

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2021 Os autores

Copyright da Edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Ivone Goulart Lopes – Instituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Prof^ª Dr^ª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof^ª Dr^ª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^ª Dr^ª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^ª Dr^ª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Dr^ª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Prof^ª Dr^ª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília

Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof^ª Dr^ª Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina

Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília

Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra

Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco

Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará

Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma

Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino

Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^ª Dr^ª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Prof^ª Dr^ª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof^ª Dr^ª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^ª Dr^ª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Prof^ª Dr^ª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^ª Dr^ª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^ª Dr^ª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais
Prof. Me. Aleksandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof^ª Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof^ª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Prof^ª Dr^ª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof^ª Dr^ª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof^ª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Prof^ª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Prof^ª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar

Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Fabiano Eloy Atilio Batista – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR

Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Ma. Lilians Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Prof^ª Dr^ª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof^ª Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz
Prof^ª Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Prof^ª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Prof^ª Dr^ª Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa
Prof^ª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Prof^ª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Prof^ª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof^ª Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof^ª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
 André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-5706-856-4
 DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil
 Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, na que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. [org/10.29327/217514.7.1-5](https://doi.org/10.29327/217514.7.1-5). **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: <http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430>. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

Celina Amélia da Silva

Carmen Teresa Kaiber

DOI 10.22533/at.ed.5642108031

CAPÍTULO 2..... 12

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS

Adan Rodrigo Vale Pacheco

Fábio Barros Gonçalves

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.5642108032

CAPÍTULO 3..... 25

PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM

Wharton Martins de Lima

Davis Rytley Lira Martins

Jamilson Pinto de Medeiros

João Pedro Nogueira da Silva

Sérgio Barbosa da Penha

William Gomes dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.5642108033

CAPÍTULO 4..... 35

AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Francisca Missilene Muniz Magalhães

Pedro Franco de Sá

DOI 10.22533/at.ed.5642108034

CAPÍTULO 5..... 44

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Daniel Martins Nunes

Fábio Mendes Ramos

DOI 10.22533/at.ed.5642108035

CAPÍTULO 6..... 59

DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7º ANO

Emilim Caroline Canabarro

Lucieli Martins Gonçalves Descovi

DOI 10.22533/at.ed.5642108036

CAPÍTULO 7	71
DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES	
Beatriz Nascimento Gomes	
Altemir da Silva Braga	
DOI 10.22533/at.ed.5642108037	
CAPÍTULO 8	80
RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS	
Helena Dória Lucas de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.5642108038	
CAPÍTULO 9	91
NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS	
Dayson Wesley Lima Castro	
Arlison da Conceição Rocha	
Natanael Freitas Cabral	
Miguel Chaquiam	
DOI 10.22533/at.ed.5642108039	
CAPÍTULO 10	104
SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA	
Giovanni Santos	
Mairon Carliel Pontarolo	
Sebastião Romero Franco	
DOI 10.22533/at.ed.56421080310	
CAPÍTULO 11	109
CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS	
Ana Emilia de Melo Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.56421080311	
CAPÍTULO 12	118
UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
José Roberto Costa	
Vanessa Tluscik dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080312	
CAPÍTULO 13	130
A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGICA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL	
Catiex Rodrigues de Souza	
Adelmo Carvalho da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.56421080313	

CAPÍTULO 14	143
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA	
Wanderlei Verissimo	
Thiago Fanelli Ferraiol	
DOI 10.22533/at.ed.56421080314	
CAPÍTULO 15	156
DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA	
Gustavo Pereira Gomes	
Bianca Menezes Campos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080315	
CAPÍTULO 16	164
A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA	
Elivane Leandro da Silva	
Lucianne Oliveira Monteiro Andrade	
Marcelo de Sousa Coêlho	
DOI 10.22533/at.ed.56421080316	
CAPÍTULO 17	187
ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE	
Cristiane Martins Fernandes Tavares	
Edson Leite Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.56421080317	
CAPÍTULO 18	205
O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA	
Eliana Alves Arxer	
Dulcimeire Aparecida Volante Zanon	
DOI 10.22533/at.ed.56421080318	
CAPÍTULO 19	214
UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR	
Adriana Stefanello Somavilla	
Luani Griggio Langwinski	
Leonardo Silguero Pimentel	
DOI 10.22533/at.ed.56421080319	
CAPÍTULO 20	225
CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	
Adriana de Jesus Gabilão	

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra

Renata Forti Braga

DOI 10.22533/at.ed.56421080320

CAPÍTULO 21.....228

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM SOLVER LINHA

Mairon Carliel Pontarolo

Giovanni Santos

Sebastião Romero Franco

DOI 10.22533/at.ed.56421080321

CAPÍTULO 22.....233

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS

Vilma Luísa Sieglloch Barros

DOI 10.22533/at.ed.56421080322

CAPÍTULO 23.....241

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER

Henry Otavio Fontana

Thiago Gilberto do Prado

Vinícius Piccirillo

DOI 10.22533/at.ed.56421080323

CAPÍTULO 24.....254

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Fernando Santos Silva

Ana Paula Perovano

DOI 10.22533/at.ed.56421080324

CAPÍTULO 25.....266

DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS

Thiago Schinda Bubniak

Inácio Andruski Guimarães

Sonia Maria de Freitas

DOI 10.22533/at.ed.56421080325

CAPÍTULO 26.....273

COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION

Rejane de Barros Araújo

Antonio Augusto Rodrigues Coelho

DOI 10.22533/at.ed.56421080326

SOBRE OS ORGANIZADORES	282
ÍNDICE REMISSIVO.....	283

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 04/01/2021

Henry Otavio Fontana

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR), Departamento de Matemática
(DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
<http://lattes.cnpq.br/8945930589873958>

Thiago Gilberto do Prado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR), Departamento de Matemática
(DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
<http://lattes.cnpq.br/8579825163457253>

Vinícius Piccirillo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR), Departamento de Matemática
(DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
<http://lattes.cnpq.br/3854173197129961>

RESUMO: A não linearidade é responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Um dos comportamentos complexos mais surpreendentes que se encontra dentro dos estudos da dinâmica não linear é o caos, o qual está relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias. Assim o objetivo desta pesquisa é prever como sistemas dinâmicos evoluem com o progresso do tempo e quais comportamentos eles podem apresentar para

determinadas condições. No estudo realizado, escolhemos os sistemas de Lorenz e Rössler tridimensional para realizar esta exploração. Os resultados numéricos obtidos a partir das simulações realizadas possibilitaram uma análise geral dos fenômenos dinâmicos encontrados. Ao longo do trabalho é mostrado quando ocorrem as transições entre os comportamentos dinâmicos destes sistemas, à medida que determinado parâmetro de controle é variado. Os comportamentos dinâmicos, tanto periódicos quanto caóticos, encontrados foram estudados e caracterizados através da evolução temporal, espaço de fases, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov.

PALAVRAS - CHAVE: Dinâmica não linear. Caos. Expoente de Lyapunov.

STUDY OF NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS IN CONTINUOUS TIME SYSTEMS: DYNAMICS OF LORENZ AND RÖSSLER SYSTEMS

ABSTRACT: Nonlinearity is responsible for the appearance of complex and unpredictable behaviors in dynamic systems. One of the most surprising complex behaviors found in studies of nonlinear dynamics is chaos, which is related to the high unpredictability observed in certain oscillatory dynamics. So the objective of this research is to predict how dynamic systems evolve with the progress of time and what behaviors they can exhibit under certain conditions. In the study carried out, we chose the Lorenz and three-dimensional Rössler systems to carry out this exploration. The numerical results obtained

from the simulations performed enabled a general analysis of the dynamic phenomena found. Throughout the work it is shown when the transitions between the dynamic behaviors of these systems occur, as a given control parameter is varied. The dynamic behaviors, both periodic and chaotic, found were studied and characterized through the temporal evolution, phase space, bifurcation diagrams and Lyapunov exponents.

KEYWORDS: Nonlinear dynamics. Chaos. Lyapunov Exponents.

1 | INTRODUÇÃO

Para uma certa extensão, os estados futuro e passado de muitos sistemas dinâmicos podem ser previstos conhecendo seu estado presente e as leis que regem sua evolução e comportamento. Uma vez que estas leis não mudam no tempo, o comportamento de tal sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial. Assim, pode-se definir um sistema dinâmico como sendo um conjunto de possíveis estados, os quais estão associados por uma lei de evolução do sistema com o tempo (THORTON, S.T.; MARION, J.B.; 2004).

Em diversos casos, a não linearidade é a responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Um dos comportamentos complexos mais interessantes que se encontra dentro dos estudos de dinâmica não linear é o caos.

O caos é um comportamento relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias (HOFF, 2014). Caos está associado a sistemas dinâmicos que são extremamente sensíveis a mudanças nas condições iniciais; ou seja, uma pequena mudança em uma condição inicial pode modificar a dinâmica futura, sendo que o resultado obtido se encontra totalmente distante do previsto inicialmente. (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Os parâmetros de sistemas dinâmicos determinísticos desempenham uma importante função especificando, por exemplo, as transições entre o comportamento caótico e periódico. Esta influência dos parâmetros na transição do atrator pode ser analisada e representada em diagramas de bifurcação e também no espaço de parâmetros (WIGGINS, 2003). O expoente de Lyapunov caracteriza os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar (equilíbrio, ciclo limite, caos) (WOLF et.al, 1985). A combinação de diferentes técnicas fornece uma visão da evolução do sistema em termos dos parâmetros e das diferentes rotas para o caos.

Neste artigo iremos estudar a dinâmica de dois problemas dinâmicos já bem conhecidos, onde ambos possuem três equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem e autônomas, o primeiro deles é o sistema de Lorenz e o segundo problema estudado é o sistema de Rössler.

2 | MATERIAIS E MÉTODOS

Sistemas dinâmicos multidimensionais revelam uma grande dificuldade para a obtenção de resultados analíticos que possam identificar possíveis comportamentos e a evolução de tal sistema no tempo. Assim, nestes casos, utilizam-se métodos numéricos e ferramentas computacionais para a análise destes sistemas.

Para a investigação dos modelos foi realizado a integração numérica das equações diferenciais e através de um algoritmo adequado foram obtidos expoentes de Lyapunov e características dimensionais e espectrais dos modelos de Lorenz e Rössler. A pesquisa possui natureza exploratória com finalidade de analisar a existência dos mais variados comportamentos que esses sistemas apresentam, bem como a condição de regime caótico, partindo de uma revisão bibliográfica composta por autores da área.

Partindo dos conceitos apresentados por esses autores, foi feito uso do software MATLAB® de alta performance voltado para o cálculo numérico (YANG, W.Y. et al., 2005), para obter novos resultados e portanto, comparar com os resultados já presentes na literatura. Inicialmente foi simulado a evolução temporal do sistema com o tempo em um determinado intervalo utilizando a rotina ode45, e assim, construímos o espaço de fases, em seguida diagramas de bifurcação e os expoentes de Lyapunov, onde os gráficos foram feitos com 1000 valores do parâmetro de controle. Além disso, para os dois sistemas foi construído o espaço de parâmetros utilizando uma malha de 800 x 800. Portanto, a partir dos resultados obtidos a partir desses gráficos, iremos fazer uma discussão acerca da dinâmica dos modelos de Lorenz e Rössler.

Uma das principais ferramentas utilizadas para analisar a dinâmica de soluções em equações diferenciais é o Mapa de Poincaré, o qual pode ser interpretado como um sistema dinâmico discreto com um espaço de estado que é uma dimensão menor que o sistema dinâmico contínuo original (SEYDEL, 2010).

Com base nos mapas de Poincaré construímos os diagramas de bifurcação. O termo bifurcação é utilizado para descrever mudanças qualitativas que ocorrem num sistema dinâmico, quando perturbações nos parâmetros, dos quais o sistema é dependente, alteram a estrutura das soluções estacionárias e periódicas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Assim, com os diagramas de bifurcação, analisamos como a natureza qualitativa das soluções das equações dependem dos parâmetros do sistema (WIGGINS, 2003). À medida que varia-se um parâmetro no sistema, estas mudanças ocorrem em um número limitado de caminhos prescritos, ou seja, as mudanças que ocorrem no sistema quando varia-se determinado parâmetro não ocorrem aleatoriamente e existe uma ordem para os possíveis tipos de bifurcações, formação e aniquilação de equilíbrios que o sistema apresentará (SEYDEL, 2010).

Caracterizamos o comportamento de trajetórias no espaço de fase de um sistema dinâmico com o uso dos expoentes característicos de Lyapunov (ALLIGOOD; SAUER;

YORKE, 1996). Estamos interessados em compreender como surgem as trajetórias caóticas, para isso utilizaremos métodos já conhecidos na literatura. O que de fato interessa é observar o comportamento das trajetórias, que começam inicialmente muito próximas e que rapidamente se afastam uma da outra divergindo exponencialmente, e isto ocorre pela dependência nas condições iniciais, ou seja, se a condição inicial for levemente perturbada por uma distância infinitesimal, queremos determinar a evolução desta perturbação, se ela será amplificada ou atenuada pela dinâmica do sistema (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Em um sistema dinâmico dissipativo contínuo tridimensional, os únicos Expoentes de Lyapunov possíveis e os atratores que eles descrevem são: $(+, 0, -)$, um atrator estranho; $(0, 0, -)$, torus bidimensional; $(0, -, -)$, um ciclo limite; e $(-, -, -)$, um ponto fixo (WOLF et.al, 1985).

Fizemos uso da abordagem clássica utilizando o mapa tangente para a computação numérica dos expoentes de Lyapunov. O procedimento clássico de estimativa destes expoentes a partir das equações de estado consiste na construção de um espaço tangente subjacente à dinâmica, o que permite avaliar a evolução da magnitude de uma perturbação inicialmente infinitesimal (WOLF et.al, 1985)(GALDINO, 2018).

Também exploraremos a dependência dos sistemas dinâmicos em relação aos parâmetros em diagramas bidimensionais, chamados espaço de parâmetros. Nestes diagramas, consideramos uma grade bidimensional de parâmetros de controle igualmente espaçados (800×800) . Para cada elemento na grade avalia-se a dinâmica através do maior expoente de Lyapunov. Graficamente um gradiente de cores é criado para representar o valor do maior expoente de Lyapunov com relação ao par de parâmetros escolhidos (HOFF, 2014). Assim é possível verificar onde o sistema apresenta regiões periódicas e caóticas.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo de Lorenz é altamente idealizado de convecções de um fluido, configurando uma corrente no sentido horário ou anti-horário. O número de Prandtl (σ) , o número de Rayleigh r e b são parâmetros do sistema. A variável x é proporcional à velocidade do fluxo do fluido circulatório. Se $x > 0$, o fluido circula no sentido horário enquanto $x < 0$ significa que o fluxo ocorre no sentido anti-horário. A largura dos rolos de fluxo é proporcional ao parâmetro b . A variável y é proporcional à diferença de temperatura entre os elementos fluidos ascendente e fluidos descendente e z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao seu equilíbrio (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

O sistema simplificado de Lorenz é constituído de três equações diferenciais não lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{array} \right. \quad (2)$$

Para nossa análise inicial tomamos r como o parâmetro variável, enquanto σ e b permanecerão constantes.

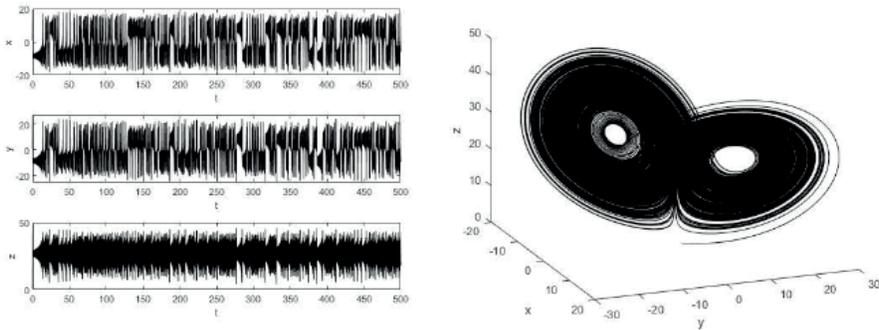


Figura 1. Trajetória do sistema de Lorenz desenvolvida para $b = 8/3$, $\sigma = 10$ e $r = 28$.

Para $r = 28$, o atrator observado numericamente na figura 1 é caótico. Esta figura mostra a órbita para a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. É notável que para essa condição dos parâmetros os três equilíbrios são instáveis e a trajetória desenvolvida encontra-se aprisionada em um volume no espaço de fases definido pelo atrator.

Para valores muito maiores de r existem órbitas periódicas estáveis e o atrator caótico desaparece. Esta variedade de comportamentos pode ser visualizada e predita pelo diagrama de bifurcação.

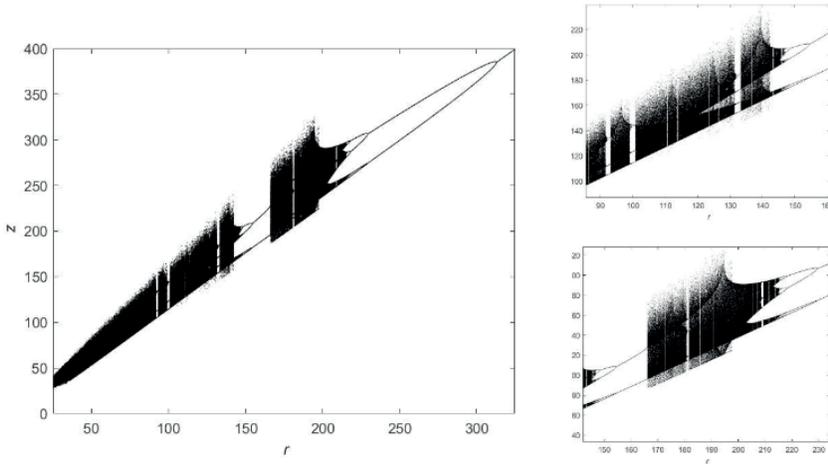


Figura 3. Diagrama de Bifurcação para o sistema Lorenz para $25 \leq r \leq 325$

A visualização dos atratores por meio dos máximos locais definidos pela variável z quando o sistema é resolvido permite construir um diagrama de bifurcação do sistema de Lorenz à medida que variamos o parâmetro de controle. Isso equivale a construirmos os mapas de retorno dos valores máximos da variável z para cada parâmetro. Conforme variamos r é visível a presença de atratores periódicos. À medida que diminui-se o parâmetro a partir de $r = 325$ percebe-se a ocorrência de uma bifurcação de duplicação de período resultando em um atrator de loop duplo em $r = 313,5$, ou seja, com dois máximos locais até repetir a órbita. Diminuindo-se ainda mais o valor do parâmetro observa-se uma outra duplicação de período do atrator originando um atrator de loop quádruplo em $r = 306,7$.

Os múltiplos processos de duplicação de período implicam na presença de uma rota para o Caos via duplicação de período, o qual é visível no diagrama de bifurcação pela região densa de pontos indicando que o sistema apresenta vários valores de máximos locais.

Além da dinâmica caótica do sistema, vários novos efeitos interessantes emergem a partir do diagrama de bifurcação: a saber, as janelas periódicas. As regiões de janelas periódicas são caracterizadas pela presença de regiões periódicas entre regiões caóticas. Esse fenômeno pode ser observado diminuindo ainda mais o valor do parâmetro de controle como no intervalo $194,7 \leq r \leq 227,7$.

Também verifica-se o fenômeno chamado crise no diagrama de bifurcação, onde o comportamento caótico desaparece ou surge de forma abrupta, apenas com uma pequena variação no parâmetro.

Os valores dos expoentes de Lyapunov foram calculados numericamente com o intuito de se obter os mesmos intervalos caóticos encontrados nos diagramas de bifurcação. Os gráficos condizentes aos expoentes de Lyapunov foram gerados na mesma

faixa paramétrica que o diagrama de bifurcação.

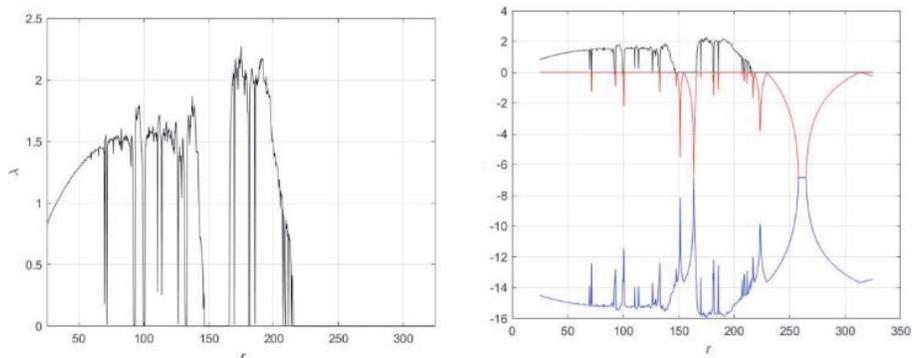


Figura 4. Plotagem do maior expoente de Lyapunov à esquerda e espectro de Lyapunov à direita. Para a geração dos gráficos foram considerados 1000 valores de parâmetros e simulados até $t = 5000$.

Analisando o gráfico do maior expoente de Lyapunov é possível verificar que o valor desse expoente é positivo para $r = 28$ indicando que o comportamento do sistema é caótico, isso está condizente com a análise do diagrama de bifurcação. A partir de $r = 69,7$ o expoente de Lyapunov passa a indicar a presença de janelas de periodicidade quando este cai rapidamente para zero e volta a ser positivo. Assim é possível diferenciar o comportamento caótico, quando o maior expoente de Lyapunov é positivo, de quando este é periódico, o maior expoente de Lyapunov é nulo.

Analisando o espectro de Lyapunov é possível verificar que o comportamento caótico ocorre quando os expoentes de Lyapunov assumem a ordem $(+,0,-)$ e que os comportamentos periódicos são do tipo ciclo limite, uma vez que os expoentes são $(0,-,-)$, aproximadamente.

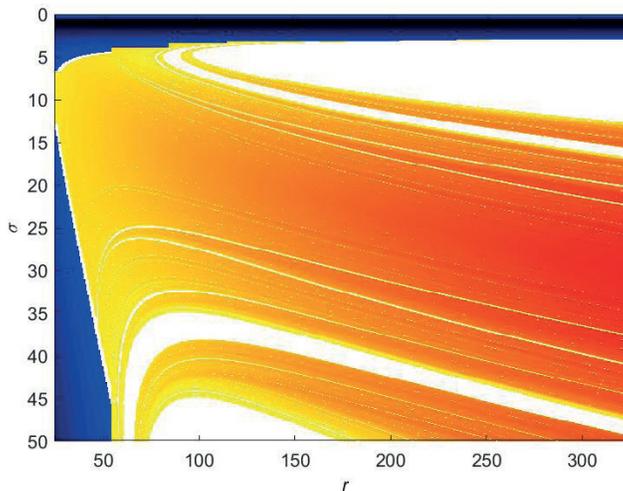


Figura 5. Espaço de parâmetros ($r \times \sigma$) do sistema de Lorenz. Aqui a cor azul foi designada para quando os maiores expoentes de Lyapunov são negativos ($\lambda < 0$), a cor branca para quando $\lambda \approx 0$ e amarelo e vermelho para $\lambda > 0$. Sendo vermelho utilizado para marcar os maiores expoentes de Lyapunov encontrados.

Com base no espaço de parâmetros do sistema de Lorenz, figura 5, percebe-se a complexidade dinâmica do sistema, uma vez que ele mostra que o sistema pode adquirir dinâmica periódica, quase-periódica e também caótica dependendo do par de parâmetros r e σ . Além disso, a dinâmica é sensível à mudança desses dois parâmetros nos limites das estruturas periódicas imersas no comportamento caótico.

Uma análise similar foi realizada com o sistema de Rössler. O sistema de Rössler foi inicialmente desenvolvido para gerar um atrator com características semelhantes ao atrator de Lorenz. As equações que definem o sistema são:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + cy \\ \frac{dz}{dt} = b + (x - a).z \end{cases} \quad (4)$$

Inicialmente foi avaliado a estrutura do atrator de Rössler. Para isso o sistema de Rössler foi solucionado numericamente para as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.01)$ e parâmetros iniciais $(a, b, c) = (15, 0.1, 0.1)$.

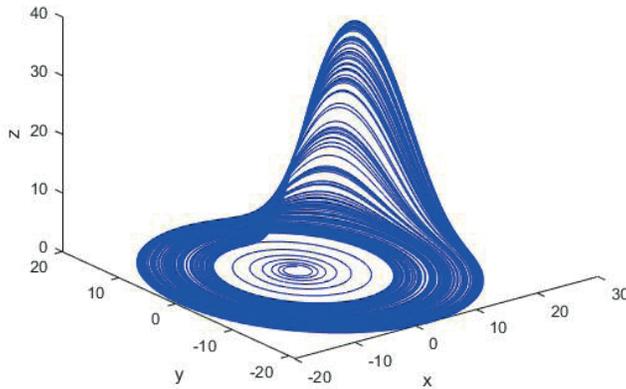


Figura 6. Plotagem tridimensional do espaço de fase do atrator de Rössler para as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.01)$ e parâmetros iniciais $(a, b, c) = (15, 0.1, 0.1)$

Para analisar melhor o problema foi gerado a figura 7, na qual variamos o parâmetro. Para cada valor de a foi construído o gráfico do atrator. Uma variedade de tipos de atratores é visualizada indicando que esse sistema apresenta uma dinâmica interessante. Inicialmente começamos com uma órbita periódica de período simples, 1 loop, e quando o valor do parâmetro é aumentado percebe-se que os atratores tornam-se cada vez mais complexos. Essa variedade de comportamentos dinâmicos pode ser visto e identificado no diagrama de bifurcação, o qual fornece uma visão mais geral desses fenômenos.

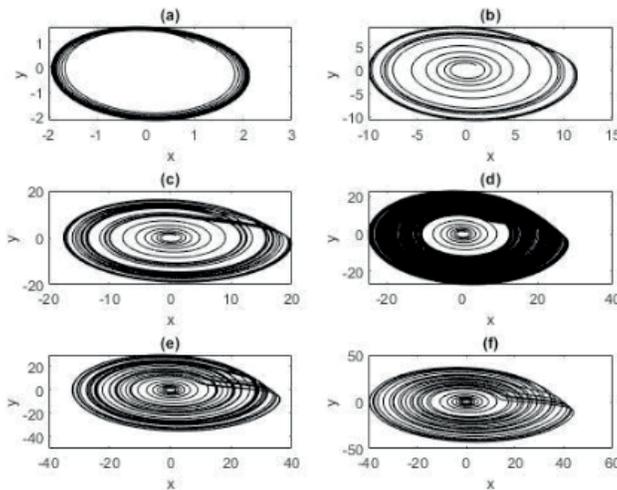


Figura 7. Atratores de Rössler gerados para vários valores de a . (a) $a=1$; (b) $a=6.75$; (c) $a=12.5$; (d) $a=18.25$; (e) $a=24$; (f) $a=29.75$.

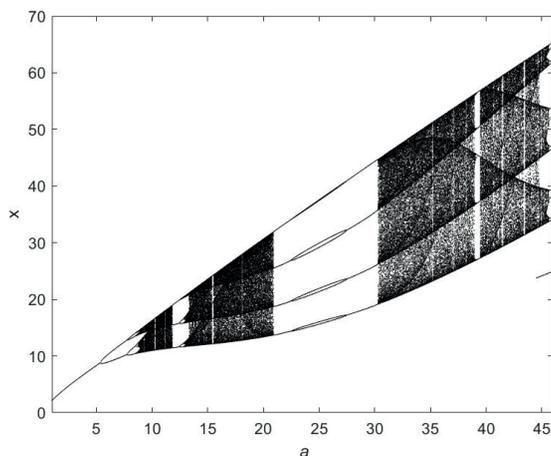


Figura 8. Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler para $1 \leq a \leq 46$.

A figura 8 mostra o diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler. Os parâmetros b e c são fixados enquanto o parâmetro a é variado. Para cada valor de a na vertical foi plotado o máximo local da variável x da solução. Analisando o diagrama de bifurcação da esquerda para a direita verificamos a existência de uma órbita de período-1 no intervalo $1 \leq a \leq 5,275$ e quando o valor do parâmetro de controle é aumentado esse ramo sofre uma bifurcação do tipo duplicação de período implicando no surgimento de órbitas de período-2. Aumentando-se ainda mais o parâmetro, os ramos resultantes sofrem incontáveis duplicações de período, verificamos a presença de uma cascata de duplicação de período.

O resultado disso é o surgimento de um comportamento caótico. No intervalo $11,84 \ll a \ll 12,88$ existe uma janela periódica com atratores de período-3. O ramo do diagrama de bifurcação nessa janela dobra de período sucessivas vezes até gerar novamente uma faixa de parâmetros em que o comportamento do sistema é caótico. Outra janela periódica muito notável do sistema encontra-se em $20,93 \leq a \leq 35,79$, onde os atratores são de período-4 e duplicam em $a = 26,87$ gerando atratores de período-8. Ao final do diagrama de bifurcação o regime caótico torna-se periódico e o período dos atratores é diminuído por duplicações de período reversas.

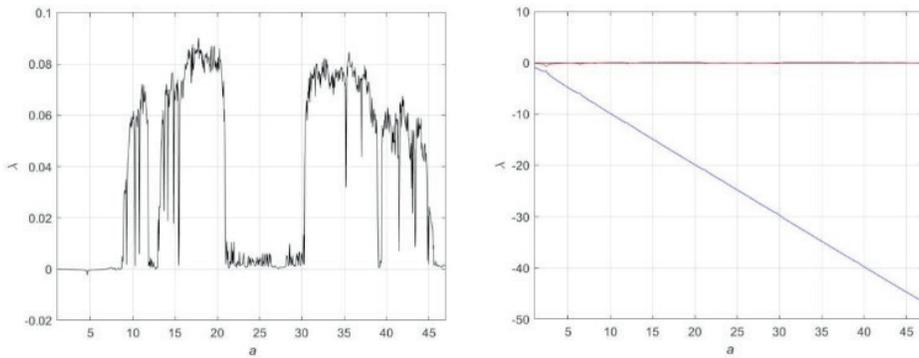


Figura 9. À esquerda maior expoente de Lyapunov e à direita encontra-se o espectro de Lyapunov para o sistema de Rössler com parâmetros no intervalo $1 \leq a \leq 46$.

Da mesma forma que foi feita para o modelo de Lorenz iremos comparar os resultados dos expoentes de Lyapunov com o diagrama de bifurcação. Com base na análise dos expoentes de Lyapunov podemos verificar que em $1 \leq a \leq 8,705$ o comportamento do sistema é periódico com o maior expoente de Lyapunov próximo de zero.

Para $11,87 \leq a \leq 12,90$ o maior de Lyapunov torna-se próximo de zero novamente indicando uma região de janela periódica, isso ocorre também no intervalo verificado no diagrama de bifurcação $20,93 \leq a \leq 35,79$, o expoente para valores mais próximos de zero indicando a presença de órbitas periódicas estáveis. É interessante notar que essa região apresentou uma quantidade mais significativa de “ruídos” no gráfico o que é proveniente de uma dificuldade maior na convergência dos expoentes de Lyapunov nessa região de parâmetros.

Analisando o espectro de Lyapunov é possível verificar que o terceiro expoente de Lyapunov decresce cada vez mais, enquanto o primeiro (maior) e o segundo valores de Expoente de Lyapunov sempre permanecem próximos. Caos é definido quando a relação entre os expoentes assume $(+,0,-)$.

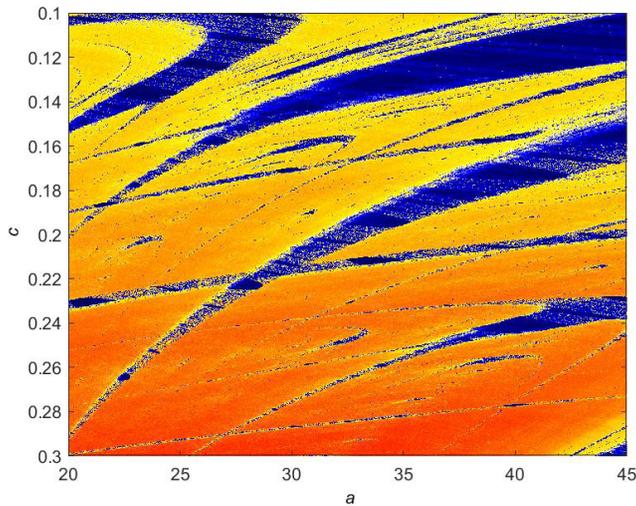


Figura 10. Espaço de parâmetros ($a \times c$) do sistema de Rössler. Aqui a cor azul foi designada para quando os maiores expoentes de Lyapunov são quase nulos ($\lambda \approx 0$) e amarelo e vermelho para $\lambda > 0$. Sendo vermelho utilizado para marcar os maiores expoentes de Lyapunov encontrados.

Com base na figura 10 percebe-se a complexidade dinâmica do sistema de Rössler, uma vez que ela mostra que o sistema pode adquirir dinâmica periódica ou caótica dependendo dos valores de parâmetros adotados e o sistema é sensível às condições de parâmetros nos limites das estruturas periódicas e complexas identificadas. Essas estruturas complexas embutidas no mar de Caos são denominadas de camarões (*shrimps*).

4 | CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi constatada a complexidade inerente de sistemas de tempo contínuo por intermédio de um estudo teórico detalhado sobre a dinâmica dos sistemas de Lorenz e Rössler tridimensional. As simulações mostraram que o comportamento não linear pode implicar em uma gama muito diversificada de comportamentos para esses sistemas que inclui estados de oscilações periódicas e caos.

Através dos diagramas de bifurcação mostrou-se como os sistemas possuem uma quantidade imensa de comportamentos possíveis para determinado valor do parâmetro de controle. Foi possível identificar as regiões de caos dos sistemas, as rotas para o caos, e como são formadas as regiões periódicas imersas em regiões caóticas - janelas periódicas.

REFERÊNCIAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. (1996). *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*. (1. ed.). Velarg New York, Spring.

Galdino, V. (2018). *TÉCNICAS PARA ESTIMAÇÃO DE EXPOENTE DE LYAPUNOV EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES*. Dissertação, Universidade Federal da Paraíba.

HOFF, A. (2014). *ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS QUADRIDIMENSIONAIS*. Dissertação, UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC, CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT.

SEYDEL, R. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis* (3 ed., Vol. 5). Nova York: Springer.

THORTON, S.T.; MARION, J.B.; (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5.Ed ed.).

WIGGINS, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Nova York: Springer.

WOLF, A. et al. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v.16.

YANG, W.Y. et al. (2005). *Applied Numerical Methods Using MATLAB*.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra 9, 18, 63, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 154, 189, 190, 203, 204, 227
Anos Iniciais 7, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 80, 81, 88, 89, 120, 121, 126, 128, 226, 227
Aplicativo online 9, 187, 188, 204
Aprendizagem 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 23, 25, 26, 27, 33, 35, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 85, 89, 92, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 160, 163, 164, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 205, 206, 211, 212, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 223, 224, 226, 234, 235, 236, 237, 239
Aprendizagem Matemática 9, 26, 60, 118, 119, 125, 154, 164, 167, 175, 183, 184
Aproximação de Raízes 44
Atenuação da perturbação 273
Auditoria de Contas 10, 266, 267, 271

B

Biografia 13, 91, 93, 94, 102, 103
Brincadeiras 8, 118, 120, 125, 126, 127, 150

C

Caos 10, 241, 242, 246, 251, 252
Condução de Calor 104, 105, 228
Controle Preditivo 273

D

Deficiente visual 9, 214, 215, 216, 218, 219, 221, 222, 223
Derivada compatível 254, 256, 263, 264, 265
Detecção de Fraudes 266, 267
Determinantes 9, 163, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 204
Diagramas de Vergnaud 110
Diferença de Hukuhara 254, 260
Dificuldades 5, 7, 9, 13, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 68, 70, 72, 92, 93, 121, 123, 124, 126, 138, 139, 143, 144, 145, 149, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 169, 174, 177, 183, 184, 189, 190, 199, 200, 201, 202, 214, 217, 224, 225, 227, 233
Dificuldades do Ensino 35, 36, 39, 40, 121
Dinâmica não linear 10, 241, 242

Discalculia 7, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70

Disciplina de Matemática 35, 36, 40, 216

Distribuição de Newcomb-Benford 10, 266, 270, 271

Docentes 5, 35, 36, 40, 42, 102, 120, 121, 124, 125, 127, 128, 137, 151, 154, 156, 157, 164, 167, 168, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 186, 212, 213, 216, 222, 233, 237, 238, 239

E

Educação Matemática 11, 26, 37, 58, 80, 81, 83, 92, 118, 134, 156, 161, 163, 164, 167, 203, 204, 212, 213, 223, 237, 239, 240, 282

Ensino 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 68, 69, 70, 89, 91, 92, 93, 102, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 179, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 282

Ensino-Aprendizagem 39, 43, 44, 92, 130, 132, 139, 140, 143, 144, 146, 148, 172, 185, 189, 190, 201, 212

Ensino de Matemática 9, 10, 12, 23, 25, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 91, 128, 132, 134, 140, 144, 146, 158, 162, 202, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 214, 215, 218, 222, 223, 233, 237, 282

Ensino de Química 8, 130, 131, 132, 133, 134, 137, 140, 141

Escrita de números 63, 80, 85

Estabilidade Dinâmica 273

Estágio 109, 158, 171

Estatística 71, 72, 79, 103, 166, 186, 265, 282

Estratégias 9, 164, 175

Estruturas Aditivas 8, 109, 110, 111, 116, 117

Excel 8, 46, 49, 109, 111, 112, 114, 115, 116, 117

Expoente de Lyapunov 241, 251, 253

F

Formação Continuada 80, 86, 109, 111, 167, 171, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 189, 205, 219

Formação inicial de professores de Matemática 1, 233

Funções Elípticas 91, 98, 101

G

Gauss-Seidel 104, 105, 106, 228, 229, 230, 231

GeoGebra 7, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 58

Geometria Euclidiana 7, 12, 18, 21, 24, 159, 160

Geometria Não Euclidiana 12

H

História da Matemática 12, 13, 14, 23, 24, 91, 92, 93, 96, 102, 103, 155, 217, 224, 237

I

Inclusão 5, 3, 59, 60, 67, 69, 70, 91, 102, 188, 202, 214, 215, 218, 223

Interdisciplinaridade 8, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141

Inversão de matrizes 187, 188, 190, 194, 198, 200

Investigação Matemática 9, 143, 144, 146, 147, 148, 153, 154

J

Jogos 8, 10, 25, 27, 33, 42, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 180, 184, 225, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 238

Jogos Digitais 10, 233, 234, 235, 236, 237, 238

L

Lúdico 25, 26, 30, 41, 42, 118, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 141

M

Matemática 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 265, 282

Método das Diferenças Finitas 104, 106, 228, 229, 230

Metodologias inovadoras de ensino 118

Métodos Numéricos 7, 44, 45, 46, 57, 58, 104, 105, 243

Modelagem de dados 71

Motivação 56, 63, 67, 88, 118, 119, 123, 134, 166, 167, 211

N

Niels Henrik Abel 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103

Números Fuzzy 254, 259

O

Outliers 71, 72

P

Perspectiva CTS 205

Perspectivas 9, 91, 92, 101, 102, 128, 156, 157, 159, 171, 180, 227, 240

Pesquisa na formação do professor de Matemática 1

Postura investigativa na formação do professor de Matemática 1

Práticas Pedagógicas 60, 65, 66, 68, 69, 81, 156, 157, 167, 183

Probabilidade 29, 30, 71, 72, 73, 78, 79, 138, 141, 257, 268

Projeto de sistemas de controle 273

R

Rastreamento de Referência 273

Recursos didáticos 8, 80, 81, 88, 89, 102, 215, 218, 223

S

Sala de recurso 59

Sistema de Numeração Decimal 80, 82, 85, 87, 88, 89, 225

Sistemas Lineares 9, 187, 188, 189, 190, 191, 200, 202, 204

T

Tecnologias da Informação e Comunicação 233, 234, 237, 282

Tendência contemporânea 205

Transtorno 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2