

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2021 Os autores

Copyright da Edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Ivone Goulart Lopes – Instituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Prof^ª Dr^ª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof^ª Dr^ª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^ª Dr^ª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^ª Dr^ª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Dr^ª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Prof^ª Dr^ª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília

Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof^ª Dr^ª Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina

Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília

Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra

Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco

Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará

Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma

Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino

Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^ª Dr^ª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Prof^ª Dr^ª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof^ª Dr^ª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^ª Dr^ª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Prof^ª Dr^ª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^ª Dr^ª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^ª Dr^ª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais
Prof. Me. Alexandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof^ª Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof^ª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Prof^ª Dr^ª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof^ª Dr^ª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof^ª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Prof^ª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Prof^ª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar

Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Fabiano Eloy Atilio Batista – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR

Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Ma. Lilians Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Prof^ª Dr^ª Livia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof^ª Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz
Prof^ª Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Prof^ª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Prof^ª Dr^ª Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa
Prof^ª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Prof^ª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Prof^ª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof^ª Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof^ª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
 André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-5706-856-4
 DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil
 Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, na que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. [org/10.29327/217514.7.1-5](https://doi.org/10.29327/217514.7.1-5). **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: <http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430>. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

Celina Amélia da Silva

Carmen Teresa Kaiber

DOI 10.22533/at.ed.5642108031

CAPÍTULO 2..... 12

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS

Adan Rodrigo Vale Pacheco

Fábio Barros Gonçalves

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.5642108032

CAPÍTULO 3..... 25

PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM

Wharton Martins de Lima

Davis Rytley Lira Martins

Jamilson Pinto de Medeiros

João Pedro Nogueira da Silva

Sérgio Barbosa da Penha

William Gomes dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.5642108033

CAPÍTULO 4..... 35

AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Francisca Missilene Muniz Magalhães

Pedro Franco de Sá

DOI 10.22533/at.ed.5642108034

CAPÍTULO 5..... 44

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Daniel Martins Nunes

Fábio Mendes Ramos

DOI 10.22533/at.ed.5642108035

CAPÍTULO 6..... 59

DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7º ANO

Emilim Caroline Canabarro

Lucieli Martins Gonçalves Descovi

DOI 10.22533/at.ed.5642108036

CAPÍTULO 7	71
DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES	
Beatriz Nascimento Gomes	
Altemir da Silva Braga	
DOI 10.22533/at.ed.5642108037	
CAPÍTULO 8	80
RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS	
Helena Dória Lucas de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.5642108038	
CAPÍTULO 9	91
NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS	
Dayson Wesley Lima Castro	
Arlison da Conceição Rocha	
Natanael Freitas Cabral	
Miguel Chaquiam	
DOI 10.22533/at.ed.5642108039	
CAPÍTULO 10	104
SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA	
Giovanni Santos	
Mairon Carliel Pontarolo	
Sebastião Romero Franco	
DOI 10.22533/at.ed.56421080310	
CAPÍTULO 11	109
CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS	
Ana Emilia de Melo Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.56421080311	
CAPÍTULO 12	118
UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
José Roberto Costa	
Vanessa Tluscik dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080312	
CAPÍTULO 13	130
A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGICA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL	
Catiex Rodrigues de Souza	
Adelmo Carvalho da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.56421080313	

CAPÍTULO 14.....	143
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA	
Wanderlei Verissimo	
Thiago Fanelli Ferraiol	
DOI 10.22533/at.ed.56421080314	
CAPÍTULO 15.....	156
DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA	
Gustavo Pereira Gomes	
Bianca Menezes Campos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080315	
CAPÍTULO 16.....	164
A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA	
Elivane Leandro da Silva	
Lucianne Oliveira Monteiro Andrade	
Marcelo de Sousa Coêlho	
DOI 10.22533/at.ed.56421080316	
CAPÍTULO 17.....	187
ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE	
Cristiane Martins Fernandes Tavares	
Edson Leite Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.56421080317	
CAPÍTULO 18.....	205
O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA	
Eliana Alves Arxer	
Dulcimeire Aparecida Volante Zanon	
DOI 10.22533/at.ed.56421080318	
CAPÍTULO 19.....	214
UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR	
Adriana Stefanello Somavilla	
Luani Griggio Langwinski	
Leonardo Silguero Pimentel	
DOI 10.22533/at.ed.56421080319	
CAPÍTULO 20.....	225
CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	
Adriana de Jesus Gabilão	

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra

Renata Forti Braga

DOI 10.22533/at.ed.56421080320

CAPÍTULO 21.....228

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM SOLVER LINHA

Mairon Carliel Pontarolo

Giovanni Santos

Sebastião Romero Franco

DOI 10.22533/at.ed.56421080321

CAPÍTULO 22.....233

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS

Vilma Luísa Sieglloch Barros

DOI 10.22533/at.ed.56421080322

CAPÍTULO 23.....241

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER

Henry Otavio Fontana

Thiago Gilberto do Prado

Vinícius Piccirillo

DOI 10.22533/at.ed.56421080323

CAPÍTULO 24.....254

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Fernando Santos Silva

Ana Paula Perovano

DOI 10.22533/at.ed.56421080324

CAPÍTULO 25.....266

DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS

Thiago Schinda Bubniak

Inácio Andruski Guimarães

Sonia Maria de Freitas

DOI 10.22533/at.ed.56421080325

CAPÍTULO 26.....273

COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION

Rejane de Barros Araújo

Antonio Augusto Rodrigues Coelho

DOI 10.22533/at.ed.56421080326

SOBRE OS ORGANIZADORES	282
ÍNDICE REMISSIVO.....	283

CAPÍTULO 5

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Data de aceite: 17/02/2021

Daniel Martins Nunes

Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

Fábio Mendes Ramos

Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

RESUMO: Este estudo discute a utilização do software GeoGebra no ensino de Matemática, especificamente em temas discutidos em disciplinas como Métodos Numéricos. Dessa forma, apresentamos alguns comandos e processos que podem ser utilizados durante o ensino de Aproximação de Raízes pelos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secantes. Além disso, divulgamos um aplicativo construído com o auxílio do GeoGebra que permite a interação do usuário, obtendo respostas precisas para os problemas de cálculo numérico em poucas etapas. De modo geral, observamos que o GeoGebra é uma ferramenta importante para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina, pois permite observar o comportamento de funções transcendentais e que as aproximações geradas por ele são precisas assim como as que são determinadas por outros softwares utilizados na área.

PALAVRAS - CHAVE: GeoGebra, Métodos Numéricos, Aproximação de Raízes.

USING GEOGEBRA TO DETERMINE APPROXIMATIONS FOR EQUATION ROOTS THROUGH NUMERICAL METHODS

ABSTRACT: This study discusses the use of GeoGebra software in the teaching of Mathematics, specifically on topics discussed in disciplines such as Numerical Methods. In this way, we present some commands and processes that can be used during the teaching of Root Approach by the methods of Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson and Secantes. In addition, we disclose an application built with the help of GeoGebra that allows user interaction, obtaining precise answers to numerical calculation problems in a few steps. In general, we observed that GeoGebra is an important tool for the teaching-learning process of the discipline, as it allows observing the behavior of transcendental functions and that the approximations generated by it are accurate as well as those determined by other software used in area.

KEYWORDS: GeoGebra, Numerical Methods, Root Approximation.

INTRODUÇÃO

Durante o ensino fundamental e médio é comum a abordagem de resolução de equações que nos conduzem a determinação de suas soluções por meio de fórmulas diretas, tais como, as equações quadráticas que emprega a fórmula de Bháskara. Algumas dessas equações não apresentam uma solução exata, como por exemplo a equação 1 a seguir:

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (\text{Equação 1})$$

Cujas raízes poderiam ser dadas pelos valores: $x = 1 \pm \sqrt{6}$, ou, aproximadamente, $x' = 3,44948974278$ e $x'' = -1,4494897427$. Entretanto, estas equações quadráticas, exponenciais, logarítmicas, dentre outras, comumente ensinadas durante esta etapa do ensino, são, por vezes, facilmente determinadas por meio da utilização de procedimentos algébricos específicos e que podem resultar em valores exatos ou aproximados como apresentamos anteriormente.

No ensino superior a situação muda, pois geralmente nos cursos da área de exatas estabelecem situações em que estes métodos não podem ser empregados para determinar as soluções das equações obtidas por meio de modelagem matemática. Por exemplo, adotando para o modelo de crescimento populacional de uma certa região a função a seguir:

$$N(t) = N_0 e^{at} + \frac{v}{\alpha} (e^{at} - 1) \quad (\text{Equação 2})$$

Em que $N(t)$ denota o número de habitantes no instante t , N_0 o número de habitantes no momento inicial, v a taxa de imigração suposta constante e a taxa de natalidade. Agora, supondo que uma população tenha inicialmente 1 000 000 de indivíduos, que 435 000 imigrem para a comunidade no primeiro ano, e que 1 564 000 indivíduos estejam presentes após decorrido um ano, para determinar a taxa de natalidade dessa população devemos resolver a equação a seguir em função de a :

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000 e^a + \frac{435\,000}{\alpha} (e^a - 1) \quad (\text{Equação 3})$$

Dessa forma, os métodos algébricos que costumávamos utilizar não são suficientes para resolver situações como esta. Em detrimento a esta impossibilidade, foram desenvolvidos métodos numéricos para determinar a solução de equações como apresentada anteriormente.

Os métodos numéricos empregados como o de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes são metodologias diferentes, mas que utilizam o mesmo princípio, a iteração (ou repetição) do processo de determinar aproximações para as raízes de equações.

Chamamos de iteração o processo que envolve o uso de fórmulas repetidas vezes até que o resultado obtido atinja uma precisão previamente estabelecida. Assim, a cada etapa realizada a solução de uma equação aproxima-se cada vez mais do valor real. O fato de estabelecer uma precisão no início do processo deve-se à necessidade de encerrá-lo,

¹ Burden e Faires (2015) adaptado.

uma vez que a iteração gera uma sequência de cálculos e valores que podem ser infinitos e cada vez mais precisos.

É muito comum a utilização de softwares numéricos para determinar uma aproximação para estas soluções, tais como, o *Matlab* e nas suas versões livre *Scilab* e *Octave*. Ambos trazem a possibilidade de usar um encadeamento de comandos repetitivos ou de construção de um algoritmo para, através da iteração, obter uma boa aproximação da solução. Além disso, podemos utilizar os editores de planilhas eletrônicas, tais como o *Excel* ou *Calc*, para construir tabelas que contenham os cálculos determinados pelos métodos supracitados, que apesar de tornar o processo rudimentar, em comparação com os programas anteriores, possibilita o aluno entender os mecanismos envolvidos em cada processo.

Embora já tenhamos disponíveis estes recursos, que funcionam muito bem, os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática provavelmente terão maior contato com algum software educacional como, por exemplo, o GeoGebra que é amplamente divulgado no Brasil e muito abordado em pesquisas (livros, artigos, dissertações, teses, vídeos). Algumas publicações, tais como, Bezerra e Ramos (2020); Junior e Abbeg (2016); Boruch e Scaldelai (2016); Guimarães e Miranda (2010), para citar algumas, demonstram a abordagem do GeoGebra para estudo dos métodos numéricos.

O referido software é gratuito e foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, tem como premissa articular em um mesmo ambiente, através de suas várias janelas, as representações simbólicas, gráficas e geométricas de um objeto. Dessa forma, o usuário pode interagir e observar as transformações na tela percebendo relações matemáticas existentes.

O GeoGebra é comumente utilizado para se discutir ou construir representações de funções ou de objetos geométricos (2D ou 3D) criando objetos dinâmicos e interativos, mas será que é possível usá-lo no processo de ensino e aprendizagem dos métodos numéricos discutidos anteriormente?

O objetivo desta pesquisa é apresentar algumas possibilidades para tal uso e divulgar uma ferramenta construída por um dos autores. Além disso, gostaríamos de sensibilizar os profissionais que atuam nos cursos de formação de professores a considerarem utilizar o GeoGebra em detrimento de outros softwares.

JANELA DE VISUALIZAÇÃO E COMANDOS

O GeoGebra não possui comandos específicos para determinar as raízes de uma equação utilizando especificamente os métodos mencionados anteriormente. Entretanto, há alguns recursos que podem ser utilizados e que trazem uma ótima precisão para o estudo das raízes destas equações.

Primeiramente, pontuamos que a possibilidade de observar o comportamento gráfico

das funções associadas às equações é possível de ser realizado no programa. Assim, será possível estabelecer um intervalo inicial que atenda ao Teorema de Bolzano², ou um valor próximo a raiz para usar nos processos iterativos.

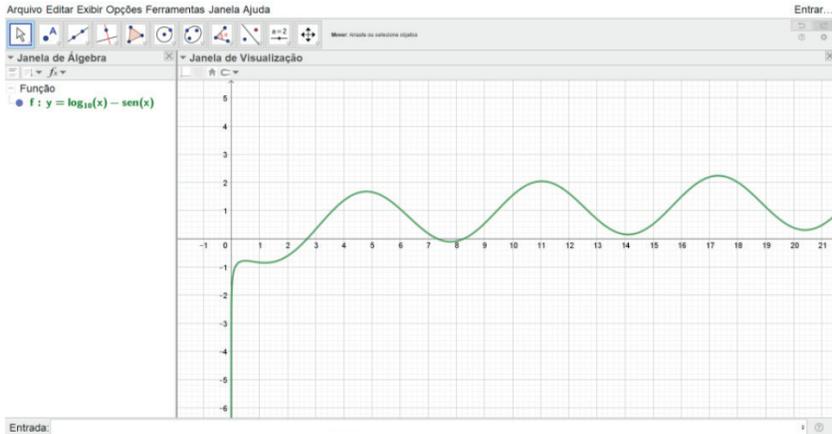


Figura 1: Representação gráfica da função $f(x) = \log(x) - \text{sen}(x)$ no GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Geralmente para determinar tais raízes pelo Teorema de Bolzano os acadêmicos são instruídos a construir uma tabela contendo valores e determinar as suas imagens. Assim, ao verificar a mudança de sinal dentro de um intervalo eles constataam que há ao menos uma raiz naquela região³. Entretanto, para uma situação como a apresentada na Figura 1, o aluno poderia observar o comportamento do gráfico para valores extremamente grandes e constatar a sua periodicidade, além de verificar que há apenas estas três raízes para a equação $\log(x) = \text{sen}(x)$.

Além disso, o acadêmico pode utilizar o programa para verificar se os seus resultados determinados durante a aplicação dos métodos iterativos estão condizentes com o auxílio do GeoGebra. Basta utilizar o comando `Raiz(< Função >, < Valor de x Inicial >, < Valor de x Final >)` que pode ser digitado diretamente na Barra de Entrada.

A Figura 2 a seguir apresenta as aproximações para as três raízes da função a partir da utilização do comando anterior:

2 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

3 Para garantir que a raiz é única no intervalo dado utilizar a seguinte proposição: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$, então existe um único $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

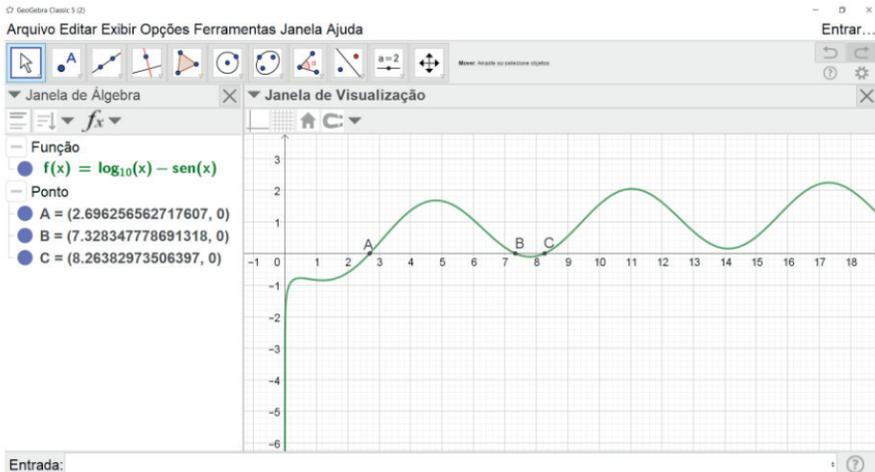


Figura 2: Raízes da função obtida com o GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Este comando apresenta uma melhor aproximação para as raízes e apresentará algumas diferenças em suas últimas casas decimais de acordo com o intervalo adotado. Poderíamos ainda usar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, localizado na Barra de Ferramentas, mas com a sua utilização a raiz não é determinada com uma precisão igual ao que foi realizado no método anterior. Observe a diferença entre as coordenadas dos pontos A e D na Figura 3 a seguir que representam a mesma raiz:

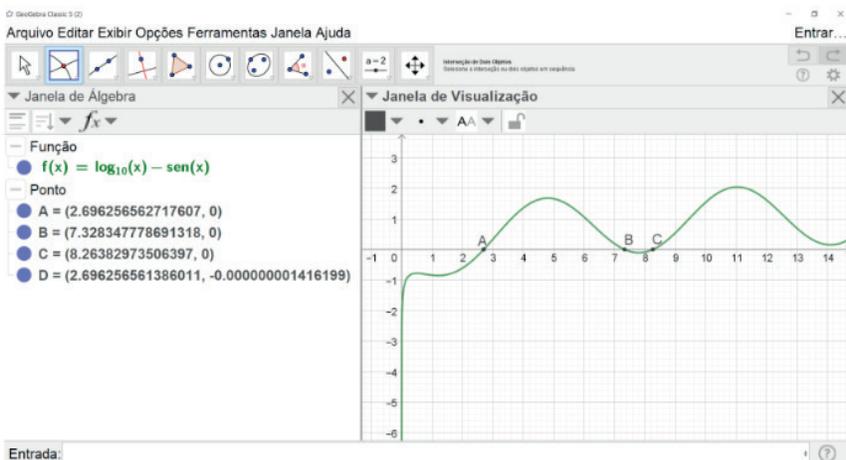


Figura 3: Raízes da função obtida por métodos diferentes.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

PLANILHAS DINÂMICAS

As diversas janelas e funcionalidades do GeoGebra não se esgotam apenas na construção de figuras geométricas planas ou espaciais, ou de funções. O programa ainda possui a opção de trabalhar com planilhas eletrônicas que pode dinamizar o trabalho de determinar as raízes de uma equação, assim como nos editores de planilhas disponíveis no mercado como, por exemplo, Excel, Calc, dentre outros.

Entretanto, a integração da planilha com os outros recursos disponíveis no GeoGebra torna-a uma ferramenta poderosa em detrimento a estes outros editores. Por exemplo, utilizaremos ainda a equação $\log(x) = \sin(x)$ dos exemplos anteriores para ilustrar esta aplicação. Além disso, usaremos o método de Bisseção para determinar o valor das raízes desta equação.

O método de Bisseção consiste em determinar a raiz de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(a).f(b) < 0$ (existência garantida pelo Teorema de Bolzano). Para determinar a primeira aproximação tomamos o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$x^{(0)} = \frac{(a + b)}{2}$$

Pode ocorrer que $f(x^{(0)}) = 0$, desta forma, o zero de $f(x)$ é $x^{(0)}$, mas caso não seja devemos continuar o processo refinando cada vez mais esse intervalo levando em consideração o Teorema de Bolzano a cada nova iteração, ou seja, devemos garantir que cada novo intervalo deve atender $f(a).f(b) < 0$.

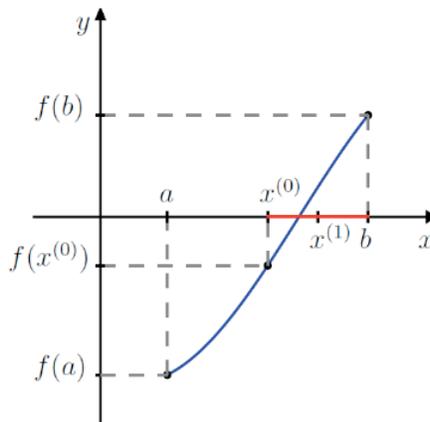


Figura 4: Funcionamento do Método de Bisseção

Fonte: Justo et. al. (2019)

Com base na Figura 4, observamos que para o próximo intervalo usaremos $[x^{(0)}, b]$, pois $f(a).f(x^{(0)}) > 0$. Assim, como $f(x^{(0)}) . f(b) < 0$, fazemos

$$x^{(1)} = \frac{x^{(0)} + b}{2}$$

Dessa forma, realizamos estes cálculos até atingirmos uma precisão dada que torne o valor de $x^{(n)}$ o mais próximo possível da solução real. O critério de parada pode ser escolhido dentro de várias possibilidades, chamando de ε o valor dado para a precisão, segundo Burden e Faires (2008) e Justo et. al. (2019), utilizaremos os dois critérios descritos a seguir:

$$f(x^{(n)}) < \varepsilon$$

$$\frac{|b^{(n)} - a^{(n)}|}{2} < \varepsilon$$

Observe que o método consiste em trocar a cada nova iteração os extremos do intervalo que contém a raiz, mas como descrito anteriormente, faremos de tal modo a garantir a aplicação do Teorema de Bolzano. Iniciaremos o processo utilizando tomando $n = 0$ e:

$$a^{(n)} = a \quad b^{(n)} = b \quad e \quad x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$$

Verificamos se nesta etapa $x^{(n)}$ ou $a^{(n)}$ e $b^{(n)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuaremos o processo, ou seja, passamos a próxima etapa, $n + 1$. Para estabelecer os novos intervalos de iteração façamos o teste: se $f(a).f(x^{(n)}) < 0$, então definimos $a^{(n+1)} = a^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = x^{(n)}$; caso contrário, se $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, então definimos $a^{(n+1)} = x^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = b^{(n)}$. Observe que nestas mudanças estamos sempre levando em consideração a aplicação do Teorema de Bolzano, ou seja, de garantir que a raiz da função esteja dentro do intervalo considerado na iteração. Assim, na próxima iteração, $n + 1$, basta fazer:

$$x^{(n+1)} = \frac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}$$

Tornamos a verificamos se nesta etapa $x^{(n+1)}$ ou $a^{(n+1)}$ e $b^{(n+1)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n+1)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuamos o processo fazendo as alterações indicadas anteriormente.

Feito estas considerações, passamos a construção do método no GeoGebra. Primeiramente, defina dois controles deslizantes chamando-os de a e b , com intervalo

variando de 0 a 10 e incremento igual a 0,1. Construa os pontos $A = (a, 0)$ e $b = (b, 0)$ para que sejam exibidos na Janela de Visualização o intervalo inicial da iteração.

Na Planilha, construir o cabeçalho tal como exibido na Figura 5 a seguir:

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a^n	b^n	x*	f(a^n)*f(x*)	f(x*)	b^n - a^n /2
2							
3							
4							

Figura 5:Cabeçalho da Planilha para o método de Bissecção.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para construir a lista de números que representa a ordem da iteração podemos proceder da mesma forma como nos outros editores de planilha. Iniciamos com a contagem 0 e 1 e, em seguida, utilizamos a alça de preenchimento automático:

	A	B	C	D	E
1	n	a^n	b^n	x*	f(a^n)*f(x*)
2		0			
3		1			
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					

Figura 6:Criando uma lista automática de valores para n

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para o primeiro valor de $a^{(n)}$ configuraremos na célula B2 o seguinte código: $= a$. E para primeiro valor de $b^{(n)}$ configuraremos na célula C2 o código: $= b$. Estes comandos capturarão os valores dos controles deslizantes criados anteriormente, dessa forma, ao modificá-los a planilha irá atualizar seus valores automaticamente.

O próximo passo é o cálculo de $x^{(n)}$. Assim, na célula D2, configure o código: $= (B2 + C2) / 2$. Na próxima coluna, realizamos o cálculo de $f(a) \cdot f(x^{(n)})$ que determinará a troca dos extremos dos intervalos de iteração, dessa forma, configure o código: $= f(B2) * f(D2)$.

Por fim, as fórmulas dos critérios de parada. Na célula $F2$, utilizar o comando: $= f(D2)$, que retorna a imagem de $x^{(n)}$ para a função $f^{(x)}$ construída. E na célula $G2$ usar o código: $=(C2 - B2)/2$, que determinará a distância média do intervalo $[a,b]$ em cada iteração dada.

Para determinar os valores das próximas iterações utilizaremos mais dois comandos. Na célula $B3$ usar o código: $= Se(E2 > 0, D2, B2)$. Este comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $a^{(n+1)}$ o valor de $x^{(n)}$ contido na célula $D2$ e, em caso contrário, repete o valor de a anterior.

Na célula $C3$ usaremos o código: $= Se(E2 > 0, C2, D2)$. Assim como no caso anterior, esse comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $b^{(n+1)}$ o valor de b obtido anteriormente e, em caso contrário, alteramos o valor de b para o valor de $x^{(n)}$ calculado anteriormente.

Realizado estas etapas, basta copiar as fórmulas para as demais células da tabela através da alça de preenchimento automático. Ao final, teremos o resultado ilustrado na Figura 7 a seguir:

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a^n	b^n	x^*	f(a^n)*f(x^*)	f(x^*)	b^n-a^n /2
2	0	2	3	2.5	0.121977166884544	-0.200532135431919	0.5
3	1	2.5	3	2.75	-0.011565029511521	0.057671701777931	0.25
4	2	2.5	2.75	2.625	0.014997997109852	-0.074790990868114	0.125
5	3	2.625	2.75	2.6875	0.000695453465338	-0.009298626174971	0.0625
6	4	2.6875	2.75	2.71875	-0.000223305360797	0.024014876670501	0.03125
7	5	2.6875	2.71875	2.703125	-0.00006800602856	0.007313556570658	0.015625
8	6	2.6875	2.703125	2.6953125	0.000009334724629	-0.001003882127718	0.0078125
9	7	2.6953125	2.703125	2.69921875	-0.000003164262533	0.003152025965399	0.00390625
10	8	2.6953125	2.69921875	2.697265625	-0.000001077532847	0.001073365903544	0.001953125
11	9	2.6953125	2.697265625	2.6962890625	-0.0000003469917	0.000034564984309	0.0009765625
12	10	2.6953125	2.6962890625	2.69580078125	0.000000486584526	-0.000484702847554	0.00048828125

Figura 7: Método de Bisseção para a função $f(x) = \log(x) - \sin(x)$ para $a=2$ e $b=3$.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Se considerarmos $\varepsilon = 10^{-2}$, observando a tabela e adotando o critério $|f(x^{(n)})| < \varepsilon$, temos que o resultado será obtido na iteração de ordem $n = 5$ e assim, $x^{(6)} = 2,6953125$. Por outro lado, considerando o segundo critério de parada, teremos que a solução será obtida para $n = 6$ e assim, $x^{(6)} = 2,6953125$ é uma aproximação para a raiz da função.

Entretanto, de acordo com a Figura 2=, obtivemos como solução para a primeira raiz da equação o valor $x = 2,696256562717607$. Dessa forma, comparando com os valores mencionados anteriormente, $x^{(6)}$ representa uma melhor aproximação para a raiz da função.

Podemos ainda apresentar uma tabela com os valores calculados anteriormente na Janela de Visualização e ocultar a Planilha para tornar melhor a visualização das informações. Para isto, basta selecionar todas as linhas da Planilha que contenham os dados e selecionar a opção *Tabela*, conforme a Figura 8, em seguida, selecionar a opção *Objetos Independentes* e confirmar em *Criar*.

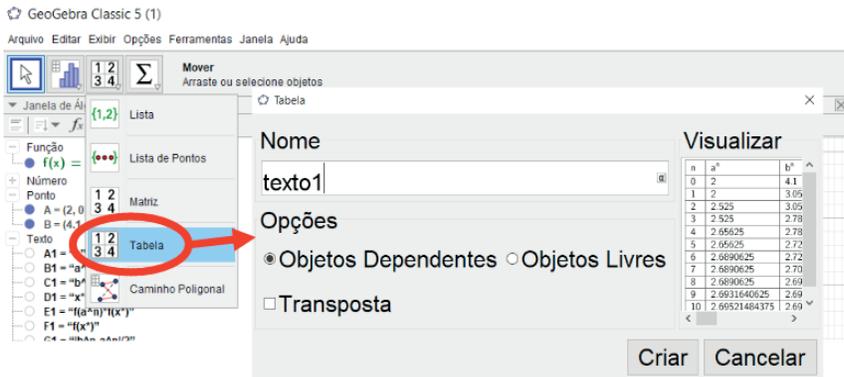


Figura 8: Construindo a tabela vinculada a planilha no GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Após as configurações obtemos o resultado representado na Figura 9 a seguir:

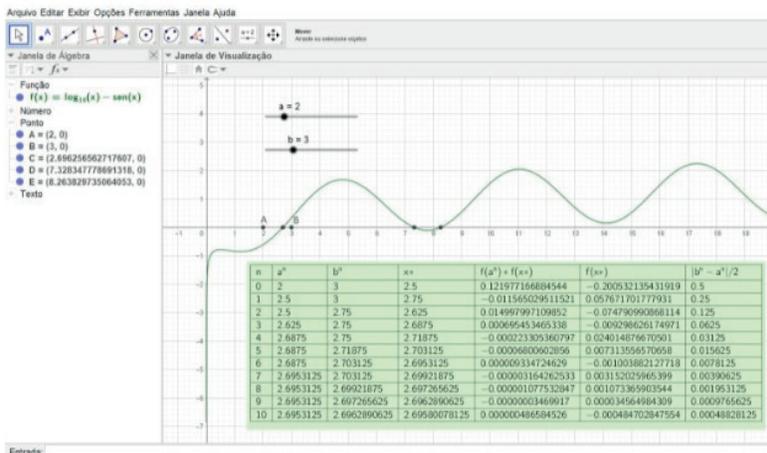


Figura 9: Método de Bissecção implementado no GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Com esta construção o usuário pode determinar as outras raízes manipulando apenas os controles deslizantes, determinado novos intervalos que as contenham. Além disso, caso o usuário altere a lei da função, todos os demais campos construídos na planilha e sua representação na Janela de Visualização serão alterados automaticamente.

Esta é uma das vantagens de utilizar o GeoGebra em detrimento a outros editores de planilha, pois nestes a cada mudança na lei da função o usuário deve atualizar quase todas as fórmulas manualmente. A possibilidade de visualizar numa mesma tela todos estes resultados é outra possibilidade que se torna interessante para o usuário, pois assim a sua atenção está focada em um único programa.

RAÍZES DE EQUAÇÕES: UMA FERRAMENTA DISPONÍVEL

Apresentamos neste trabalho uma ferramenta construída no GeoGebra com o intuito de auxiliar na discussão dos métodos iterativos para determinação das raízes de equações por meio dos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes. Esta ferramenta está disponível no endereço eletrônico: <https://danmartins.com.br/recursos-educacionais>.

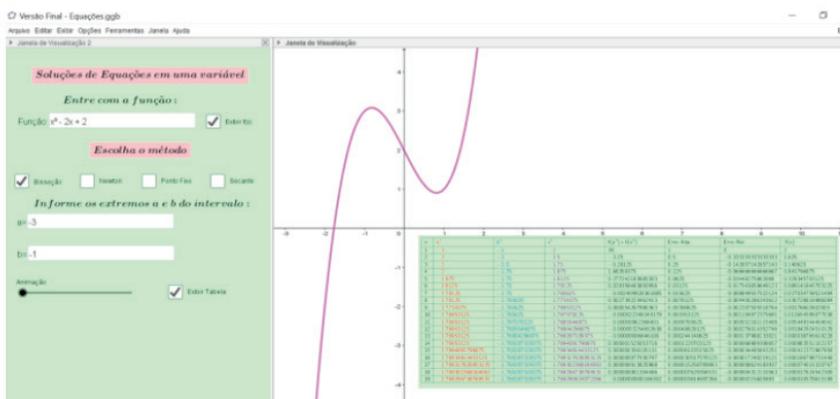


Figura 10: Versão final do aplicativo construído no GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Esta ferramenta conjuga duas janelas para apresentar resultados e análise dos métodos supracitados. Na primeira janela o usuário insere elementos necessários tais como a função associada a equação e os valores iniciais para o processo de iteração em cada método. Ainda é possível, por meio das caixas de seleção, escolher qual método será utilizado para resolver o problema e assim observar qual método converge mais rápido.⁴

⁴ De modo geral o método de Newton é o que possui uma convergência mais rápida (convergência quadrática). O método de Bisseção e Ponto Fixo possuem convergência linear e o método da Secante dada por $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$.

Além disso, com a utilização do controle deslizante que possui o nome de “Animação”, disponível em todos os métodos, o usuário pode observar o comportamento das aproximações obtidas em cada iteração. Essa visualização pode tornar-se importante durante o estudo dos métodos, entendendo assim a suas motivações geométricas.

Na Figura 11, por exemplo, apresentamos dois resultados diferentes obtidos ao usar o método de Ponto Fixo para determinar a raiz da função $f(x) = x^3 - 2x + 2$, juntamente com a animação construída com o controle deslizante:

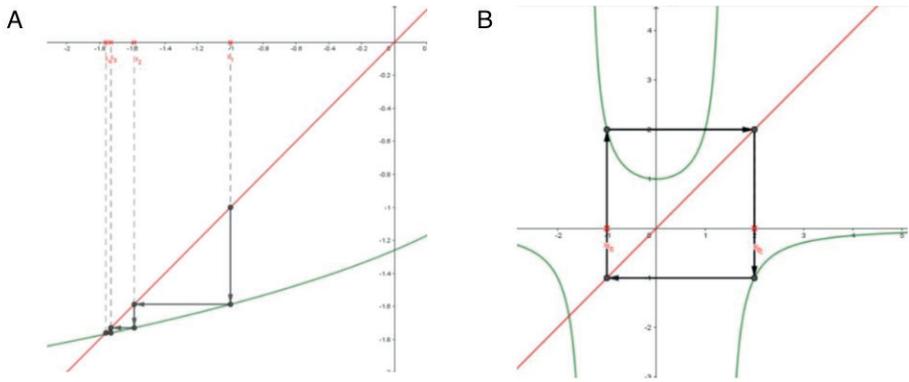


Figura 11:A – Solução convergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = \sqrt[3]{2x-2}$ e $x^{(1)} = -1$. B – Solução divergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = -\frac{2}{x^2-2}$ e $x^{(1)} = -1$.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Dessa forma, a animação pode auxiliar os usuários a observar a convergência do método ao escolher uma função de iteração $g(x)$. Inclusive permite o usuário analisar para diferentes valores iniciais da iteração se a função $g(x)$ adotada convergirá ou não para a solução do problema, como no caso da Figura 11B em que a função de iteração não converge para a solução independentemente do valor inicial utilizado. Entretanto, cabe a ele observar e deduzir algebricamente o porquê do método não converge para a solução ao adotar tal função⁵. Dessa forma, o aplicativo auxilia na determinação destas funções de iteração convergentes ou divergentes, por meio da inspeção visual. Ainda sobre as funções de iteração convergentes pode-se observar aquela que possivelmente apresentará uma convergência mais rápida ao analisar os valores tabelados.

Estudar estes métodos é um constante retorno ao estudo das teorias do Cálculo Diferencial. Por exemplo, ao estudar o método de Newton que emprega a utilização da derivada da função no processo iterativo, podemos recriar a situação apresentada na Figura 12:

5 Vide Teorema da Convergência de funções de iteração em Ruggiero e Lopes (1996, p. 58-59)

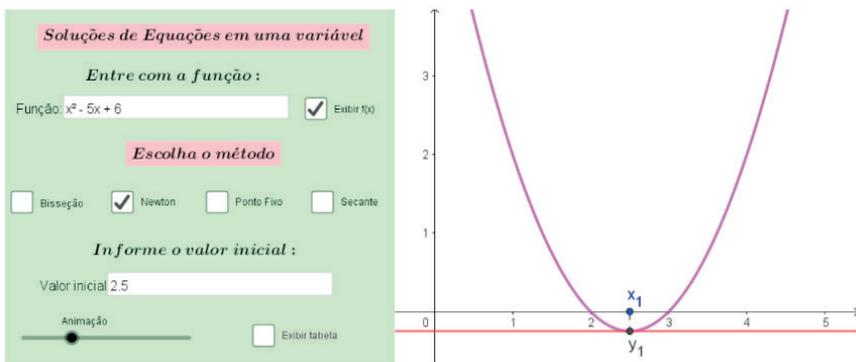


Figura 12: Utilizando o Método de Newton para discutir conceitos de Cálculo Diferencial.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Quando o usuário tiver compreendido a motivação geométrica do método de Newton poderá fazer as devidas conexões com os conceitos discutidos nas aulas de Cálculo Diferencial.

Podemos ainda exemplificar o problema de determinar as raízes da função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ e discutir com os alunos a razão de não ser possível usar o método de Bisseção, uma vez que não é garantido as condições do Teorema de Bolzano. Como se observa na Figura 13 a seguir, a animação construída com as aproximações determinadas pelo método evidencia que não conseguimos construir uma sequência convergente para determinar a raiz da equação.

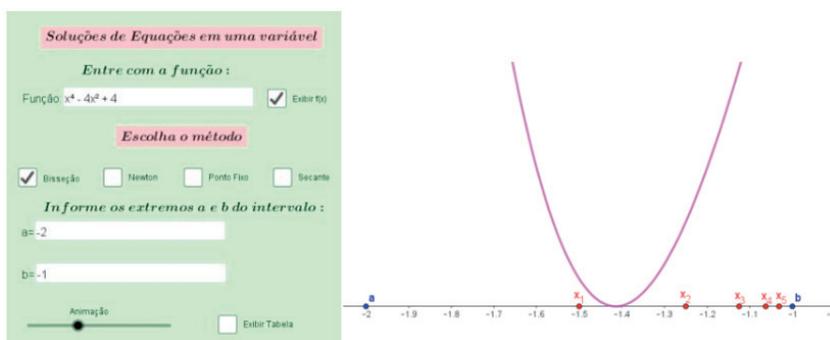


Figura 13: Método de Bisseção aplicado em intervalo da função que não atende o Teorema de Bolzano.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Entretanto, ao utilizar os outros métodos que não exigem as especificidades impostas pelo Teorema de Bolzano, o aluno conseguirá determinar a solução do problema. Assim, confrontando as teorias estudadas e os modelos visuais construídos, com o auxílio do aplicativo, podemos auxiliar a aprendizagem dos nossos alunos.

Para finalizar, salientamos que os valores determinados e apresentados nas tabelas neste aplicativo estão idênticos aos que foram determinados por meio de algoritmos utilizando o *software* livre *Scilab*. Portanto, embora o aplicativo tenha a limitação no número de iterações estas estão em concordância com os resultados obtidos em programas numéricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O questionamento que levou a realização deste trabalho esteve vinculado a: por que utilizar o GeoGebra no estudo dos métodos numéricos para determinação de raízes de equações? Ao final, esperamos ter contribuído para que os interessados sobre o assunto tenham percebido estas possibilidades.

Defendemos o uso do GeoGebra nestas situações devido aos benefícios apresentados anteriormente e a outros que destacaremos aqui. Primeiramente, o uso do GeoGebra torna fácil e automático o estudo de outras funções, pois ao alterá-la e os valores iniciais utilizados em cada método, os cálculos construídos na planilha são automaticamente modificados, diferente do que acontece nos outros editores de planilhas que necessitam alterar as fórmulas a cada momento de teste.

Segundo, da mesma forma que os alunos constroem as tabelas nos editores de planilha, eles poderão também fazer no GeoGebra e assim entender o procedimento empregado para não tornar o ensino destes conteúdos tão mecânicos, com o simples apertar de botões. Embora tenhamos apresentado no início um comando que determina uma aproximação para as raízes deve-se entender que tal procedimento não substitui a construção das planilhas, é apenas um recurso que pode apoiar a aprendizagem do aluno durante os seus estudos.

Além disso, alguns cursos de Licenciatura em Matemática não preveem na sua grade curricular disciplinas de linguagem de programação de computadores. Portanto, para estes casos torna-se um desafio ao professor ensinar o método e ainda uma linguagem de programação para construir algoritmos que realize estes cálculos numéricos. Dessa forma, o GeoGebra torna-se um aliado por tornar essa aprendizagem mais fácil para os alunos e para o trabalho do professor. Embora tal fato não seja limitador para esta discussão, talvez seja interessante uma abordagem mista.

Outro fator a ser considerado é a popularidade que o GeoGebra possui nos cursos de Licenciatura em Matemática. É bem provável que a maioria, se não todos, os alunos destes cursos já tiveram contato em algum momento com o software, seja para estudo

pessoal ou para construção de material didático.

Consideramos que o GeoGebra possui as suas limitações, como indicado em Bortolossi, Pesco e Rezende (2012). Entretanto, será útil usá-lo pelos recursos visuais e dinamicidade, inclusive para observar as motivações geométricas em cada método, conforme ilustramos na ferramenta construída e disponibilizada.

Assim, esperamos que este trabalho sirva para motivar interessados sobre o assunto a pesquisarem mais sobre estas possibilidades, assim como, ampliar as discussões que aqui apresentamos.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, F. D. M.; RAMOS, M. W. A. **Métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem por meio de um applet do GeoGebra**. PMO, v.8, n.1, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo82>

BORTOLOSSI, H. J.; PESCO, D. U.; REZENDE, W. M. **Computação simbólica com o software gratuito GeoGebra**. Anais. Conferência Latinoamericana de GeoGebra. Uruguai, 2012. p. 29-34. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/22.pdf>

BORUCH, I. G. S; SCALDELAI, D. **Método de Newton para resolução de sistemas não lineares: uma abordagem gráfica no software GeoGebra**. Anais do II Colbeduca. Joinville, SC. p. 485 – 497. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8144/6115>

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

GUIMARÃES, Y. P. B. Q.; MIRANDA, D. F. **Estudo de métodos numéricos para resolução de integrais com o uso dos softwares VCN e GeoGebra**. Anais. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, BA. Disponível em: <http://docplayer.com.br/148782414-Estudo-de-metodos-numericos-para-resolucao-de-integrais-com-o-uso-dos-softwares-vcn-e-geogebra.html>

JUNIOR, R. R. O; ABBEG, T. P. **História, resolução numérica e GeoGebra o ensino de equações algébricas**. PMO, n.1, v.4, 2016. Disponível em: <http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-ortega-junior-e-abbeg.pdf>

JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. A. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo – Versão Scilab**. 2019. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico>.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª ed. São Paulo. Makron Books, 1996.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra 9, 18, 63, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 154, 189, 190, 203, 204, 227

Anos Iniciais 7, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 80, 81, 88, 89, 120, 121, 126, 128, 226, 227

Aplicativo online 9, 187, 188, 204

Aprendizagem 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 23, 25, 26, 27, 33, 35, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 85, 89, 92, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 160, 163, 164, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 205, 206, 211, 212, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 223, 224, 226, 234, 235, 236, 237, 239

Aprendizagem Matemática 9, 26, 60, 118, 119, 125, 154, 164, 167, 175, 183, 184

Aproximação de Raízes 44

Atenuação da perturbação 273

Auditoria de Contas 10, 266, 267, 271

B

Biografia 13, 91, 93, 94, 102, 103

Brincadeiras 8, 118, 120, 125, 126, 127, 150

C

Caos 10, 241, 242, 246, 251, 252

Condução de Calor 104, 105, 228

Controle Preditivo 273

D

Deficiente visual 9, 214, 215, 216, 218, 219, 221, 222, 223

Derivada compatível 254, 256, 263, 264, 265

Detecção de Fraudes 266, 267

Determinantes 9, 163, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 204

Diagramas de Vergnaud 110

Diferença de Hukuhara 254, 260

Dificuldades 5, 7, 9, 13, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 68, 70, 72, 92, 93, 121, 123, 124, 126, 138, 139, 143, 144, 145, 149, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 169, 174, 177, 183, 184, 189, 190, 199, 200, 201, 202, 214, 217, 224, 225, 227, 233

Dificuldades do Ensino 35, 36, 39, 40, 121

Dinâmica não linear 10, 241, 242

Discalculia 7, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70

Disciplina de Matemática 35, 36, 40, 216

Distribuição de Newcomb-Benford 10, 266, 270, 271

Docentes 5, 35, 36, 40, 42, 102, 120, 121, 124, 125, 127, 128, 137, 151, 154, 156, 157, 164, 167, 168, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 186, 212, 213, 216, 222, 233, 237, 238, 239

E

Educação Matemática 11, 26, 37, 58, 80, 81, 83, 92, 118, 134, 156, 161, 163, 164, 167, 203, 204, 212, 213, 223, 237, 239, 240, 282

Ensino 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 68, 69, 70, 89, 91, 92, 93, 102, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 179, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 282

Ensino-Aprendizagem 39, 43, 44, 92, 130, 132, 139, 140, 143, 144, 146, 148, 172, 185, 189, 190, 201, 212

Ensino de Matemática 9, 10, 12, 23, 25, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 91, 128, 132, 134, 140, 144, 146, 158, 162, 202, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 214, 215, 218, 222, 223, 233, 237, 282

Ensino de Química 8, 130, 131, 132, 133, 134, 137, 140, 141

Escrita de números 63, 80, 85

Estabilidade Dinâmica 273

Estágio 109, 158, 171

Estatística 71, 72, 79, 103, 166, 186, 265, 282

Estratégias 9, 164, 175

Estruturas Aditivas 8, 109, 110, 111, 116, 117

Excel 8, 46, 49, 109, 111, 112, 114, 115, 116, 117

Expoente de Lyapunov 241, 251, 253

F

Formação Continuada 80, 86, 109, 111, 167, 171, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 189, 205, 219

Formação inicial de professores de Matemática 1, 233

Funções Elípticas 91, 98, 101

G

Gauss-Seidel 104, 105, 106, 228, 229, 230, 231

GeoGebra 7, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 58

Geometria Euclidiana 7, 12, 18, 21, 24, 159, 160

Geometria Não Euclidiana 12

H

História da Matemática 12, 13, 14, 23, 24, 91, 92, 93, 96, 102, 103, 155, 217, 224, 237

I

Inclusão 5, 3, 59, 60, 67, 69, 70, 91, 102, 188, 202, 214, 215, 218, 223

Interdisciplinaridade 8, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141

Inversão de matrizes 187, 188, 190, 194, 198, 200

Investigação Matemática 9, 143, 144, 146, 147, 148, 153, 154

J

Jogos 8, 10, 25, 27, 33, 42, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 180, 184, 225, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 238

Jogos Digitais 10, 233, 234, 235, 236, 237, 238

L

Lúdico 25, 26, 30, 41, 42, 118, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 141

M

Matemática 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 265, 282

Método das Diferenças Finitas 104, 106, 228, 229, 230

Metodologias inovadoras de ensino 118

Métodos Numéricos 7, 44, 45, 46, 57, 58, 104, 105, 243

Modelagem de dados 71

Motivação 56, 63, 67, 88, 118, 119, 123, 134, 166, 167, 211

N

Niels Henrik Abel 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103

Números Fuzzy 254, 259

O

Outliers 71, 72

P

Perspectiva CTS 205

Perspectivas 9, 91, 92, 101, 102, 128, 156, 157, 159, 171, 180, 227, 240

Pesquisa na formação do professor de Matemática 1

Postura investigativa na formação do professor de Matemática 1

Práticas Pedagógicas 60, 65, 66, 68, 69, 81, 156, 157, 167, 183

Probabilidade 29, 30, 71, 72, 73, 78, 79, 138, 141, 257, 268

Projeto de sistemas de controle 273

R

Rastreamento de Referência 273

Recursos didáticos 8, 80, 81, 88, 89, 102, 215, 218, 223

S

Sala de recurso 59

Sistema de Numeração Decimal 80, 82, 85, 87, 88, 89, 225

Sistemas Lineares 9, 187, 188, 189, 190, 191, 200, 202, 204

T

Tecnologias da Informação e Comunicação 233, 234, 237, 282

Tendência contemporânea 205

Transtorno 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2