Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-856-4
DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .... **1**

O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

Celina Amélia da Silva
Carmen Teresa Kaiber

DOI 10.22533/at.ed.5642108031

CAPÍTULO 2 .... **12**

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS

Adan Rodrigo Vale Pacheco
Fábio Barros Gonçalves
Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.5642108032

CAPÍTULO 3 .... **25**

PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM

Wharton Martins de Lima
Davis Rytle Lira Martins
Jamilson Pinto de Medeiros
João Pedro Nogueira da Silva
Sérgio Barbosa da Penha
William Gomes dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.5642108033

CAPÍTULO 4 .... **35**

AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Francisca Missilene Muniz Magalhães
Pedro Franco de Sá

DOI 10.22533/at.ed.5642108034

CAPÍTULO 5 .... **44**

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Daniel Martins Nunes
Fábio Mendes Ramos

DOI 10.22533/at.ed.5642108035

CAPÍTULO 6 .... **59**

DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7° ANO

Emilim Caroline Canabarro
Lucieli Martins Gonçalves Descovi

DOI 10.22533/at.ed.5642108036

CAPÍTULO 7 .... **71**

DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES

Beatriz Nascimento Gomes

Altemir da Silva Braga

DOI 10.22533/at.ed.5642108037

CAPÍTULO 8 .... **80**

RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS

Helena Dória Lucas de Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.5642108038

CAPÍTULO 9 .... **91**

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS

Dayson Wesley Lima Castro

Arilson da Conceição Rocha

Natanael Freitas Cabral

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.5642108039

CAPÍTULO 10 .... **104**

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA

Giovanni Santos

Mairon Carliel Pontarolo

Sebastião Romero Franco

DOI 10.22533/at.ed.56421080310

CAPÍTULO 11 .... **109**

CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS

Ana Emilia de Melo Queiroz

DOI 10.22533/at.ed.56421080311

CAPÍTULO 12 .... **118**

UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

José Roberto Costa

Vanessa Tluscik dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.56421080312

CAPÍTULO 13 .... **130**

A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGIGA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL

Catiex Rodrigues de Souza

Adelmo Carvalho da Silva

DOI 10.22533/at.ed.56421080313

CAPÍTULO 14 143

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Wanderlei Verissimo

Thiago Fanelli Ferraiol

DOI 10.22533/at.ed.56421080314

CAPÍTULO 15 156

DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA

Gustavo Pereira Gomes

Bianca Menezes Campos

DOI 10.22533/at.ed.56421080315

CAPÍTULO 16 164

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA

Elivane Leandro da Silva

Lucianne Oliveira Monteiro Andrade

Marcelo de Sousa Coêlho

DOI 10.22533/at.ed.56421080316

CAPÍTULO 17 187

ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE

Cristiane Martins Fernandes Tavares

Edson Leite Araújo

DOI 10.22533/at.ed.56421080317

CAPÍTULO 18 205

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA

Eliana Alves Arxer

Dulcimeire Aparecida Volante Zanon

DOI 10.22533/at.ed.56421080318

CAPÍTULO 19 214

UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR

Adriana Stefanello Somavilla

Luani Griggio Langwinski

Leonardo Silguero Pimentel

DOI 10.22533/at.ed.56421080319

CAPÍTULO 20 225

CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Adriana de Jesus Gabilão

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra
Renata Forti Braga
DOI 10.22533/at.ed.56421080320

CAPÍTULO 21 228

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM *SOLVER* LINHA
Mairon Carliel Pontarolo
Giovanni Santos
Sebastião Romero Franco
DOI 10.22533/at.ed.56421080321

CAPÍTULO 22 233

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS
Vilma Luísa Siegloch Barros
DOI 10.22533/at.ed.56421080322

CAPÍTULO 23 241

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER
Henry Otavio Fontana
Thiago Gilberto do Prado
Vinícius Piccirillo
DOI 10.22533/at.ed.56421080323

CAPÍTULO 24 254

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL
Fernando Santos Silva
Ana Paula Perovano
DOI 10.22533/at.ed.56421080324

CAPÍTULO 25 266

DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS
Thiago Schinda Bubniak
Inácio Andruski Guimarães
Sonia Maria de Freitas
DOI 10.22533/at.ed.56421080325

CAPÍTULO 26 273

COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION
Rejane de Barros Araújo
Antonio Augusto Rodrigues Coelho
DOI 10.22533/at.ed.56421080326

SOBRE OS ORGANIZADORES 282

ÍNDICE REMISSIVO.. 283

CAPÍTULO 5

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Data de aceite: 17/02/2021

Daniel Martins Nunes
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

Fábio Mendes Ramos
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

RESUMO: Este estudo discute a utilização do software GeoGebra no ensino de Matemática, especificamente em temas discutidos em disciplinas como Métodos Numéricos. Dessa forma, apresentamos alguns comandos e processos que podem ser utilizados durante o ensino de Aproximação de Raízes pelos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secantes. Além disso, divulgamos um aplicativo construído com o auxílio do GeoGebra que permite a interação do usuário, obtendo respostas precisas para os problemas de cálculo numérico em poucas etapas. De modo geral, observamos que o GeoGebra é uma ferramenta importante para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina, pois permite observar o comportamento de funções transcendentais e que as aproximações geradas por ele são precisas assim como as que são determinadas por outros softwares utilizados na área.

PALAVRAS - CHAVE: GeoGebra, Métodos Numéricos, Aproximação de Raízes.

USING GEOGEBRA TO DETERMINE APPROXIMATIONS FOR EQUATION ROOTS THROUGH NUMERICAL METHODS

ABSTRACT: This study discusses the use of GeoGebra software in the teaching of Mathematics, specifically on topics discussed in disciplines such as Numerical Methods. In this way, we present some commands and processes that can be used during the teaching of Root Approach by the methods of Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson and Secantes. In addition, we disclose an application built with the help of GeoGebra that allows user interaction, obtaining precise answers to numerical calculation problems in a few steps. In general, we observed that GeoGebra is an important tool for the teaching-learning process of the discipline, as it allows observing the behavior of transcendental functions and that the approximations generated by it are accurate as well as those determined by other software used in area.

KEYWORDS: GeoGebra, Numerical Methods, Root Approximation.

INTRODUÇÃO

Durante o ensino fundamental e médio é comum a abordagem de resolução de equações que nos conduzem a determinação de suas soluções por meio de fórmulas diretas, tais como, as equações quadráticas que emprega a fórmula de Bháskara. Algumas dessas equações não apresentam uma solução exata, como por exemplo a equação 1 a seguir:

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (Equação\ 1)$$

Cujas raízes poderiam ser dadas pelos valores: $x = 1 \pm \sqrt{6}$, ou, aproximadamente, $x' = 3{,}44948974278$ e $x'' = -1{,}4494897427$. Entretanto, estas equações quadráticas, exponenciais, logarítmicas, dentre outras, comumente ensinadas durante esta etapa do ensino,são, por vezes, facilmente determinadas por meio da utilização de procedimentos algébricos específicos e que podem resultar em valores exatos ou aproximados como apresentamos anteriormente.

No ensino superior a situação muda, pois geralmente nos cursos daárea de exatas estabelecem situações em que estes métodos não podem ser empregados para determinar as soluções das equaçõesobtidas por meio de modelagem matemática. Por exemplo, adotando para o modelo de crescimento populacional de uma certa região a função a seguir:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t} + \frac{v}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)^{1} \qquad (Equação\ 2)$$

Em que $N(t)$ denota o número de habitantes no instante t, N_0 o número de habitantes no momento inicial, v a taxa de imigração suposta constante e a taxa de natalidade. Agora, supondo que uma população tenha inicialmente 1000 000 de indivíduos, que 435 000 imigrem para a comunidade no primeiro ano, e que 1 564 000 indivíduos estejam presentes após decorrido um ano, para determinar a taxa de natalidade dessa população devemos resolver a equação a seguir em função de a :

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000 e^{\alpha} + \frac{435\,000}{\alpha}(e^{\alpha} - 1) \qquad (Equação\ 3)$$

Dessa forma, os métodos algébricos que costumávamos utilizar não são suficientes para resolver situações como esta. Em detrimento a esta impossibilidade, foram desenvolvidos métodos numéricos para determinar a solução de equações como apresentada anteriormente.

Os métodos numéricos empregados como o de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes são metodologias diferentes, mas que utilizam o mesmo princípio, a iteração (ou repetição) do processo de determinar aproximações para as raízes de equações.

Chamamos de iteração o processo que envolve o uso de fórmulas repetidas vezes até que o resultado obtido atinja uma precisão previamente estabelecida. Assim, a cada etapa realizada a solução de uma equação aproxima-se cada vez mais do valor real. O fato de estabelecer uma precisão no início do processo deve-se à necessidade de encerrá-lo,

1 Burden e Faires (2015) adaptado.

uma vez que a iteração gera uma sequência de cálculos e valores que podem ser infinitos e cada vez mais precisos.

É muito comum a utilização de softwares numéricos para determinar uma aproximação para estas soluções, tais como, o *Matlab* e nas suas versões livre *Scilab* e *Octave*. Ambos trazem a possibilidade de usar um encadeamento de comandos repetitivos ou de construção de um algoritmo para, através da iteração, obter uma boa aproximação da solução. Além disso, podemos utilizar os editores de planilhas eletrônicas, tais como o *Excel* ou *Calc*, para construir tabelas que contenham os cálculos determinados pelos métodos supracitados, que apesar de tornar o processo rudimentar, em comparação com os programas anteriores, possibilita o aluno entender os mecanismos envolvidos em cada processo.

Embora já tenhamos disponíveis estes recursos, que funcionam muito bem, os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática provavelmente terão maior contato com algum software educacional como, por exemplo, o GeoGebra que é amplamente divulgado no Brasil e muito abordado em pesquisas (livros, artigos, dissertações, teses, vídeos). Algumas publicações, tais como, Bezerra e Ramos (2020); Junior e Abbeg (2016); Boruch e Scaldelai (2016); Guimarães e Miranda (2010), para citar algumas, demonstram a abordagem do GeoGebra para estudo dos métodos numéricos.

O referido software é gratuito e foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, tem como premissa articular em um mesmo ambiente, através de suas várias janelas, as representações simbólicas, gráficas e geométricas de um objeto. Dessa forma, o usuário pode interagir e observar as transformações na tela percebendo relações matemáticas existentes.

O GeoGebra é comumente utilizado para se discutir ou construir representações de funções ou de objetos geométricos (2D ou 3D) criando objetos dinâmicos e interativos, mas será que é possível usá-lo no processo de ensino e aprendizagem dos métodos numéricos discutidos anteriormente?

O objetivo desta pesquisa é apresentar algumas possibilidades para tal uso e divulgar uma ferramenta construída por um dos autores. Além disso, gostaríamos de sensibilizar os profissionais que atuam nos cursos de formação de professores a considerarem utilizar o GeoGebra em detrimento de outros softwares.

JANELA DE VISUALIZAÇÃO E COMANDOS

O GeoGebra não possui comandos específicos para determinar as raízes de uma equação utilizando especificamente os métodos mencionados anteriormente. Entretanto, há alguns recursos que podem ser utilizados e que trazem uma ótima precisão para o estudo das raízes destas equações.

Primeiramente, pontuamos que a possibilidade de observar o comportamento gráfico das funções associadas às equações é possível de ser realizado no programa. Assim, será possível estabelecer um intervalo inicial que atenda ao Teorema de Bolzano[2], ou um valor próximo a raiz para usar nos processos iterativos.

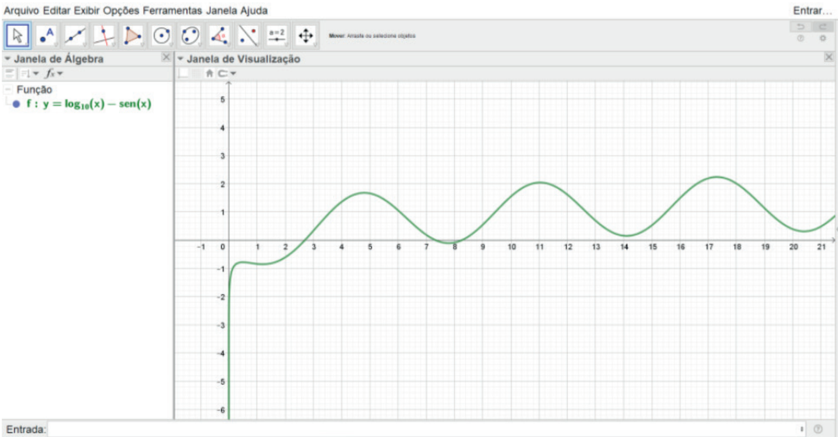

Figura 1:Representação gráfica da função $f(x) = log(x) - sen(x)$ no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Geralmente para determinar tais raízes pelo Teorema de Bolzano os acadêmicos são instruídos a construir uma tabela contendo valores e determinar as suas imagens. Assim, ao verificar a mudança de sinal dentro de um intervalo eles constatam que há ao menos uma raiz naquela região[3]. Entretanto, para uma situação como a apresentada na Figura 1, o aluno poderia observar o comportamento do gráfico para valores extremamente grandes e constatar a sua periodicidade, além de verificar que há apenas estas três raízes para a equação $\log(x) = \text{sen}(x)$.

Além disso, o acadêmico pode utilizar o programa para verificar se os seus resultados determinados durante a aplicação dos métodos iterativos estão condizentes com o auxílio do GeoGebra. Basta utilizar o comando $Raiz(< Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >)$ que pode ser digitado diretamente na Barra de Entrada.

A Figura 2 a seguir apresenta as aproximações para as três raízes da função a partir da utilização do comando anterior:

2 Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é uma função contínua tal que $f(a).f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

3 Para garantir que a raiz é única no intervalo dado utilizar a seguinte proposição: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $f(a).f(b) < 0$ e $f'(x) > 0$ (ou $=f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$, então existe um único $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

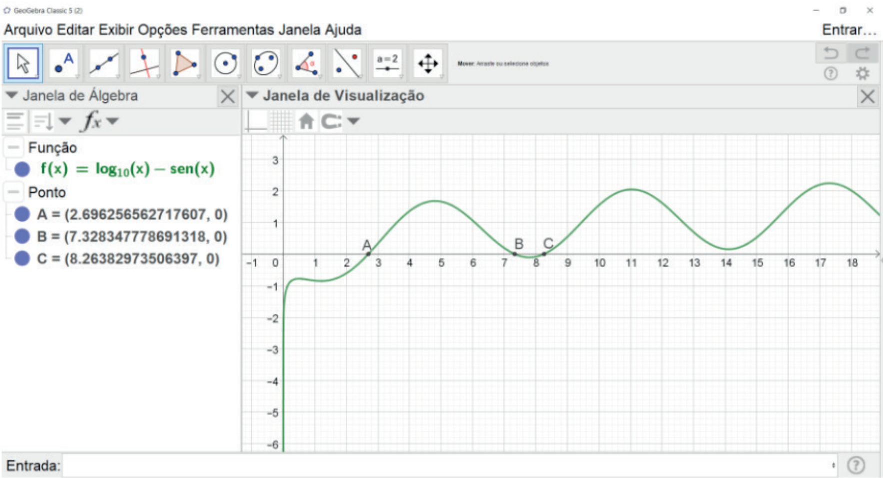

Figura 2: Raízes da função obtida com o GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Este comando apresenta uma melhor aproximação para as raízes e apresentará algumas diferenças em suas últimas casas decimais de acordo com o intervalo adotado. Poderíamos ainda usar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, localizado na Barra de Ferramentas, mas com a sua utilização a raiz não é determinada com uma precisão igual ao que foi realizado no método anterior. Observe a diferença entre as coordenadas dos pontos A e D na Figura 3 a seguir que representam a mesma raiz:

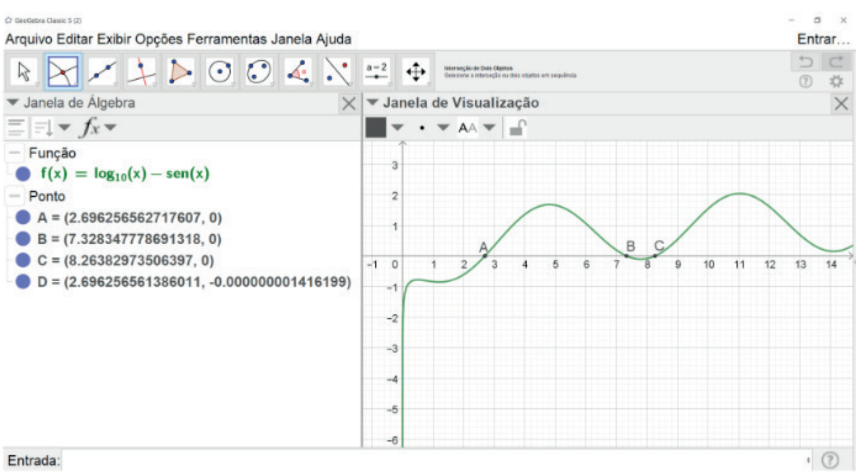

Figura 3: Raízes da função obtida por métodos diferentes.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

PLANILHAS DINÂMICAS

As diversas janelas e funcionalidades do GeoGebra não se esgotam apenas na construção de figuras geométricas planas ou espaciais, ou de funções. O programa ainda possui a opção de trabalhar com planilhas eletrônicas que pode dinamizar o trabalho de determinar as raízes de uma equação, assim como nos editores de planilhas disponíveis no mercado como, por exemplo, Excel, Calc, dentre outros.

Entretanto, a integração da planilha com os outros recursos disponíveis no GeoGebra torna-a uma ferramenta poderosa em detrimento a estes outros editores. Por exemplo, utilizaremos ainda a equação $\log(x) = \sin(x)$ dos exemplos anteriores para ilustrar esta aplicação. Além disso, usaremos o método de Bisseção para determinar o valor das raízes desta equação.

O método de Bisseção consiste em determinar a raiz de uma função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(a).f(b) < 0$ (existência garantida pelo Teorema de Bolzano). Para determinar a primeira aproximação tomamos o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$x^{(0)} = \frac{(a+b)}{2}$$

Pode ocorrer que $f\left(x^{(0)}\right) = 0$, desta forma, o zero de $f(x)$ é $x^{(0)}$, mas caso não seja devemos continuar o processo refinando cada vez mais esse intervalolevando em consideração o Teorema de Bolzano a cada nova iteração, ou seja, devemos garantir que cada novo intervalo deve atender $f(a).f(b) < 0$.

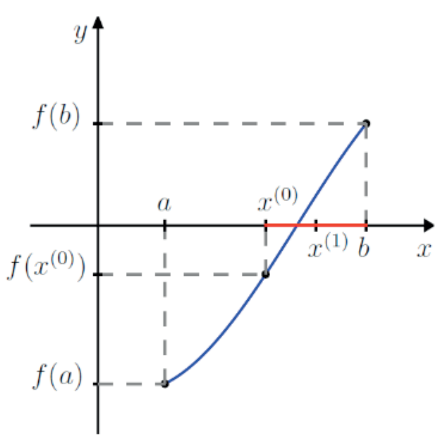

Figura 4:Funcionamento do Método de Bisseção

Fonte:Justo et. al. (2019)

Com base na Figura 4, observamos que para o próximo intervalo usaremos $[x^{(0)}, b]$, pois $f(a).f(x^{(0)}) > 0$. Assim, como $f(x^{(0)}).f(b) < 0$, fazemos

$$x^{(1)} = \frac{x^{(0)} + b}{2}$$

Dessa forma, realizamos estes cálculos até atingirmos uma precisão dada que torne o valor de $x^{(n)}$ o mais próximo possível da solução real. O critério de parada pode ser escolhido dentro de várias possibilidades, chamando de ε o valor dado para a precisão, segundo Burden e Faires (2008) e Justo et. al. (2019), utilizaremos os dois critérios descritos a seguir:

$$f(x^{(n)}) < \varepsilon$$

$$\frac{|b^{(n)} - a^{(n)}|}{2} < \varepsilon$$

Observe que o método consiste em trocar a cada nova iteração os extremos do intervalo que contém a raiz, mas como descrito anteriormente, faremos de tal modo a garantir a aplicação do Teorema de Bolzano. Iniciaremos o processo utilizando tomando $n = 0$ e:

$$a^{(n)} = a \qquad b^{(n)} = b \qquad e \qquad x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$$

Verificamos se nesta etapa $x^{(n)}$ ou $a^{(n)}$ e $b^{(n)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuaremos o processo, ou seja, passamos a próxima etapa, $n + 1$. Para estabelecer os novos intervalos de iteração façamos o teste: se $f(a).f(x^{(n)}) < 0$, então definimos $a^{(n+1)} = a^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = x^{(n)}$; caso contrário, se $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, então definimos $a^{(n+1)} = x^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = b^{(n)}$. Observe que nestas mudanças estamos sempre levando em consideração a aplicação do Teorema de Bolzano, ou seja, de garantir que a raiz da função esteja dentro do intervalo considerado na iteração. Assim, na próxima iteração, $n + 1$, basta fazer:

$$x^{(n+1)} = \frac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}$$

Tornamos a verificamos se nesta etapa $x^{(n+1)}$ ou $a^{(n+1)}$ e $b^{(n+1)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n+1)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuamos o processo fazendo as alterações indicadas anteriormente.

Feito estas considerações, passamos a construção do método no GeoGebra. Primeiramente, defina dois controles deslizantes chamando-os de a e b, com intervalo variando de 0 a 10 e incremento igual a 0,1. Construa os pontos $A = (a,0)$ e $b = (b,0)$ para que sejam exibidos na Janela de Visualização o intervalo inicial da iteração.

Na Planilha, construir o cabeçalho tal como exibido na Figura 5 a seguir:

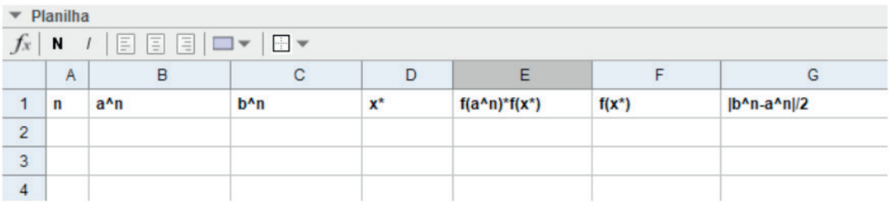

Figura 5:Cabeçalho da Planilha para o método de Bisseção.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para construir a lista de números que representa a ordem da iteração podemos proceder da mesma forma como nos outros editores de planilha. Iniciamos com a contagem 0 e 1 e, em seguida, utilizamos a alça de preenchimento automático:

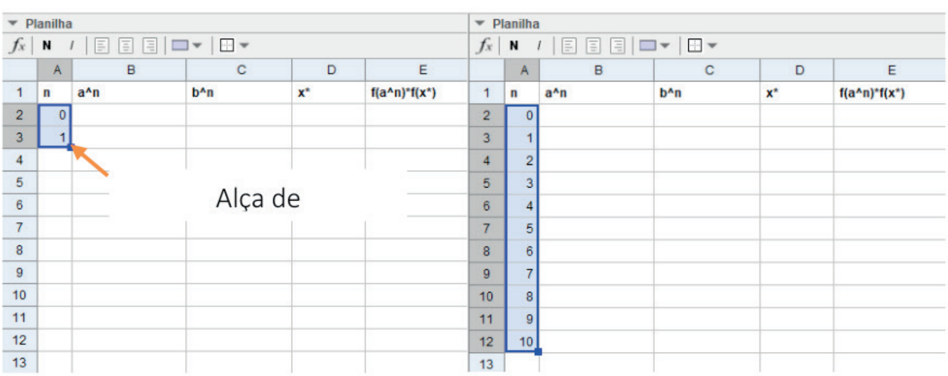

Figura 6:Criando uma lista automática de valores para n

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para o primeiro valor de $a^{(n)}$ configuraremos na célula $B2$ o seguinte código: $= a$. E para primeiro valor de $b^{(n)}$ configuraremos na célula $C2$ o código: $= b$. Estes comandos capturarão os valores dos controles deslizantes criados anteriormente, dessa forma, ao modificá-los a planilha irá atualizar seus valores automaticamente.

O próximo passo é o cálculo de $x^{(n)}$. Assim, na célula D2 , configure o código: = (B2 + C2) /2 . Na próxima coluna, realizamos o cálculo de $f(a) \cdot f(x^{(n)})$ que determinará a troca dos extremos dos intervalos de iteração, dessa forma, configure o código: = $f(B2) * f(D2)$.

Por fim, as fórmulas dos critérios de parada. Na célula $F2$, utilizar o comando: $= f(D2)$, que retorna a imagem de $x^{(n)}$ para a função $f^{(x)}$ construída. E na célula $G2$ usar o código: $= (C2 - B2)/2$, que determinará a distância média do intervalo $[a,b]$ em cada iteração dada.

Para determinar os valores das próximas iterações utilizaremos mais dois comandos. Na célula $B3$ usar o código: $= Se(E2 > 0, D2, B2)$. Este comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $a^{(n=1)}$ o valor de $x^{(n)}$ contido na célula $D2$ e, em caso contrário, repete o valor de a anterior.

Na célula $C3$ usaremos o código: $= Se(E2 > 0, C2, D2)$. Assim como no caso anterior, esse comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $b^{(n+1)}$ o valor de b obtido anteriormente e, em caso contrário, alteramos o valor de b para o valor de $x^{(n)}$ calculado anteriormente.

Realizado estas etapas, basta copiar as fórmulas para as demais células da tabela através da alça de preenchimento automático. Ao final, teremos o resultado ilustrado na Figura 7 a seguir:

Planilha

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a^n	b^n	x*	f(a^n)*f(x*)	f(x*)	|b^n-a^n|/2
2	0	2	3	2.5	0.121977166884544	-0.200532135431919	0.5
3	1	2.5	3	2.75	-0.011565029511521	0.057671701777931	0.25
4	2	2.5	2.75	2.625	0.014997997109852	-0.074790990868114	0.125
5	3	2.625	2.75	2.6875	0.000695453465338	-0.009298626174971	0.0625
6	4	2.6875	2.75	2.71875	-0.000223305360797	0.024014876670501	0.03125
7	5	2.6875	2.71875	2.703125	-0.00006800602856	0.007313556570658	0.015625
8	6	2.6875	2.703125	2.6953125	0.000009334724629	-0.001003882127718	0.0078125
9	7	2.6953125	2.703125	2.69921875	-0.000003164262533	0.003152025965399	0.00390625
10	8	2.6953125	2.69921875	2.697265625	-0.000001077532847	0.001073365903544	0.001953125
11	9	2.6953125	2.697265625	2.6962890625	-0.00000003469917	0.000034564984309	0.0009765625
12	10	2.6953125	2.6962890625	2.69580078125	0.000000486584526	-0.000484702847554	0.00048828125

Figura 7:Método de Bisseção para a função $f(x) = log(x) - sin(x)$ para a=2 e b=3.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Se considerarmos $\varepsilon = 10^{-2}$, observando a tabela e adotando o critério $|f(x^{(n)})| < \varepsilon$, temos que o resultado será obtido na iteração de ordem n = 5 e assim, $x^{(6)}$ = 2,6953125. Por outro lado, considerando o segundo critério de parada, teremos que a solução será obtida para n = 6 e assim, $x^{(6)} = 2{,}6953125$ é uma aproximação para a raiz da função.

Entretanto, de acordo com a Figura 2=, obtivemos como solução para a primeira raiz da equação o valor $x = 2{,}696256562717607$. Dessa forma, comparando com os valores mencionados anteriormente, $x^{(6)}$ representa uma melhor aproximação para a raiz da função.

Podemos ainda apresentar uma tabela com os valores calculados anteriormente na Janela de Visualização e ocultar a Planilha para tornar melhor a visualização das informações. Para isto, basta selecionar todas as linhas da Planilha que contenham os dados e selecionar a opção *Tabela*, conforme a Figura 8, em seguida, selecionar a opção *Objetos Independentes* e confirmar em *Criar*.

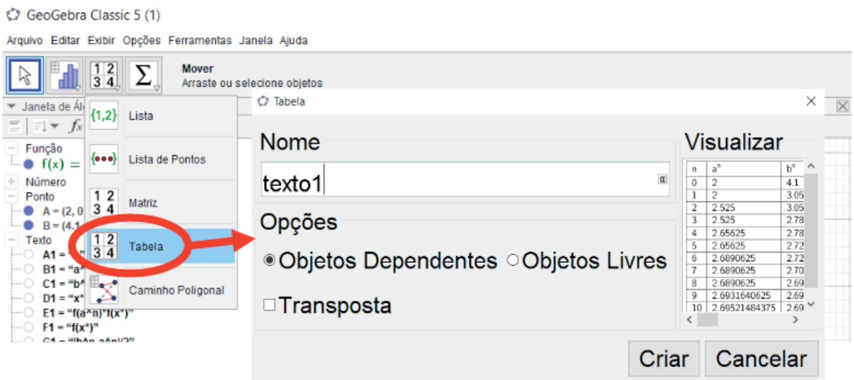

Figura 8:Construindo a tabela vinculada a planilha no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Após as configurações obtemos o resultado representado na Figura 9 a seguir:

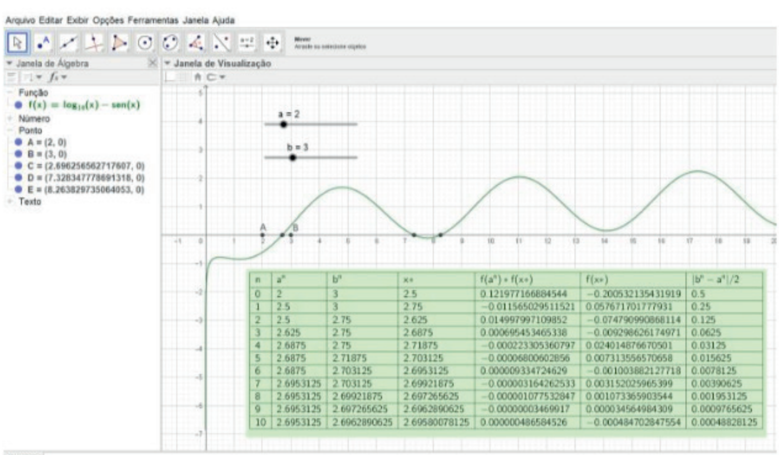

Figura 9:Método de Bisseção implementado no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Com esta construção o usuário pode determinar as outras raízes manipulando apenas os controles deslizantes, determinado novos intervalos que as contenham. Além disso, caso o usuário altere a lei da função, todos os demais campos construídos na planilha e sua representação na Janela de Visualização serão alterados automaticamente.

Esta é uma das vantagens de utilizar o GeoGebra em detrimento a outros editores de planilha, pois nestes a cada mudança na lei da função o usuário deve atualizar quase todas as fórmulas manualmente. A possibilidade de visualizar numa mesma tela todos estes resultados é outra possibilidade que se torna interessante para o usuário, pois assim a sua atenção está focada em um único programa.

RAÍZES DE EQUAÇÕES: UMA FERRAMENTA DISPONÍVEL

Apresentamos neste trabalho uma ferramenta construída no GeoGebra com o intuito de auxiliar na discussão dos métodos iterativos para determinação das raízes de equações por meio dos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes. Esta ferramenta está disponível no endereço eletrônico: https://danmartins.com.br/recursos-educacionais.

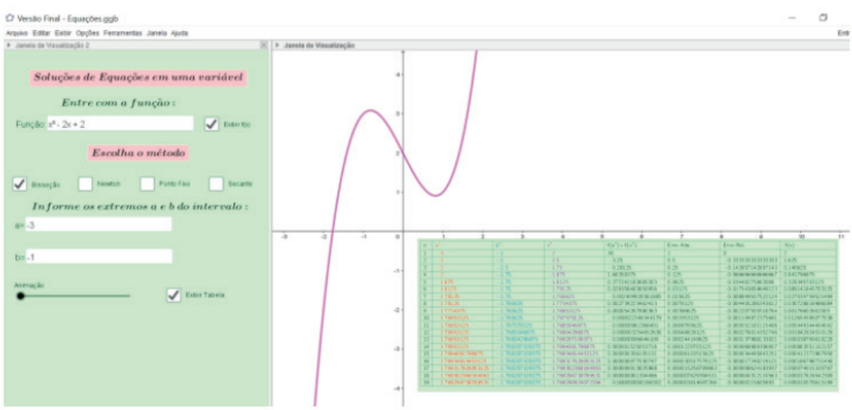

Figura 10:Versão final do aplicativo construído no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Esta ferramenta conjuga duas janelas para apresentar resultados e análise dos métodos supracitados. Na primeira janela o usuário insere elementos necessários tais como a função associada a equação e os valores iniciais para o processo de iteração em cada método. Ainda é possível, por meio das caixas de seleção, escolher qual método será utilizado para resolver o problema e assim observar qual método converge mais rápido.[4]

4 De modo geral o método de Newton é o que possui uma convergência mais rápida (convergência quadrática). O método de Bisseção e Ponto Fixo possuem convergência linear e o método da Secante dada por $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$.

Além disso, com a utilização do controle deslizante que possui o nome de "Animação", disponível em todos os métodos, o usuário pode observar o comportamento das aproximações obtidas em cada iteração. Essa visualização pode tornar-se importante durante o estudo dos métodos, entendendo assim a suas motivações geométricas.

Na Figura 11, por exemplo, apresentamos dois resultados diferentes obtidos ao usar o método de Ponto Fixo para determinar a raiz da função $f(x) = x^3 - 2x + 2$, juntamente com a animação construída com o controle deslizante:

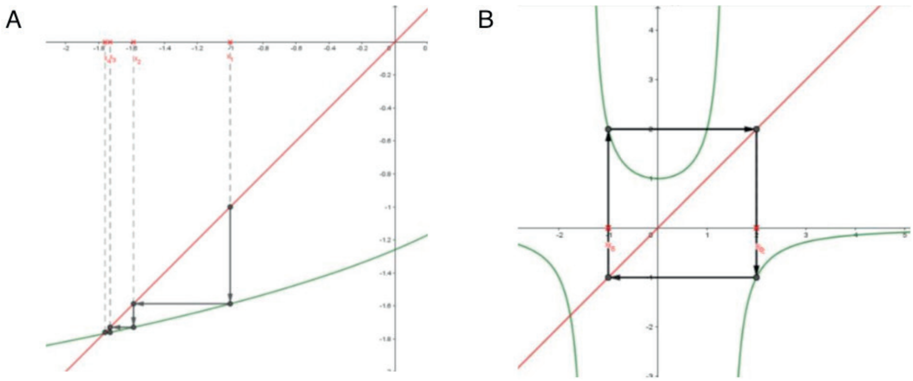

Figura 11:A –Solução convergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = \sqrt[3]{2x-2}$ e $x^{(1)} = -1$. **B –** Solução divergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = -\frac{2}{x^2-2}$ e $x^{(1)} = -1$.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Dessa forma, a animação pode auxiliar os usuários a observar a convergência do método ao escolher uma função de iteração $g(x)$. Inclusive permite o usuário analisar para diferentes valores iniciais da iteração se a função $g(x)$ adotada convergirá ou não para a solução do problema, como no caso da Figura 11B em que a função de iteração não converge para a solução independentemente do valor inicial utilizado. Entretanto, cabe a ele observar e deduzir algebricamente o porquê do método não converge para a solução ao adotar tal função[5]. Dessa forma, o aplicativo auxilia na determinação destas funções de iteração convergentes ou divergentes, por meio da inspeção visual. Ainda sobre as funções de iteração convergentes pode-se observar aquela que possivelmente apresentará uma convergência mais rápida ao analisar os valores tabelados.

Estudar estes métodos é um constante retorno ao estudo das teorias do Cálculo Diferencial. Por exemplo, ao estudar o método de Newton que emprega a utilização da derivada da função no processo iterativo, podemos recriar a situação apresentada na Figura 12:

5 Vide Teorema da Convergência de funções de iteração em Ruggiero e Lopes (1996, p. 58-59)

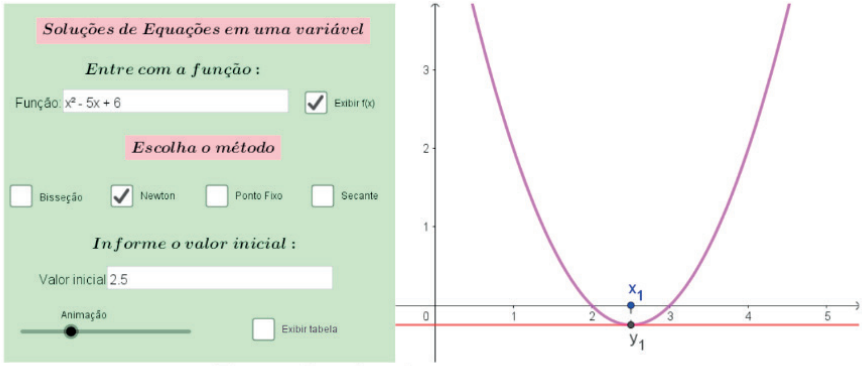

Figura 12:Utilizando o Método de Newton para discutir conceitos de Cálculo Diferencial.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Quando o usuário tiver compreendido a motivação geométrica do método de Newton poderá fazer as devidas conexões com os conceitos discutidos nas aulas de Cálculo Diferencial.

Podemos ainda exemplificar o problema de determinar as raízes da função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ e discutir com os alunos a razão de não ser possível usar o método de Bisseção, uma vez que não é garantido as condições do Teorema de Bolzano. Como se observa na Figura 13 a seguir, a animação construída com as aproximações determinadas pelo método evidencia que não conseguimos construir uma sequência convergente para determinar a raiz da equação.

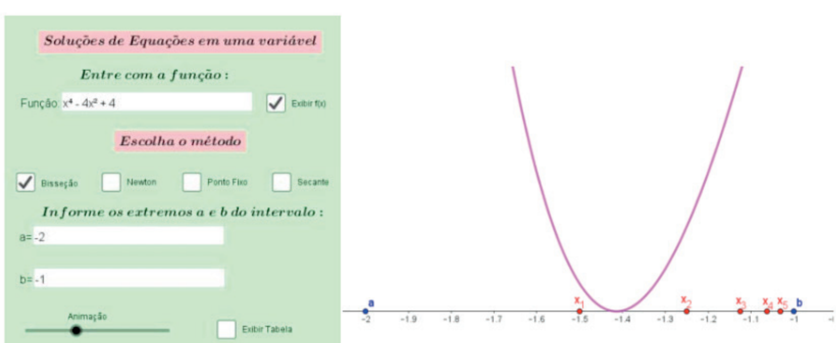

Figura 13: Método de Bisseção aplicado em intervalo da função que não atende o Teorema de Bolzano.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Entretanto, ao utilizar os outros métodos que não exigem as especificidades impostas pelo Teorema de Bolzano, o aluno conseguirá determinar a solução do problema. Assim, confrontando as teorias estudadas e os modelos visuais construídos, com o auxílio do aplicativo, podemos auxiliar a aprendizagem dos nossos alunos.

Para finalizar, salientamos que os valores determinados e apresentados nas tabelas neste aplicativo estão idênticos aos que foram determinados por meio de algoritmos utilizando o *software* livre *Scilab*. Portanto, embora o aplicativo tenha a limitação no número de iterações estas estão em concordância com os resultados obtidos em programas numéricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O questionamento que levou a realização deste trabalho esteve vinculado a: por que utilizar o GeoGebra no estudo dos métodos numéricos para determinação de raízes de equações? Ao final, esperamos ter contribuído para que os interessados sobre o assunto tenham percebido estas possibilidades.

Defendemos o uso do GeoGebra nestas situações devido aos benefícios apresentados anteriormente e a outros que destacaremos aqui. Primeiramente, o uso do GeoGebra torna fácil e automático o estudo de outras funções, pois ao alterá-la e os valores iniciais utilizados em cada método, os cálculos construídos na planilha são automaticamente modificados, diferente do que acontece nos outros editores de planilhas que necessitam alterar as fórmulas a cada momento de teste.

Segundo, da mesma forma que os alunos constroem as tabelas nos editores de planilha, eles poderão também fazer no GeoGebra e assim entender o procedimento empregado para não tornar o ensino destes conteúdos tão mecânicos, com o simples apertar de botões. Embora tenhamos apresentado no início um comando que determina uma aproximação para as raízes deve-se entender que tal procedimento não substitui a construção das planilhas, é apenas um recurso que pode apoiar a aprendizagem do aluno durante os seus estudos.

Além disso, alguns cursos de Licenciatura em Matemática não preveem na sua grade curricular disciplinas de linguagem de programação de computadores. Portanto, para estes casos torna-se um desafio ao professor ensinar o método e ainda uma linguagem de programação para construir algoritmos que realize estes cálculos numéricos. Dessa forma, o GeoGebra torna-se um aliado por tornar essa aprendizagem mais fácil para os alunos e para o trabalho do professor. Embora tal fato não seja limitador para esta discussão, talvez seja interessante uma abordagem mista.

Outro fator a ser considerado é a popularidade que o GeoGebra possui nos cursos de Licenciatura em Matemática. É bem provável que a maioria, se não todos, os alunos destes cursos já tiveram contato em algum momento com o software, seja para estudo pessoal ou para construção de material didático.

Consideramos que o GeoGebra possui as suas limitações, como indicado em Bortolossi, Pesco e Rezende (2012). Entretanto, será útil usá-lo pelos recursos visuais e dinamicidade, inclusive para observar as motivações geométricas em cada método, conforme ilustramos na ferramenta construída e disponibilizada.

Assim, esperamos que este trabalho sirva para motivar interessados sobre o assunto a pesquisarem mais sobre estas possibilidades, assim como, ampliar as discussões que aqui apresentamos.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, F. D. M; RAMOS, M. W. A. **Métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem por meio de um applet do GeoGebra.** PMO, v.8, n.1, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo82

BORTOLOSSI, H. J.; PESCO, D. U.; REZENDE, W. M. **Computação simbólica com o software gratuito GeoGebra.** Anais. Conferência Latinoamericana de GeoGebra. Uruguai, 2012. p. 29-34. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/22.pdf

BORUCH, I. G. S; SCALDELAI, D. **Método de Newton para resolução de sistemas não lineares: uma abordagem gráfica no software GeoGebra.** Anais do II Colbeduca. Joinville, SC. p. 485 – 497. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8144/6115

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

GUIMARÃES, Y. P. B. Q.; MIRANDA, D. F. **Estudo de métodos numéricos para resolução de integrais com o uso dos softwares VCN e GeoGebra.** Anais. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, BA. Disponível em: http://docplayer.com.br/148782414-Estudo-de-metodos-numericos-para-resolucao-de-integrais-com-o-uso-dos-softwares-vcn-e-geogebra.html

JUNIOR, R. R. O; ABBEG, T. P. **História, resolução numérica e GeoGebra o ensino de equações algébricas.** PMO, n.1, v.4, 2016. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-ortega-junior-e-abbeg.pdf

JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. A. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo – Versão Scilab.** 2019. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª ed. São Paulo. Makron Books, 1996.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra 9, 18, 63, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 154, 189, 190, 203, 204, 227

Anos Iniciais 7, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 80, 81, 88, 89, 120, 121, 126, 128, 226, 227

Aplicativo online 9, 187, 188, 204

Aprendizagem 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 23, 25, 26, 27, 33, 35, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 85, 89, 92, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 160, 163, 164, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 205, 206, 211, 212, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 223, 224, 226, 234, 235, 236, 237, 239

Aprendizagem Matemática 9, 26, 60, 118, 119, 125, 154, 164, 167, 175, 183, 184

Aproximação de Raízes 44

Atenuação da perturbação 273

Auditoria de Contas 10, 266, 267, 271

B

Biografia 13, 91, 93, 94, 102, 103

Brincadeiras 8, 118, 120, 125, 126, 127, 150

C

Caos 10, 241, 242, 246, 251, 252

Condução de Calor 104, 105, 228

Controle Preditivo 273

D

Deficiente visual 9, 214, 215, 216, 218, 219, 221, 222, 223

Derivada compatível 254, 256, 263, 264, 265

Detecção de Fraudes 266, 267

Determinantes 9, 163, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 204

Diagramas de Vergnaud 110

Diferença de Hukuhara 254, 260

Dificuldades 5, 7, 9, 13, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 68, 70, 72, 92, 93, 121, 123, 124, 126, 138, 139, 143, 144, 145, 149, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 169, 174, 177, 183, 184, 189, 190, 199, 200, 201, 202, 214, 217, 224, 225, 227, 233

Dificuldades do Ensino 35, 36, 39, 40, 121

Dinâmica não linear 10, 241, 242

Discalculia 7, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70

Disciplina de Matemática 35, 36, 40, 216

Distribuição de Newcomb-Benford 10, 266, 270, 271

Docentes 5, 35, 36, 40, 42, 102, 120, 121, 124, 125, 127, 128, 137, 151, 154, 156, 157, 164, 167, 168, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 186, 212, 213, 216, 222, 233, 237, 238, 239

E

Educação Matemática 11, 26, 37, 58, 80, 81, 83, 92, 118, 134, 156, 161, 163, 164, 167, 203, 204, 212, 213, 223, 237, 239, 240, 282

Ensino 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 68, 69, 70, 89, 91, 92, 93, 102, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 179, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 282

Ensino-Aprendizagem 39, 43, 44, 92, 130, 132, 139, 140, 143, 144, 146, 148, 172, 185, 189, 190, 201, 212

Ensino de Matemática 9, 10, 12, 23, 25, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 91, 128, 132, 134, 140, 144, 146, 158, 162, 202, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 214, 215, 218, 222, 223, 233, 237, 282

Ensino de Química 8, 130, 131, 132, 133, 134, 137, 140, 141

Escrita de números 63, 80, 85

Estabilidade Dinâmica 273

Estágio 109, 158, 171

Estatística 71, 72, 79, 103, 166, 186, 265, 282

Estratégias 9, 164, 175

Estruturas Aditivas 8, 109, 110, 111, 116, 117

Excel 8, 46, 49, 109, 111, 112, 114, 115, 116, 117

Expoente de Lyapunov 241, 251, 253

F

Formação Continuada 80, 86, 109, 111, 167, 171, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 189, 205, 219

Formação inicial de professores de Matemática 1, 233

Funções Elípticas 91, 98, 101

G

Gauss-Seidel 104, 105, 106, 228, 229, 230, 231

GeoGebra 7, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 58

Geometria Euclidiana 7, 12, 18, 21, 24, 159, 160

Geometria Não Euclidiana 12

H

História da Matemática 12, 13, 14, 23, 24, 91, 92, 93, 96, 102, 103, 155, 217, 224, 237

I

Inclusão 5, 3, 59, 60, 67, 69, 70, 91, 102, 188, 202, 214, 215, 218, 223

Interdisciplinaridade 8, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141

Inversão de matrizes 187, 188, 190, 194, 198, 200

Investigação Matemática 9, 143, 144, 146, 147, 148, 153, 154

J

Jogos 8, 10, 25, 27, 33, 42, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 180, 184, 225, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 238

Jogos Digitais 10, 233, 234, 235, 236, 237, 238

L

Lúdico 25, 26, 30, 41, 42, 118, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 141

M

Matemática 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 265, 282

Método das Diferenças Finitas 104, 106, 228, 229, 230

Metodologias inovadoras de ensino 118

Métodos Numéricos 7, 44, 45, 46, 57, 58, 104, 105, 243

Modelagem de dados 71

Motivação 56, 63, 67, 88, 118, 119, 123, 134, 166, 167, 211

N

Niels Henrik Abel 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103

Números Fuzzy 254, 259

O

Outliers 71, 72

P

Perspectiva CTS 205

Perspectivas 9, 91, 92, 101, 102, 128, 156, 157, 159, 171, 180, 227, 240

Pesquisa na formação do professor de Matemática 1

Postura investigativa na formação do professor de Matemática 1

Práticas Pedagógicas 60, 65, 66, 68, 69, 81, 156, 157, 167, 183

Probabilidade 29, 30, 71, 72, 73, 78, 79, 138, 141, 257, 268

Projeto de sistemas de controle 273

R

Rastreamento de Referência 273

Recursos didáticos 8, 80, 81, 88, 89, 102, 215, 218, 223

S

Sala de recurso 59

Sistema de Numeração Decimal 80, 82, 85, 87, 88, 89, 225

Sistemas Lineares 9, 187, 188, 189, 190, 191, 200, 202, 204

T

Tecnologias da Informação e Comunicação 233, 234, 237, 282

Tendência contemporânea 205

Transtorno 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena Editora
Ano 2021