mathbb{R} \mapsto [-1,1]; \; g(x) = sen\, x,$$

são funções diferentes.

Elas não serão iguais ($f \neq g$) se pelo menos uma dessas condições não for atendida.

Em particular, se $A = A'$ e $B = B', f \neq g$ é equivalente a:

$$(\exists x \in A): f(x) \neq g(x).$$

O conjunto de todos as aplicações de A em B é um novo conjunto denotado $\mathcal{F}$ (*A*,*B*),

(QUEYSANNE, 1964, p.32)

A seguinte observação adverte acerca de um frequente abuso de linguagem que é fonte de múltiplos erros.

OBSERVAÇÃO. Se nenhuma confusão deve ser temida, podemos dizer “a aplicação (ou função) f: x ↦ f(x)”; por outro lado, a expressão “seja a função f(x)” é um **grave abuso de linguagem**, de fato:

$$f(x) \in B \;\; e \;\; f \in \mathcal{F}(A, B).$$

Esta confusão entre o valor de uma função em x e a função f infelizmente é muito frequente, é a fonte de muitos erros.

Portanto, não devemos dizer a “função $\cos x$”, mas:

- a função $x \mapsto \cos x$

- ou a função cosseno.

(QUEYSANNE, 1964, p.32)

Finalmente, todo o anterior se resume na seguinte definição:

4. Funções

Definição 9.- Dizemos que um grafo F é um grafo funcional, se, para todos os x, houver no máximo um objeto correspondente a x por F (I, p. 40). Dizemos que uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se o grafo F for um grafo funcional e, se o conjunto de partida A for igual ao conjunto de definição .

(BOURBAKI, 1970, E II 13, § 3 no 5.)

Assim,

$$f = (F, A, B) \text{ é } uma\ função \iff (i)\ F \text{ é } um\ grafo\ funcional\ e\ (ii)\ Pr_1 F = A$$

Em outras palavras, uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se, para todos os x pertencentes ao conjunto de partida A de f, a relação $(x, y) \in F$ é funcional em y (I, p. 41);

(BOURBAKI, 1970, E II 13, § 3 no 5.)

Assim, se $f = (F, A, B)$ é uma correspondência,

$$f = (F, A, B) \text{ é } uma\ função \iff (\forall x \in A) \colon (x, y) \in F \text{ é } funcional\ em\ y$$

equivalentemente,

$$f = (F, A, B) \text{ é } uma\ função \iff (\forall x \in A)(\exists!\, y \in B) \colon (x, y) \in F$$

o objeto único correspondente a x por f é chamado de valor de f para o elemento x de A e é designado por $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$ ou F_x.

(BOURBAKI, 1970, E II 13, §3 no 5.)

Um dos autores mais prestigiosos e recomendados no ensino superior de matemática, é sem duvida alguma, o Professor Elon Lages Lima, registremos a definição de função dada em um de seus livros:

§ 3 Funções

Uma função $f: A \mapsto B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o ***domínio*** da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o ***contradomínio*** da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).

Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$. [···]

O gráfico de uma função $f: A \mapsto B$ é [···]:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

(LIMA, 2004, pp.13-14).

A definição dada acima, não diz o que é uma função, mas fala que tem três partes, podemos supor que se trata de uma terna ordenada. Agora, se a regra faz ***corresponder*** de modo bem determinado a cada elemento de A o elemento de B, ela determina o subconjunto G(f) de A× B que menciona pouco depois. Assim, podemos inferir que de forma implícita trata-se da correspondência $(A, B, G(f))$. Isto coloca a definição na corrente "bourbakiana" do conceito.

Nesta linha, temos também a definição dada pelo prestigioso Professor Luiz Adauto Medeiros,

Define-se (conforme Dirichlet (1887)) como função $f: X \longmapsto Y$, um objeto constituído por dois conjuntos - X o domínio da função, Y o conjunto contradomínio da função - e uma regra geral que a cada $x \in X$ associa um único $y \in Y$. Denota-se uma função f por

$$f: X \longmapsto Y; y = f(x) \; ou \; x \longmapsto f(x)$$

(MEDEIROS, 2005, p.18)

REFERÊNCIAS

BOURBAKI, N. **Eléments de Mathématique Livre I Théorie des Ensembles Fascicule de Résultants**. Hermann : Paris, 1958.

BOURBAKI, N. **Eléments de Mathématique Livre I Théorie des Ensembles**. DIFUSSION C.C.L.S: Paris, 1970.

DIEUDONNE, J. **Fundamentos de Análisis Moderno**. Reverté : España, 1966.

DIEUDONNE, J. **Foundation of Modern Analysis**. Academic Press: New York and London, 1960.

FOLLAND, G. **Real Analysis**. 2ª edição. John Wiley & Sons, Inc.: USA, 1999.

KORSHUNOV, M. **Fundamentos Matemáticos de la Cibernética**. Editorial MIR: Moscú, 1976.

LIMA, E. L. **Curso de análise** v.1. 11 ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides): Rio de Janeiro, 2004.

LIPSCHUTZ, Seymour, **Teoria dos Conjuntos**, Coleção Schawn, Editora McGraw-Hill: São Paulo, 1972.

MAC LANE, S. **Mathematics Form and Function**}. Springer-Verlag New York Inc: USA, 1986.

MADDOX, I. J. **Elements of functional analysis**. Cambridge University Press: New York, 1970.

MEDEIROS, L. A. et all, **Lições de Análise Matemática**. Universidade Federal de Rio de Janeiro, Instituto de Matemática: Rio de Janeiro, 2005.

QUEYSANNE, M. **Algèbre**. Collection U, Série Mathématiques dirigée par André Revuz. Armand Colin: Paris, 1964.

QUEYSANNE, M. **Álgebra Básica**. Primera Edición. Vicens Vives: Barcelona, 1971.

ÍNDICE REMISSIVO

G

I

J

M

P

Q

R

S

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

Atena
Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática

Atena Editora
Ano 2021