

Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Luca Vieira  
(Organizadores)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Luca Vieira  
(Organizadores)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

**Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

**Bibliotecária**

Janaina Ramos

**Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

**Imagens da Capa**

Shutterstock

**Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

**Revisão**

Os Autores

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2021 Os autores

Copyright da Edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

**Conselho Editorial**

**Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Ivone Goulart Lopes – Instituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco

Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais  
Prof. Me. Aleksandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar

Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein  
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Me. Fabiano Eloy Atilio Batista – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR

Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Lilians Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior  
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba  
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana  
Prof<sup>ª</sup> Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista



**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecária:** Janaina Ramos  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Correção:** Mariane Aparecida Freitas  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizadores:** Américo Junior Nunes da Silva  
 André Ricardo Luca Vieira

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF  
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader  
 Modo de acesso: World Wide Web  
 Inclui bibliografia  
 ISBN 978-65-5706-856-4  
 DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

**Atena Editora**  
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
 Telefone: +55 (42) 3323-5493  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

## APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, na que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

***Pesquisa em Matemática***", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

## REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. [org/10.29327/217514.7.1-5](https://doi.org/10.29327/217514.7.1-5). **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: <http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430>. Acesso em: 10 fev. 2021.

## SUMÁRIO

### **CAPÍTULO 1..... 1**

#### **O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA**

Celina Amélia da Silva

Carmen Teresa Kaiber

**DOI 10.22533/at.ed.5642108031**

### **CAPÍTULO 2..... 12**

#### **GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS**

Adan Rodrigo Vale Pacheco

Fábio Barros Gonçalves

Miguel Chaquiam

**DOI 10.22533/at.ed.5642108032**

### **CAPÍTULO 3..... 25**

#### **PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM**

Wharton Martins de Lima

Davis Rytley Lira Martins

Jamilson Pinto de Medeiros

João Pedro Nogueira da Silva

Sérgio Barbosa da Penha

William Gomes dos Santos

**DOI 10.22533/at.ed.5642108033**

### **CAPÍTULO 4..... 35**

#### **AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Francisca Missilene Muniz Magalhães

Pedro Franco de Sá

**DOI 10.22533/at.ed.5642108034**

### **CAPÍTULO 5..... 44**

#### **UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS**

Daniel Martins Nunes

Fábio Mendes Ramos

**DOI 10.22533/at.ed.5642108035**

### **CAPÍTULO 6..... 59**

#### **DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7º ANO**

Emilim Caroline Canabarro

Lucieli Martins Gonçalves Descovi

**DOI 10.22533/at.ed.5642108036**

<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>71</b>
DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES	
Beatriz Nascimento Gomes	
Altemir da Silva Braga	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5642108037</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>80</b>
RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS	
Helena Dória Lucas de Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5642108038</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS	
Dayson Wesley Lima Castro	
Arlison da Conceição Rocha	
Natanael Freitas Cabral	
Miguel Chaquiam	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5642108039</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA	
Giovanni Santos	
Mairon Carliel Pontarolo	
Sebastião Romero Franco	
<b>DOI 10.22533/at.ed.56421080310</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>109</b>
CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS	
Ana Emilia de Melo Queiroz	
<b>DOI 10.22533/at.ed.56421080311</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>118</b>
UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
José Roberto Costa	
Vanessa Tluscik dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.56421080312</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>130</b>
A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGICA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL	
Catiex Rodrigues de Souza	
Adelmo Carvalho da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.56421080313</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>143</b>
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA Wanderlei Verissimo Thiago Fanelli Ferraiol <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080314</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>156</b>
DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA Gustavo Pereira Gomes Bianca Menezes Campos <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080315</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>164</b>
A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA Elivane Leandro da Silva Lucianne Oliveira Monteiro Andrade Marcelo de Sousa Coêlho <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080316</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>187</b>
ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE Cristiane Martins Fernandes Tavares Edson Leite Araújo <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080317</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>205</b>
O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA Eliana Alves Arxer Dulcimeire Aparecida Volante Zanon <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080318</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>214</b>
UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR Adriana Stefanello Somavilla Luani Griggio Langwinski Leonardo Silguero Pimentel <b>DOI 10.22533/at.ed.56421080319</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>225</b>
CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO Adriana de Jesus Gabilão	

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra

Renata Forti Braga

**DOI 10.22533/at.ed.56421080320**

**CAPÍTULO 21.....228**

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM SOLVER LINHA**

Mairon Carliel Pontarolo

Giovanni Santos

Sebastião Romero Franco

**DOI 10.22533/at.ed.56421080321**

**CAPÍTULO 22.....233**

**O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS**

Vilma Luísa Sieglloch Barros

**DOI 10.22533/at.ed.56421080322**

**CAPÍTULO 23.....241**

**ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER**

Henry Otavio Fontana

Thiago Gilberto do Prado

Vinícius Piccirillo

**DOI 10.22533/at.ed.56421080323**

**CAPÍTULO 24.....254**

**UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL**

Fernando Santos Silva

Ana Paula Perovano

**DOI 10.22533/at.ed.56421080324**

**CAPÍTULO 25.....266**

**DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS**

Thiago Schinda Bubniak

Inácio Andruski Guimarães

Sonia Maria de Freitas

**DOI 10.22533/at.ed.56421080325**

**CAPÍTULO 26.....273**

**COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION**

Rejane de Barros Araújo

Antonio Augusto Rodrigues Coelho

**DOI 10.22533/at.ed.56421080326**



<b>SOBRE OS ORGANIZADORES .....</b>	<b>282</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO.....</b>	<b>283</b>

## DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 05/01/2021

### Beatriz Nascimento Gomes

Universidade Federal do Acre, Centro de  
Ciências Exatas e Tecnologias  
Rio Branco – Acre  
<http://lattes.cnpq.br/5715013292960020>

### Altemir da Silva Braga

Universidade Federal do Acre, Centro de  
Ciências Exatas e Tecnologias  
Rio Branco – Acre  
<http://lattes.cnpq.br/2867664802722518>

**RESUMO:** Na estatística, distribuições de probabilidade com demonstrações matemáticas, estudos de simulação computacional e com aplicações em casos reais são criadas rotineiramente. Este trabalho trata-se de uma distribuição simétrica chamada Odd Log Logística Cauchy – OLL Cauchy, sendo esta uma extensão do modelo Cauchy, porém contendo um parâmetro adicional de forma. Ao longo do trabalho, ver-se-á expansões e propriedades matemáticas demonstradas, como a função quantílica e a aplicação do método máxima verossimilhança. Esta distribuição é adequada quando é identificado *outliers*. O modelo foi aplicado em um estudo de delineamento inteiramente casualizado, onde se queria comparar tratamentos e, para isso, foi utilizado testes de hipóteses. Neste estudo, o modelo OLL Cauchy apresentou bons resultados, portanto,

pode ser recomendado para modelar dados com problemas de outliers.

**PALAVRAS - CHAVE:** Estatística. Probabilidade. Outliers. Modelagem de dados.

### ODD DISTRIBUTION CAUCHY LOG-LOGISTIC: THEORY AND APPLICATIONS

**ABSTRACT:** In the statistics, probability distributions with mathematical demonstraior, computational simulation approach and real cases applications are made commonly. This article shows a symmetric distribution named Odd Log-Logistic Cauchy – OLL Cauchy, extending Cauchy model, but with an shape additional parameter. Throughout, mathematical expantion e properties are demonstrated as quantilic function and maximum likelihood method. This model is appropriate when outliers are identified in completely randomized design study which treatments were comparated and for that hyphotesis test were made. In this work, OLL Cauchy model showed good results, therefore, it may be recommended to solve data with outliers.

**KEYWORDS:** Statistics. Probability. Outliers. Data modelling.

## 1 | INTRODUÇÃO

A estatística é utilizada pelas mais diversas áreas com o objetivo de coletar, organizar, descrever e realizar análise de dados, sejam eles amostrais ou oriundos de experimentos.

Um problema comum de se encontrar na

estatística paramétrica são os *outliers*, que são valores atípicos. A presença desses valores pode ocasionar inferências erradas no resultado da pesquisa. Duas formas de tratá-los corretamente são: aplicar a estatística paramétrica ou a técnica de transformação de dados. As técnicas mais utilizadas são a logarítmica, raiz quadrada, transformação angular, dentre outras (BARBIN, SPANÓ, *et al.*, 2000).

Este estudo traz uma nova distribuição de probabilidade cujo objetivo é modelar *outliers* e solucionar possíveis problemas de homogeneidade de variância, outro problema comum quando se faz análise de variância. Este modelo foi intitulado como Odd Log-Logística – Cauchy por ser uma extensão do modelo Cauchy, possuindo, também, um parâmetro adicional de forma. Por fim, o modelo foi aplicado em um ensaio inteiramente casualizado que avaliava o efeito do teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja. A partir do ensaio, foi ajustado um modelo de regressão, que tem como objetivo verificar a relação existente entre os efeitos das covariáveis e a variável resposta, através de uma função matemática.

Na estatística experimental, a distribuição normal é mais utilizada, porém apresenta dificuldades no tratamento de *outliers* ou assimetrias (SERLE, CASELLA E McCULLOH, 2009). Comparado ao modelo *t-Student*, o Log-Logística Cauchy é mais flexível e simétrico.

Ao longo do trabalho, expansões matemáticas foram desenvolvidas e para estimar os parâmetros foi utilizado o método da máxima verossimilhança. O modelo foi aplicado em um ensaio inteiramente casualizado, em que foi feito teste de hipóteses de contrastes de diferenças entre médias ao nível de 5% de probabilidade.

## 2 | MÉTODOS

Alzaatreh, Famoye e Lee (2013) propuseram uma família de distribuições T-X. Seja  $r(s)$  uma função densidade de probabilidade (fdp) de variável aleatória  $T \in [a, b]$ , para  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Seja  $W(F(x))$  uma função de uma fdp  $F(x)$  de uma variável aleatória  $X$ , então  $W(F(x))$  satisfaz as seguintes condições:

- $W(F(x)) \in [a, b]$ ;
- $W(F(x))$  é diferenciável e monotonicamente não-decrescente;
- $W(F(x))$  tende para  $a$  assim como  $x$  tende para  $-\infty$  e, também,  $b$  assim como  $x$  tende para  $\infty$ .

Considere  $X$  uma variável aleatória com fdp  $f(x)$  e uma função de distribuição cumulativa (cdf)  $F(x)$ . Seja  $T$  uma variável aleatória contínua com uma fdp  $r(s)$  definida em  $[a, b]$ . Seja a função cdf uma nova família de distribuição definida por:

$$\int_a^{W[G(Y)]} r(s) ds .$$

Em que  $W[G(x)] = \frac{G(x; \mu, \sigma)}{G^*(x; \mu, \sigma)}$ ,  $G(x; \mu, \sigma) = 1 - G^*(x; \mu, \sigma)$  e  $r(s) = \frac{\alpha s^{\alpha-1}}{(1+s^\alpha)^2}$ , para  $s > 0$ .

A função densidade de probabilidade Cauchy é dada por:

$$g(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma(1+z^2)} . \quad (1)$$

Em que  $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  é o parâmetro de locação e  $\sigma > 0$  é o parâmetro de escala. A distribuição padrão Cauchy é  $\mu=0$  e  $\sigma=1$ , em que a função distributiva (fd) é:

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \quad (2)$$

Foi definida uma extensão da distribuição Cauchy, com caudas mais pesadas que a *t-Student*, chamada de Odd Log Logística Cauchy (OLL-Cauchy). A sua função distribuição de probabilidade é:

$$F(x; \mu, \sigma, \alpha) = \int_0^{W[G(Y)]} \frac{\alpha s^{\alpha-1}}{(1+s^\alpha)^2} ds = \frac{G^\alpha(x; \mu, \sigma)}{G^\alpha(x; \mu, \sigma) + [1 - G(x; \mu, \sigma)]^\alpha} \quad (3)$$

Considerando um parâmetro  $\alpha > 0$  e derivando a função anterior, é obtida a fdp da OLL-Cauchy. Sendo esta:

$$f(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{\alpha \left(\Gamma + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2} - \Gamma\right)^{\alpha-1}}{\pi\sigma(1+z^2) \left[ \left(\Gamma + \frac{1}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{2} - \Gamma\right)^\alpha \right]^2} \quad (4)$$

onde  $\Gamma = \frac{1}{\pi} \arctan(z)$ .

O parâmetro adicional de forma,  $\alpha$ , é calculado da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{F(x; \mu, \sigma, \alpha)}{F^*(x; \mu, \sigma, \alpha)}\right)}{\log\left(\frac{G(x; \mu, \sigma, \alpha)}{G^*(x; \mu, \sigma, \alpha)}\right)}.$$

A figura abaixo mostra algumas formas da função (4) e é feita uma comparação do modelo deste trabalho com o modelo normal e *t-Student*. Na figura (a), o modelo OLL-Cauchy apresenta caudas mais pesadas para valores de  $x$ , aproximadamente, menores que -2,5 e maiores que 2,5.

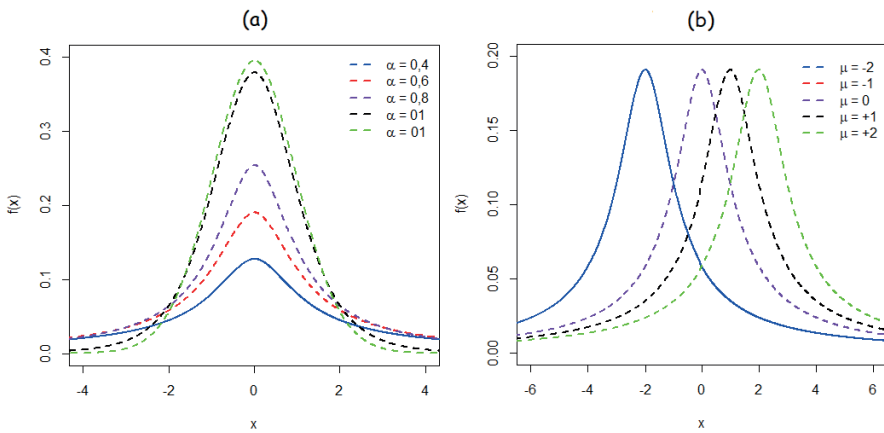


Figura 1: (a) representa o modelo OLL Cauchy e os modelos normal e *t-Student*; (b) representa o modelo OLL Cauchy com  $\alpha$  fixo.

A função quantílica foi utilizada para os estudos de simulação e análise de resíduos. Esta função é dada como se segue.

$$Q(u) = G(x; \mu, \sigma) [h(u; \alpha)],$$

em que  $u \sim U(0,1)$  e  $G(x; \mu, \sigma)$  é a função quantílica do modelo OLL-Cauchy. O componente  $[h(u; \alpha)]$  é dado por:

$$h(u; \alpha) = u^{\frac{1}{\alpha}} \left[ u^{\frac{1}{\alpha}} + (1-u)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{-1}.$$

## 2.1 Expansões do Modelo Oil-Cauchy

Por definição, a exponenciada (“Exp-G”) de distribuição  $\Phi(x)$ ,  $Cauchy \sim Exp^c G$ , dada por:

$$H_c(x) = \Phi(x)^c \quad \text{e} \quad h_c(x) = c\phi(x)^c \Phi(x)^{c-1}$$

É desejada uma combinação linear para a função  $F(x)$ . Para isso, foi utilizado uma série de potências dada por:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k \quad \text{com} \quad a_k = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{k+j} \binom{a}{j} \binom{j}{k}$$

Considerando a binomial generalizada expandida, tem-se:

$$(1-z)^b = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b}{j} z^j.$$

Após fazer algumas transformações, finalmente  $F(x)$  passa a ser:

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{b}{k} \Phi(x)^k}$$

A fim de simplificação, considere:

$$b_k = \left[ a_k + (-1)^k \binom{a}{k} \right].$$

Portanto,

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}.$$

Por fim,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi(x)^k \quad \text{em que} \quad c_k = b_0^{-1} \left( a_k + b_0^{-1} \sum_{r=1}^k b_r c_{k-r} \right).$$

Derivando  $F(x)$  tem-se a fdp  $X$  expressa por uma combinação linear dada por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} h_{k+1}(x),$$

em que  $h_{k+1}(x) = (k+1)\Phi(x)^k \phi(x)$ .

## 2.2 Estimação por Máxima Verossimilhança para o Modelo OII Cauchy

Sob a suposição de que os resíduos seguem uma distribuição  $OLLCauchy(x; \sigma; \alpha)$ , um modelo de regressão foi ajustado. Usualmente, o modelo normal é preferível pelos profissionais das mais diversas áreas. Contudo, em decorrência da presença dos valores extremos, a distribuição normal pode ser considerada inadequada. Portanto, é apresentado a função log-verossimilhança do modelo  $OLLCauchy(x; \sigma; \alpha)$ , destacando os testes de hipóteses e intervalo de confiança.

De forma geral, o modelo de um ensaio inteiramente casualizado tem a seguinte forma:

$$Y_{ij} = m + \tau_t + \sigma \varepsilon_{ij},$$

em que  $Y_{ij}$  representa o valor esperado do tratamento  $t$ ;  $m$  é o efeito da média geral;  $\tau_t$  é o efeito do tratamento  $t$  e  $\varepsilon_{ij} \sim OLLCauchy(0; \sigma; \alpha)$  representa os efeitos que não possuem controle do ensaio experimental. Os iteradores  $t = 1, 2, \dots, I$  e  $j = 1, \dots, J$ , onde o primeiro se refere ao número de tratamentos e o segundo ao número de repetições.

Considere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra aleatória da distribuição  $OLLCauchy(x; \sigma; \alpha)$ ; um vetor de parâmetros  $\theta = (m, \tau^r, \sigma, \alpha)^r$ , em que  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Desta forma, o logaritmo da função verossimilhança é:

$$l(\theta) = I \left[ \log \left( \frac{\alpha}{\pi \sigma} \right) \right] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \log \left[ \frac{\left( \Gamma_{ij} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \Gamma_{ij} \right)}{\left( \Gamma_{ij} + z_{ij}^2 \right)} \right] \right\} - 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \log \left[ \left( \Gamma_{ij} + \frac{1}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1}{2} - \Gamma_{ij} \right)^\alpha \right]^2 \right\}.$$

Maximizando esta equação, é possível encontrar as estimativas da máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$ . Para chegar nesta equação, foi utilizado uma ferramenta computacional denominada R. Através do pacote "Optim", os métodos Nelder-Mead e L-BFGS-B foram implementados. Fez-se necessário encontrar as componentes do vetor score  $U(\theta)$ . A função log verossimilhança foi derivada em relação a  $m, \mu, \tau, \sigma, \alpha$ . As componentes do vetor score são  $U_m(\theta); U_n(\theta); U_o(\theta); U_p(\theta)$ . Igualando essas equações a zero e resolvendo-

as, obtêm-se as estimativas da máxima verossimilhança.

Para encontrar o intervalo de confiança, ICR, considera-se que o vetor de parâmetros  $\theta$ , em seu espaço paramétrico, tem uma distribuição assintótica  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  normal multivariada  $N_{r+4}(0, K(\theta)^{-1})$  em que  $K(\theta)$  é uma matriz da informação esperada. As inferências assintóticas para os vetores de parâmetros  $\theta$  podem ser feitas utilizando aproximação normal e os erros-padrão podem ser obtidos pela raiz quadrada dos elementos da diagonal principal da inversa da matriz de informação observadas. Desta forma, hipóteses podem ser formuladas e testadas.

A comparação de diferenças de tratamentos foi realizada através de intervalos de confiança restringindo as colunas da matriz de delineamento experimental. Utiliza-se um *Trat* como referência, o iguala a zero e compara todos os outros tratamentos em relação a ele. A linguagem R fornece uma função chamada “*relevel(,)*” que permite fazer essas restrições.

### 2.3 Aplicação no Ensaio Inteiramente Casualizado

O ensaio se tratou da avaliação do efeito de teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja considerando 7 tratamentos chamados de *Trat\_1*, *Trat\_2*, *Trat\_3*, *Trat\_4*, *Trat\_5*, *Trat\_6* e *Trat\_7*. A figura 2 traz um resumo estatístico destes tratamentos.

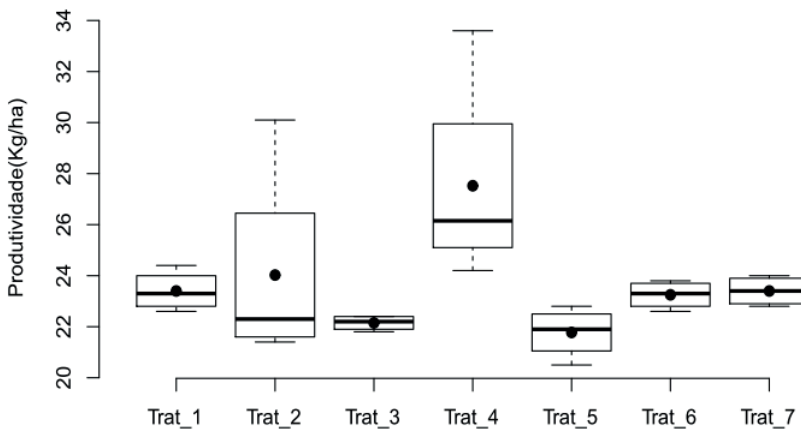


Figura 2: boxplot para cada tratamento.

É possível ver que em alguns tratamentos (*Trat\_1*, *Trat\_2* e *Trat\_4*) a média ficou acima da mediana e o restante ficou praticamente igual. Portanto, o modelo normal se apresentou inadequado para este caso, além da possível violação da homogeneidade exigida na análise de variância. Neste caso, o modelo apresentado neste trabalho, Odd



Log Logística Cauchy (OLL Cauchy), pode ser utilizado a fim de ajustar o teor de boro e enxofre nas produções de grão de soja.

A tabela abaixo mostra as estimativas de máxima verossimilhança para os contrastes de duas médias e os respectivos intervalos de confiança ao nível de 5% de probabilidade. Quando o ICR engloba o 0 (zero), quer dizer que, estatisticamente, os tratamentos são iguais a zero.

Hipóteses	Estimativas	$IC_{Inf}$	$IC_{Sup}$	Hipóteses	Estimativas	$IC_{Inf}$	$IC_{Sup}$
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	-1.1392	-1.9228	-0.3556	$H_0:\tau_1 - \tau_2 = 0$	0.2306	-0.7724	1.2336
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	-1.3216	-2.0120	-0.6312	$H_0:\tau_2 - \tau_0 = 0$	-1.1956	-2.2226	-0.1687
$H_1:\tau_4 - \tau_1 = 0$	2.9432	2.2814	3.6050	$H_0:\tau_4 - \tau_2 = 0$	3.1143	2.1234	4.1052
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	0.3127	-0.6092	1.2346	$H_0:\tau_2 - \tau_2 = 0$	0.2634	-0.7174	1.2442
$H_1:\tau_0 - \tau_1 = 0$	0.2200	-0.5144	0.9544	$H_0:\tau_0 - \tau_2 = 0$	0.2324	-0.7255	1.1903
$H_1:\tau_7 - \tau_1 = 0$	-0.9595	-1.5705	-0.3486	$H_0:\tau_7 - \tau_2 = 0$	-0.7591	-1.6680	0.1498
$H_1:\tau_1 - \tau_1 = 0$	0.4091	-0.5116	1.3298	$H_0:\tau_1 - \tau_4 = 0$	-1.1067	-2.0274	-0.1860
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	-1.2922	-2.2985	-0.2859	$H_0:\tau_2 - \tau_4 = 0$	-2.3452	-3.3514	-1.3389
$H_1:\tau_4 - \tau_1 = 0$	2.9686	1.9765	3.9606	$H_0:\tau_3 - \tau_4 = 0$	5.5827	4.5906	6.5747
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	0.2729	-0.6278	1.1736	$H_0:\tau_2 - \tau_4 = 0$	-1.3638	-2.2645	-0.4631
$H_1:\tau_0 - \tau_1 = 0$	0.1465	-0.7509	1.0438	$H_0:\tau_0 - \tau_4 = 0$	-1.3091	-2.2064	-0.4118
$H_1:\tau_7 - \tau_1 = 0$	-0.7554	-1.5697	0.0589	$H_0:\tau_7 - \tau_4 = 0$	-2.2708	-3.0851	-1.4565
$H_1:\tau_1 - \tau_1 = 0$	-0.1759	-1.1331	0.7813	$H_0:\tau_2 - \tau_0 = 0$	0.0599	-0.6912	0.8110
$H_1:\tau_2 - \tau_1 = 0$	-1.3995	-2.3587	-0.4402	$H_0:\tau_4 - \tau_0 = 0$	-1.5757	-2.3758	-0.7756
$H_1:\tau_3 - \tau_1 = 0$	-1.6022	-2.5056	-0.6988	$H_0:\tau_3 - \tau_0 = 0$	-1.2454	-2.0436	-0.4473
$H_1:\tau_4 - \tau_1 = 0$	2.6797	1.8153	3.5440	$H_0:\tau_7 - \tau_0 = 0$	2.8264	2.0764	3.5763
$H_1:\tau_0 - \tau_1 = 0$	-0.0869	-1.0133	0.8396	$H_0:\tau_1 - \tau_0 = 0$	0.0646	-0.6597	0.7890
$H_1:\tau_7 - \tau_1 = 0$	-1.2398	-2.0730	-0.4067	$H_0:\tau_2 - \tau_0 = 0$	-0.9330	-1.5688	-0.2971

Tabela 1: Resultado da comparação feita entre os 7 tratamentos.

### 3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nova distribuição de probabilidade, Odd Log Logística Cauchy, estende a distribuição Cauchy adicionando um parâmetro de forma obteve sucesso em um estudo de delineamento inteiramente casualizado, onde a finalidade era comparar o teor de boro e enxofre nas produções de grão de soja. O modelo mostrou-se matematicamente tratável e ajustável em dados que apresentam problemas de homogeneidade. O ajuste da OLL Cauchy foi feito utilizando a ferramenta computacional R para implementar o método da máxima verossimilhança. Provou-se que a distribuição pode ser utilizada em situações práticas de ensaios experimentais, sem pressupostos exigidos pela análise de variância.

Ao nível de 5% de probabilidade, o modelo Odd Log Logística Cauchy forneceu diferenças significativas entre contrastes de duas médias dos tratamentos.

## REFERÊNCIAS

ALZAARETH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **Metron**, v. 1, n. 71, Agosto 2013.

BARBIN, E. L.; SPANÓ, J. C. E.; SILVA, R. S. da; PÉCORÁ, J. D.; Departamento de Odontologia Restauradora. **forp**, 2000. Disponível em: <[http://www.forp.usp.br/restauradora/gmc/gmc\\_livro/gmc\\_livro\\_cap13.html](http://www.forp.usp.br/restauradora/gmc/gmc_livro/gmc_livro_cap13.html)>. Acesso em: 27 Junho 2019.

BRAGA, A. S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; CRUZ, J. N. C. The Odd Log-Logistic Student t Distribution: Theory and Applications. **Journal of Agricultural Biological and Environmental Statistics**, v. 4, n. 22, Agosto 2017.

BRAGA, A. S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E.; CRUZ, J. N. da. The odd log– logistic normal distribution: Theory and applications in analysis of experiments. **Journal of statistical theory and practice**, v. 10, n. 2, p. 311 - 335, Janeiro 2016.

BRYSON, M. C. Heavy-Tailed Distributions: Properties and Tests. **Technometrics**, v. 16, n. 1, p. 61 - 68, Fevereiro 1974.

FAMOYE, F. Continuous Univariate Distributions, Volume 1. **Technometrics**, v. 4, n. 37, p. 466 - 466, Novembro 1995.

LEAL D. P., THALITA K.; VILLELA S., TACIANA; M., Joel Augusto. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, v. 43, n. 5, 2013.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F.A; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**, McGraw-Hill, New York, n. 3 405-406, 1974.

REGAZZI, A. J.; SILVA, C. H. O.. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. I. dados no delineamento inteiramente casualizado. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 22, n. 3, p. 33-45, 2004.

SAMPAIO, A. A. S. Uma Introdução aos Delineamentos Experimentais de Sujeito Único. **Interação em Psicologia**, v. 1, n. 12, p. 151 - 164, Janeiro/Junho 2008.

SEARLE, S.; CASSELLA, G.; MCCULLOUGH, C. Variance Components. **New- York: Jonh Wiley-Sons**. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470316856>, 1992.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Álgebra 9, 18, 63, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 154, 189, 190, 203, 204, 227

Anos Iniciais 7, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 80, 81, 88, 89, 120, 121, 126, 128, 226, 227

Aplicativo online 9, 187, 188, 204

Aprendizagem 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 23, 25, 26, 27, 33, 35, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 85, 89, 92, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 160, 163, 164, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 205, 206, 211, 212, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 223, 224, 226, 234, 235, 236, 237, 239

Aprendizagem Matemática 9, 26, 60, 118, 119, 125, 154, 164, 167, 175, 183, 184

Aproximação de Raízes 44

Atenuação da perturbação 273

Auditoria de Contas 10, 266, 267, 271

### B

Biografia 13, 91, 93, 94, 102, 103

Brincadeiras 8, 118, 120, 125, 126, 127, 150

### C

Caos 10, 241, 242, 246, 251, 252

Condução de Calor 104, 105, 228

Controle Preditivo 273

### D

Deficiente visual 9, 214, 215, 216, 218, 219, 221, 222, 223

Derivada compatível 254, 256, 263, 264, 265

Detecção de Fraudes 266, 267

Determinantes 9, 163, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 204

Diagramas de Vergnaud 110

Diferença de Hukuhara 254, 260

Dificuldades 5, 7, 9, 13, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 68, 70, 72, 92, 93, 121, 123, 124, 126, 138, 139, 143, 144, 145, 149, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 169, 174, 177, 183, 184, 189, 190, 199, 200, 201, 202, 214, 217, 224, 225, 227, 233

Dificuldades do Ensino 35, 36, 39, 40, 121

Dinâmica não linear 10, 241, 242

Discalculia 7, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70

Disciplina de Matemática 35, 36, 40, 216

Distribuição de Newcomb-Benford 10, 266, 270, 271

Docentes 5, 35, 36, 40, 42, 102, 120, 121, 124, 125, 127, 128, 137, 151, 154, 156, 157, 164, 167, 168, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 186, 212, 213, 216, 222, 233, 237, 238, 239

## E

Educação Matemática 11, 26, 37, 58, 80, 81, 83, 92, 118, 134, 156, 161, 163, 164, 167, 203, 204, 212, 213, 223, 237, 239, 240, 282

Ensino 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 68, 69, 70, 89, 91, 92, 93, 102, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 179, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 282

Ensino-Aprendizagem 39, 43, 44, 92, 130, 132, 139, 140, 143, 144, 146, 148, 172, 185, 189, 190, 201, 212

Ensino de Matemática 9, 10, 12, 23, 25, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 91, 128, 132, 134, 140, 144, 146, 158, 162, 202, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 214, 215, 218, 222, 223, 233, 237, 282

Ensino de Química 8, 130, 131, 132, 133, 134, 137, 140, 141

Escrita de números 63, 80, 85

Estabilidade Dinâmica 273

Estágio 109, 158, 171

Estatística 71, 72, 79, 103, 166, 186, 265, 282

Estratégias 9, 164, 175

Estruturas Aditivas 8, 109, 110, 111, 116, 117

Excel 8, 46, 49, 109, 111, 112, 114, 115, 116, 117

Expoente de Lyapunov 241, 251, 253

## F

Formação Continuada 80, 86, 109, 111, 167, 171, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 189, 205, 219

Formação inicial de professores de Matemática 1, 233

Funções Elípticas 91, 98, 101

## G

Gauss-Seidel 104, 105, 106, 228, 229, 230, 231

GeoGebra 7, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 58

Geometria Euclidiana 7, 12, 18, 21, 24, 159, 160

Geometria Não Euclidiana 12

## H

História da Matemática 12, 13, 14, 23, 24, 91, 92, 93, 96, 102, 103, 155, 217, 224, 237

## I

Inclusão 5, 3, 59, 60, 67, 69, 70, 91, 102, 188, 202, 214, 215, 218, 223

Interdisciplinaridade 8, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141

Inversão de matrizes 187, 188, 190, 194, 198, 200

Investigação Matemática 9, 143, 144, 146, 147, 148, 153, 154

## J

Jogos 8, 10, 25, 27, 33, 42, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 180, 184, 225, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 238

Jogos Digitais 10, 233, 234, 235, 236, 237, 238

## L

Lúdico 25, 26, 30, 41, 42, 118, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 141

## M

Matemática 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 265, 282

Método das Diferenças Finitas 104, 106, 228, 229, 230

Metodologias inovadoras de ensino 118

Métodos Numéricos 7, 44, 45, 46, 57, 58, 104, 105, 243

Modelagem de dados 71

Motivação 56, 63, 67, 88, 118, 119, 123, 134, 166, 167, 211

## **N**

Niels Henrik Abel 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103

Números Fuzzy 254, 259

## **O**

Outliers 71, 72

## **P**

Perspectiva CTS 205

Perspectivas 9, 91, 92, 101, 102, 128, 156, 157, 159, 171, 180, 227, 240

Pesquisa na formação do professor de Matemática 1

Postura investigativa na formação do professor de Matemática 1

Práticas Pedagógicas 60, 65, 66, 68, 69, 81, 156, 157, 167, 183

Probabilidade 29, 30, 71, 72, 73, 78, 79, 138, 141, 257, 268

Projeto de sistemas de controle 273

## **R**

Rastreamento de Referência 273

Recursos didáticos 8, 80, 81, 88, 89, 102, 215, 218, 223

## **S**

Sala de recurso 59

Sistema de Numeração Decimal 80, 82, 85, 87, 88, 89, 225

Sistemas Lineares 9, 187, 188, 189, 190, 191, 200, 202, 204

## **T**

Tecnologias da Informação e Comunicação 233, 234, 237, 282

Tendência contemporânea 205

Transtorno 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2