

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2021 Os autores

Copyright da Edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Ivone Goulart Lopes – Instituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Prof^ª Dr^ª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof^ª Dr^ª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^ª Dr^ª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^ª Dr^ª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Dr^ª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Prof^ª Dr^ª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília

Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof^ª Dr^ª Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina

Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília

Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra

Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco

Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará

Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma

Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino

Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof^ª Dr^ª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Prof^ª Dr^ª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof^ª Dr^ª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof^ª Dr^ª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Prof^ª Dr^ª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^ª Dr^ª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^ª Dr^ª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais
Prof. Me. Alexandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof^ª Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Prof^ª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Prof^ª Dr^ª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Prof^ª Dr^ª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof^ª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Prof^ª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Prof^ª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar

Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Fabiano Eloy Atilio Batista – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR

Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Prof^ª Dr^ª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof^ª Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz
Prof^ª Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Prof^ª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Prof^ª Dr^ª Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa
Prof^ª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Prof^ª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Prof^ª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof^ª Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof^ª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Luiza Alves Batista
Correção: Kimberlly Elisandra Gonçalves Carneiro
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-855-7

DOI 10.22533/at.ed.557211003

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***”, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: <http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430>. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

DIFICULDADES EVIDENCIADAS NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE PROFESSORES INICIANTE EM MATEMÁTICA

Emerson Batista Ferreira Mota

José Cirqueira Martins Júnior

Dario Fiorentini

DOI 10.22533/at.ed.5572110031

CAPÍTULO 2..... 16

A AVALIAÇÃO NO MOVIMENTO EM REDE FEIRAS DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO

Paula Andrea Grawieski Civiero

Alayde Ferreira dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.5572110032

CAPÍTULO 3..... 29

UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS TÉCNICAS DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA (CITT) E GENERALIZADA (GITT): ASPECTOS INICIAIS

Reynaldo D'Alessandro Neto

DOI 10.22533/at.ed.5572110033

CAPÍTULO 4..... 40

A FORMAÇÃO DA PROFESSORA DE MATEMÁTICA E O ESTÁGIO DE OBSERVAÇÃO: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Fernanda Pereira Magalhães

Américo Junior Nunes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.5572110034

CAPÍTULO 5..... 50

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Gaspar Soares

Márcio Ruino Silva

DOI 10.22533/at.ed.5572110035

CAPÍTULO 6..... 61

USANDO TEORIA DE CONJUNTOS PARA VISUALIZAR A MODELAGEM ORIENTADA A OBJETOS COM CONCEITOS CONCRETOS, ABSTRATOS E IMAGINÁRIOS

Ana Emilia de Meo Queiroz

DOI 10.22533/at.ed.5572110036

CAPÍTULO 7..... 69

GEOGEBRA: MATEMÁTICA NA PALMA DA MÃO

Paulo Ricardo Rocha Lima

Joycilene Lopes de Brito

Ricardo de Oliveira Mendes
Francisco Vitor Vieira de Araujo
Dalila Sara Silva Gomes
DOI 10.22533/at.ed.5572110037

CAPÍTULO 8..... 75

APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS: ELEMENTOS ESTRUTURANTES DESSE PROCESSO

Maria Lídia Paula Ledoux
Ana Claudia Oliveira Sales

DOI 10.22533/at.ed.5572110038

CAPÍTULO 9..... 89

SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE FILAS M/M/1 E M/M/c

Nilson Luiz Castelucio Brito
Rosivaldo Antonio Gonçalves
Graziella Nuzzi Ribeiro D'Angelo

DOI 10.22533/at.ed.5572110039

CAPÍTULO 10..... 101

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU/LDU BASEADO NO ALGORITMO DE SADOSKY

Vinícius Guimarães de Oliveira
Wellington José Corrêa
Fernando César Gonçalves Manso

DOI 10.22533/at.ed.55721100310

CAPÍTULO 11..... 109

A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA VIVENCIADA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Malcus Cassiano Kuhn

DOI 10.22533/at.ed.55721100311

CAPÍTULO 12..... 118

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI SUBMETIDA A IMPACTO NO CENTRO APÓS QUEDA LIVRE ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Bruno Conti Franco
Wang Chong

DOI 10.22533/at.ed.55721100312

CAPÍTULO 13..... 126

COMMENTS ON THE PERCEPTION OF THE STUDENTS AND TEACHER IN A MATHEMATICAL MODELING DISCIPLINE IN AN ENVIRONMENTAL SCIENCES GRADUATION – A REMOTE EDUCATION EXPERIENCE

Tales Alexandre Aversi Ferreira

DOI 10.22533/at.ed.55721100313

CAPÍTULO 14.....	144
A MATEMÁTICA FINANCEIRA COMO FERRAMENTA PARA O CONSUMO CONSCIENTE	
Aleff Hermínio da Silva	
Claudilene Gomes da Costa	
Agnes Liliane Lima Soares de Santana	
DOI 10.22533/at.ed.55721100314	
CAPÍTULO 15.....	152
UM ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS DO HIPERPLANO E DA (n-1) -ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO	
Joselito de Oliveira	
Wender Ferreira Lamounier	
DOI 10.22533/at.ed.55721100315	
CAPÍTULO 16.....	170
CRIVO PARA NÚMEROS PRIMOS E TESTE DE PRIMALIDADE BASEADOS EM UMA MATRIZ DE OITO COLUNAS	
Gabriel Pastori Figueira	
Fernando César Gonçalves Manso	
Wellington José Corrêa	
DOI 10.22533/at.ed.55721100316	
CAPÍTULO 17.....	177
AS CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA CHINESA PARA O ENSINO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE MULTIPLICAÇÃO	
Iago Alves dos Santos	
Danilo Furtado Veras	
Wirlania Cristina Santos Nunes	
Rayane de Jesus Santos Melo	
DOI 10.22533/at.ed.55721100317	
CAPÍTULO 18.....	190
UM ESTUDO SOBRE A APLICAÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
José Roberto Costa	
Marcia Samile Bon im	
DOI 10.22533/at.ed.55721100318	
CAPÍTULO 19.....	202
AVALIAÇÃO COM MEDIAÇÃO EM RESOLUÇÃO E ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS	
Bernadete Verônica Schaeffer Hoffman	
Vânia Santos Maria Pereira dos Santos –Wagner	
DOI 10.22533/at.ed.55721100319	
CAPÍTULO 20.....	219
A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DE	

JOGOS

Luzia da Costa Tonon Martarelli

Brendow Pena de Mattos Souto

DOI 10.22533/at.ed.55721100320

CAPÍTULO 21.....228

MATEMÁTICA EPISTOLAR

Maria Aparecida Roseane Ramos

DOI 10.22533/at.ed.55721100321

CAPÍTULO 22.....241

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE GRAU DOIS: UMA NOVA ABORDAGEM

Fernando César Gonçalves Manso

Flávia Aparecida Reitz Cardoso

DOI 10.22533/at.ed.55721100322

CAPÍTULO 23.....260

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: ANÁLISE DE ESQUEMAS ELABORADOS DURANTE ATIVIDADE MATEMÁTICA INTERATIVA

Ivana de Oliveira Freitas

Ângela Maria Hartmann

DOI 10.22533/at.ed.55721100323

CAPÍTULO 24.....272

V TORNEIO DE JOGOS MATEMÁTICOS COMO FERRAMENTA DE INCLUSÃO ESCOLAR

Vinícius Vieira da Silva Dutra

Ana Carolina da Silva Manoel

Anna Júlia Martins Melo

Marcos Victor Magalhães da Silva

Vinícius Silva Lima

Westher Manricky Bernardes Fortunato

Eliane Fonseca Campos Mota

Ricardo Gomes Assunção

DOI 10.22533/at.ed.55721100324

CAPÍTULO 25.....287

ATRIBUINDO “SENTIDO” AO ALGORITMO DA DIVISÃO EM SALA DE AULA: PROPOSITURA DE ABORDAGEM METODOLÓGICA SEMIÓTICA FUNDAMENTADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE OTTEANO

Jacqueline Borges de Paula

DOI 10.22533/at.ed.55721100325

CAPÍTULO 26.....301

A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Jheniffer Munslinger Schroer

Lucieli Martins Gonçalves Descovi

DOI 10.22533/at.ed.55721100326

CAPÍTULO 27.....	308
SALA DE AULA INVERTIDA: UMA ANÁLISE SOBRE A RECEPTIVIDADE DOS ESTUDANTES PARTICIPANTES DE AULAS INVERTIDAS NO PROJETO GAMA	
Gustavo Weirich Corrêa	
Cícero Nachtigall	
DOI 10.22533/at.ed.55721100327	
SOBRE OS ORGANIZADORES	316
ÍNDICE REMISSIVO.....	317

CAPÍTULO 15

UM ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS DO HIPERPLANO E DA (n-1)-ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Data de aceite: 01/03/2021

Data de submissão: 04/01/2021

Joselito de Oliveira

Universidade Federal de Roraima
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Boa Vista-RR
<http://lattes.cnpq.br/7059770609022356>

Wender Ferreira Lamounier

Universidade Federal de Roraima
Escola de Aplicação
Boa Vista-RR
<http://lattes.cnpq.br/5878316434409400>

RESUMO: Na Geometria Analítica são estudados a reta, o círculo e as suas posições relativas. Neste artigo, de forma semelhante é apresentado um estudo das posições relativas do hiperplano e da (n-1)-esfera, no espaço euclidiano n-dimensional. Inicialmente, apresenta-se um estudo sobre as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera. Depois, as posições relativas entre hiperplanos são apresentadas. E finalmente, estuda-se as posições relativas entre as (n-1)-esferas.

PALAVRAS-CHAVE: Hiperesfera, Hiperplano, Espaço Euclidiano.

A STUDY OF THE RELATIVE POSITIONS OF THE HYPERPLANE AND OF THE (n-1)-SPHERE IN EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT: In Analytical Geometry, the line, the circle and their relative positions are studied. In this paper, in a similar way, a study of the relative positions of the hyperplane and the (n-1)-sphere is presented, in the n-dimensional Euclidean space. Initially, a study is presented on the relative positions between the hyperplane and the (n-1)-sphere. Then, the relative positions between hyperplanes are presented. And, finally, we study the relative positions between the (n-1)-spheres.

KEYWORDS: Hypersphere, Hyperplane, Euclidean Space.

1 | INTRODUÇÃO

Nas Geometrias, Analítica Plana e Espacial, estuda-se as posições relativas de retas e planos. Estuda-se também a posição relativa: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências. Neste artigo estuda-se, no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera, entre hiperplanos, e entre (n-1)-esferas, compilando assim todo o estudo realizado nos artigos (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2015) e (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019). Além das proposições, que caracteriza as posições relativas dos referidos objetos geométricos, apresenta-se o conceito de hipersecante. Em (MILLMAN, 1977), assim como em (MENDELSON, 1990), a definição de

(n-1)-esfera restringe-se ao caso em que o raio vale um) o centro é a origem. Aqui, sem perda de generalidades vamos considerar a (n-1)-esfera com raio maior ou igual a um e centro em um ponto qualquer do \mathbb{R}^n . O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção dois encontra-se a matemática necessária ao entendimento das seções seguintes. Sua leitura poderá ser dispensada. A seção três nos mostra a fórmula para se calcular a distância entre um ponto e um hiperplano. Na seção 4, estuda-se as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera. Na seção cinco, as posições relativas entre hiperplanos são estudadas. E finalmente, na seção 6, trata das posições relativas entre (n-1)-esferas.

2 | PRELIMINARES

Nessa seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas que servirão de suporte teórico para o desenvolvimento do artigo. Para iniciar esta seção apresenta-se alguns conceitos básicos que podem ser encontrados nas referências (LIMA, 2005) e (SPIVAK, 2003).

Definição 2.1. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, denota-se por \mathbb{R}^n o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} , isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

As operações seguintes fazem do \mathbb{R}^n um \mathbb{R} -espaço vetorial.

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, vetores do \mathbb{R}^n e um número real λ , as operações de soma $x + y$ e o produto $\lambda \cdot x$ são definidas por:

- i. $x+y=(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$;
- ii. $(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$

Observação 2.1. O elemento neutro para a adição é o $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, enquanto que o simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o elemento $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$, uma vez que $x + (-x) = \mathbf{0}$.

Dados dois vetores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, o produto interno de x e y aqui considerado é dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

É fácil provar que o produto interno usual satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se $x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1. De acordo com a definição 2.1, temos os seguintes espaços euclidianos: a reta \mathbb{R} ; o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, e o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Lembramos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando $\langle x, y \rangle = 0$.

Para o nosso estudo, vamos considerar a norma euclidiana, isto é, o número real dado por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Do produto interno é provado que a norma satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Com base na norma pode-se definir a distância em \mathbb{R}^n , do seguinte modo: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância de x a y é definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dessa forma dados $P = (p_1, \dots, p_n)$ e $Q = (q_1, \dots, q_n)$, pontos do \mathbb{R}^n então

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}.$$

O conceito de hiperplano pode ser encontrado em (COELHO, 2001) e (LANG, 2003), mas aqui será enunciado considerando o espaço vetorial \mathbb{R}^n .

Definição 2.2. Sejam $v \neq 0$ um vetor não nulo e P um ponto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . O conjunto

$$\Gamma_v^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle X - P, v \rangle = 0\},$$

é denominado **hiperplano**.

Sendo o hiperplano, que passa pelo ponto $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor não nulo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, dado $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_v^{n-1}$, então $\langle (X - P), v \rangle = 0$. Portanto, $v \perp (X - P)$, onde $X - P = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Então

$$\langle (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n - p_1 v_1 - \dots - p_n v_n,$$

ou seja,

$$v_1 x_1 + \dots + v_n x_n + d = 0, \text{ onde } d = -p_1 v_1 - \dots - p_n v_n.$$

E esta é a equação do hiperplano Γ_v^{n-1} , que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Exemplo 2.2. No plano, caso em que $n = 2$, o hiperplano é a conhecida equação da reta $v_1 x_1 + v_2 x_2 + d = 0$, objeto de estudo da geometria analítica plana.

Exemplo 2.3. No espaço, caso em que $n = 3$, o hiperplano é conhecido como equação do plano $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + d = 0$.

3 I DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM HIPERPLANO

Nós iniciamos a seção com a versão do teorema de Pitágoras para o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , presente em (HONIG, 1976) e proposto como um exercício em (SPIVAK, 2003). Então, nós apresentamos a definição de distância de um ponto a um hiperplano no espaço \mathbb{R}^n .

Teorema 3.1 (Teorema de Pitágoras). Sejam A, B e C pontos em \mathbb{R}^n tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Então,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

Demonstração. Sejam A, B e C pontos em \mathbb{R}^n , então

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 \\ \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle \\ \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$. ■

Corolário 3.1. Sejam A, B e C pontos em \mathbb{R}^n , tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

Então:

i) $\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$;

ii) $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$.

Demonstração. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ então, pelo Teorema 3.1, $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

Analogamente, se $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ então, pelo Teorema 3.1 temos que $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Veremos agora o caso em que os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} não são nulos.

Se $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ pelo Teorema 3.1 temos

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 > \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| > \|\overrightarrow{AB}\|.$$

A prova de (ii) é análoga. ■

Corolário 3.2. Sejam A, B e C pontos em \mathbb{R}^n tal que $C \neq B, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

Então $d(A, B) < d(A, C)$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.1(i) e o teorema 3.1 obtemos $d(A, B) < d(A, C)$. ■

Definição 3.1. A distância de um ponto P em \mathbb{R}^n a um hiperplano Γ_v^{n-1} , onde $P \notin \Gamma_v^{n-1}$ é dado como a menor das distâncias de P aos pontos de Γ_v^{n-1} , ou seja,

$$d(P, \Gamma_v^{n-1}) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in \Gamma_v^{n-1}\}.$$

A próxima afirmação será considerada aqui como um axioma, contudo, na referência (KREYSZIG, 1978) é um teorema que precisa de técnicas da análise funcional para realizar sua demonstração.

Axioma 3.1. Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano, P_0 um ponto do $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$ e v um vetor normal a Γ_v^{n-1} . Existe um único ponto $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ tal que $\overline{P_0Q} // v$ e $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$.

Agora iremos apresentar uma fórmula que permite calcular a distância de um ponto ao hiperplano. Inicialmente, vamos lembrar a fórmula nos seguintes casos:

1. Em \mathbb{R}^2 , considere a reta $\Gamma_v^1: ax + by = d$ (hiperplano), gerada pelo vetor $v=(a,b)$ e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_v^1$. A distância do ponto ao plano é dada por

$$d(P_0, \Gamma_v^1) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Em \mathbb{R}^3 , considere o plano $\Gamma_v^2: ax + by + cz = d$ (hiperplano), gerado pelo vetor $v = (a, b, c)$ e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_v^2$. A distância do ponto ao plano é dado por

$$d(P_0, \Gamma_v^2) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

O próximo teorema nos dá a fórmula para calcular a distância de um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ a um hiperplano Γ_v^{n-1} .

Teorema 3.2. Sejam $\Gamma_v^{n-1}: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d$ um hiperplano gerado pelo vetor não nulo $v = (a_1, \dots, a_n)$ e $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ um ponto em $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$. Então, a distância entre o ponto P_0 e o hiperplano Γ_v^{n-1} é dada por:

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + \dots + a_nx_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

Demonstração. A demonstração foi adaptada de (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

Seja $\Gamma_v^{n-1}: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + d = 0$ a equação de um hiperplano com vetor normal não nulo $v = (a_1, \dots, a_n)$ através de um ponto P e $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$, então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ tal que $\overline{P_0Q} // v$ e $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$. Como $\overline{P_0Q} // v$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q - P_0 = \lambda v$, isto é,

$$P_0 = Q - \lambda v \tag{1}$$

Sendo $P_0 = Q - \lambda v$ então $P_0 - P = (Q - P) + \lambda v$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle P_0 - P, v \rangle &= \langle Q - P, v \rangle + \lambda \langle v, v \rangle. \\ &= \lambda \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Seja $v \neq 0$, então

$$\lambda = \frac{\langle P_0 - P, v \rangle}{\|v\|^2}. \quad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$P_0 = Q - \frac{\langle P_0 - P, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Então, a distância de P_0 ao ponto mais próximo Q é igual a

$$\begin{aligned} d(P_0, Q) &= \|P_0 - Q\| \\ &= \left\| -\frac{\langle P_0 - P, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\| \\ &= \frac{|\langle P_0 - P, v \rangle|}{\|v\|}. \end{aligned}$$

E como $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$, então

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1 x_1^0 + \dots + a_n x_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}. \quad \blacksquare$$

Apresentaremos a seguir a definição de (n-1)-esfera e a equação que a representa no \mathbb{R}^n . Em (MILLMAN, 1977) e (MENDELSON, 1990) a definição de (n-1)-esfera é restrita ao caso em que o raio vale um e o centro é a origem. Sem perda de generalidades iremos considerar a (n-1)-esfera em que o raio é maior ou igual a um e o centro sendo um ponto qualquer do \mathbb{R}^n .

Definição 3.2. Uma (n-1)-esfera no \mathbb{R}^n $n \geq 1$, de raio $r > 0$ e centro c é o conjunto

$$S_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(c, x) = r\}, \text{ onde } n \geq 1.$$

Note que, sendo $d(c, x)$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $c = (c_1, \dots, c_n)$, então

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = r^2,$$

que é a equação da (n-1)-esfera de centro c e raio r . Portanto, a (n-1)-esfera pode ser escrita como sendo o conjunto

$$S_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = r^2\}.$$

Exemplo 3.1. Dados $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, então:

1. Para $n = 1$, a 0-esfera $\mathbb{S}_r^0(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - c)^2 = r^2\} = \{c - r, c + r\}$;
2. Para $n = 2$, a 1-esfera $\mathbb{S}_r^1(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 (x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é o círculo de centro $c = (c_1, c_2)$ e raio $r > 0$;
3. Para $n = 3$, a 2-esfera $\mathbb{S}_r^2(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 (x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é a esfera de centro $c = (c_1, \dots, c_n)$ e raio > 0 .

4 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE O HIPERPLANO E A (n-1)-ESFERA

Na educação básica estudamos as posições relativas entre a reta e o círculo (1-esfera), no \mathbb{R}^2 . Nesta seção, nós estudaremos as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera, no \mathbb{R}^n .

O próximo teorema caracteriza as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera, que foram estudadas em (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019).

Teorema 4.1. Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano que passa pelo ponto $p = (p_1, \dots, p_n)$ do \mathbb{R}^n e $v = (v_1, \dots, v_n)$ um vetor normal a Γ_v^{n-1} . Seja $\mathbb{S}_r^{n-1}(c)$ uma (n-1)-esfera de centro $c = (c_1, \dots, c_n)$ e raio $r > 0$. Então:

- a. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) > r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \emptyset$;
- b. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) = r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$. Neste caso dizemos que o hiperplano é tangente à (n-1)-esfera;
- c. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) < r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(q)$, onde $k = d(c, \Gamma_v^{n-1})$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}$ é a (n-2)-esfera contida no hiperplano Γ_v^{n-1} com raio $\sqrt{r^2 - k^2}$ e centro em q, ponto de intersecção do plano Γ_v^{n-1} com a reta l normal a Γ_v^{n-1} , passando por c, com vetor normal v.

Demonstração. Sem perda de generalidades vamos considerar:

- i. A (n-1)-esfera $\mathbb{S}_r^{n-1}(o) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}$, com centro na origem $o = (0, \dots, 0)$, que de modo simplificado é denotada por \mathbb{S}_r^{n-1} ;
- ii. O hiperplano $\Gamma_{e_n}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{R}^n \mid k \text{ é constante}\}$, onde $e_n = (0, \dots, 1)$ é o vetor normal ao hiperplano.

Nesta primeira parte da demonstração provaremos a implicação da esquerda para direita.

a1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, então pelo Axioma 3.1, existe um único $p' \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ tal que $\overrightarrow{op'} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ e $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, p') > r$.

Temos então que $d(o, q) \geq d(o, p') > r$ para todo $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$.

Então $q \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$ para todo $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ e portanto $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \emptyset$.

b1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, nós concluímos então, pelo Axioma 3.1, que existe um único $q_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ tal que $\overrightarrow{oq_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ e $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, q_0)$ então $q_0 \in \mathbb{S}_r^{n-1}$.

Seja $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ então $d(o, b) \geq d(o, q_0)$. Portanto, para todo $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \setminus \{q_0\}$, temos que $b \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$. Portanto, $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \{q_0\}$.

c1) Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto $p_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ tal que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(p_0, o)$, onde $\overrightarrow{op_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$, e l é uma reta gerada por $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, portanto $p_0 = (0, \dots, 0, k)$.

Sendo $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$ então $d(o, p_0) = |k| < r$ e portanto $r^2 - k^2 > 0$.

Podemos considerar $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0) = \{p \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \mid d(p, p_0) = \sqrt{r^2 - k^2}\}$.

Seja $p = (x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0)$, então

$$d(p, p_0) = \sqrt{r^2 - k^2}$$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2.$$

Concluimos então que $(x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_r^{n-1}$. Portanto, $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1}$, e como $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0) \subset \Gamma_{e_n}^{n-1}$, então

$$\mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}. \quad (3)$$

Podemos concluir que $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} \neq \emptyset$. Agora, seja $p \in \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}$, ou seja, $p \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ e $p \in \mathbb{S}_r^{n-1}$, então

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2$$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = r^2 - k^2.$$

Logo, $p \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0)$ e portanto

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \subset \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0). \quad (4)$$

De (3) e (4) concluimos que

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}.$$

Nesta segunda parte da prova, nós provaremos a implicação da direita para a esquerda.

a2) Nós provaremos que: Se $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$ então $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$.

Equivalentemente: Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \leq r$, então $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \emptyset$.

Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, de (b1) temos $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p\} \neq \emptyset$. Agora, se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, de

(c1) concluimos que $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_2) \neq \emptyset$, onde $k = d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1})$.

b2) Provaremos que: Se $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$, então $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$.

Equivalentemente, se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ então $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1}$ não é um único ponto.

Para $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ temos dois casos: $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$ ou $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$.

No caso em que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, de (a1) temos que $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$.

Agora, se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, de (c1) temos que $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0)$.

c2) Provaremos que: se $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0)$ então $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$.

Equivalentemente: Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \geq r$, então $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \mathbb{S}_{\sqrt{r^2 - k^2}}^{n-2}(p_0)$.

Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, pelo item (b1), temos que $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = r..$

E se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, de (a1) temos $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$. ■

Agora, vamos ver exemplos de posições relativas entre o plano Γ_v^2 e a 2-esfera unitária com centro na origem \mathbb{S}_1^2 .

Exemplo 4.1. Se $d(o, \Gamma_v^2) > 1$ então o plano Γ_v^2 não intercepta a 2-esfera unitária \mathbb{S}_1^2 .

Vejam um exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação $x: -z + 2 = 0$, onde $v = (1, 0, -1)$, então pelo Teorema 3.2 $d(o, \Gamma_v^2) = \sqrt{2} > 1$. Pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \emptyset$. Veja a figura 1.

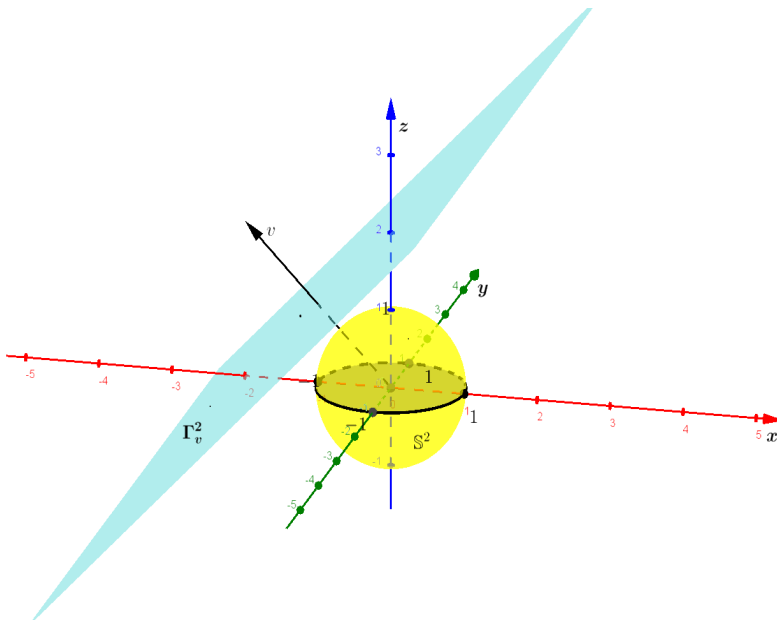


Figura 1

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.2. Se $d(o, \Gamma_v^2) = 1$, então o hiperplano Γ_v^2 é tangente ao 2-esfera \mathbb{S}_1^2 , no ponto P . Vejamos o exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação $x - z + \sqrt{2} = 0$, onde $v = (1, 0, -1)$, então pelo Teorema 3.2 temos que $d(o, \Gamma_v^2) = 1$. E pelo Teorema 4.1 obtemos $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \{p\}$, onde $p = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Veja a figura 2.

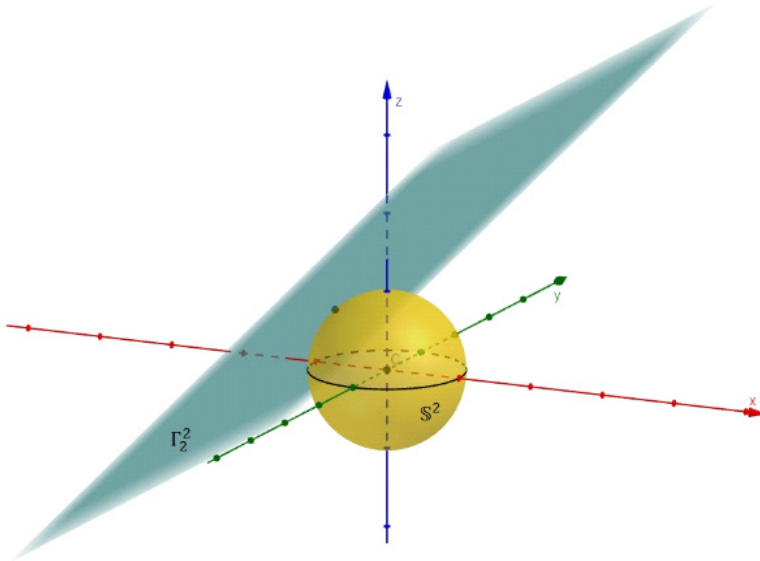


Figura 2

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.3. Se $d(o, \Gamma_v^2) < 1$ então o plano Γ_v^2 intersecta 2-esfera \mathbb{S}_1^2 , formando uma 1-esfera $\mathbb{S}_r^1(q)$ (circunferência) de raio $r = \sqrt{1 - d(o, \Gamma_v^2)^2}$, como mostra o seguinte exemplo:

Considere o hiperplano Γ_v^2 com equação $y - z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, onde $v = (0, 1, -1)$, então pelo Teorema 3.2 $d(o, \Gamma_v^2) = \frac{1}{2} < 1$. E pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \mathbb{S}_{\sqrt{3}/2}^1(q)$, onde $q = (0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Veja a figura 3.

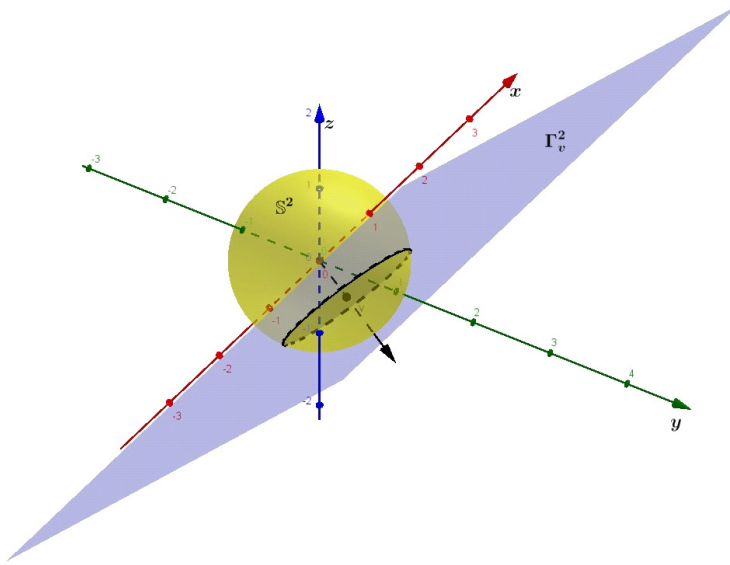


Figura 3

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

5 | POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE HIPERPLANOS

Na geometria analítica plana e espacial estuda-se as posições relativas de retas e planos, que são hiperplanos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente. Aqui, estudaremos posições relativas entre hiperplanos no \mathbb{R}^n .

Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, observa-se intuitivamente que se Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos, o ângulo entre eles é igual a zero.

Com base no conceito de ângulo entre planos dado em (SANTOS, 2007) definimos ângulo entre hiperplanos da seguinte forma:

Definição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v , respectivamente. O ângulo entre Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} , denotado por $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1})$, é dado por

$$\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = \cos^{-1}\left(\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Definição 5.2. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são ortogonais se o ângulo entre eles é igual a 90° .

A próxima proposição nos dá a caracterização de hiperplanos ortogonais.

Proposição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v , respectivamente. Então

$\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1}$ se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.

Demonstração:

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = \cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 90^\circ,$$

Isto é, $\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1}$.

Definição 5.3. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são iguais ou paralelos se o ângulo entre eles é igual a zero.

Para demonstração da proposição seguinte precisamos do seguinte lema, cuja a demonstração pode ser vista em (COELHO, 2001).

Lema 5.1. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e W um subespaço próprio de V . Então W é um hiperplano se, e somente se, $\dim_{\mathbb{K}} W = n - 1$.

Proposição 5.2. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, tendo como vetores normais u e v , respectivamente. Então:

- i. u e v são colineares se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos ou iguais;
- ii. u e v não são paralelos se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} , onde $n \geq 2$.

Demonstração: Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos distintos com vetores normais $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$, respectivamente e com equações

$$u_1 x_1 + \dots + u_n x_n + d_1 = 0 \tag{5}$$

e

$$v_1 x_1 + \dots + v_n x_n + d_2 = 0 \tag{6}$$

i) \Rightarrow) Suponha que u e v são vetores colineares, então existe $t \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = tv$. Logo,

$$\begin{aligned} \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) &= \cos^{-1}\left(\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{|\langle tv, v \rangle|}{\|tv\| \cdot \|v\|}\right) \\ &= \cos^{-1}(1). \end{aligned}$$

Daí $\cos \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 1$ e portanto $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 0$, isto é, $\Gamma_1^{n-1} // \Gamma_2^{n-1}$ ou $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$.

ii) \Leftarrow)

a) Se $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$, então $u = v$.

b) Suponha que $\Gamma_1^{n-1} // \Gamma_2^{n-1}$, como para cada $w \in \Gamma_2^{n-1}$ existe um representante w' de w em Γ_1^{n-1} então $\langle w', u \rangle = 0$, já que $u \perp \Gamma_1^{n-1}$. Daí temos que $\langle w, u \rangle = 0$ e sendo w arbitrário, então $u \perp \Gamma_2^{n-1}$. Portanto, u/v , isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = \lambda v$.

ii) \Rightarrow Suponha u e v não paralelos, pelo item (i) Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} não são paralelos, ou seja, $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \neq \emptyset$.

Dado $p = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ então $p \in \Gamma_1^{n-1}$ e $p \in \Gamma_2^{n-1}$. . Portanto,

$$u_1 x_1 + \dots + u_n x_n + d_1 = 0 \quad (7)$$

e

$$v_1 x_1 + \dots + v_n x_n + d_2 = 0 \quad (8)$$

Suponha sem perda de generalidades que $v_n \neq 0$, então

$$x_n = -\frac{d_2}{v_n} - \frac{u_1}{v_n} x_1 - \dots - \frac{u_{n-1}}{v_n} x_{n-1} \quad (9)$$

Substituindo-se (9) em (7), obtemos

$$A_1 x_1 + \dots + A_{n-1} x_{n-1} + d = 0, \quad (10)$$

onde $A_i = u_i v_n - u_n v_i$, com $1 \leq i \leq n-1$, e $d = d_1 v_n - u_n d_2$.

Note que esta é a equação de um hiperplano Γ_v^{n-2} com vetor normal $v = (A_1, \dots, A_{n-1})$. Logo $p \in \Gamma_v^{n-2}$ e portanto $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \subseteq \Gamma_v^{n-2}$.

Agora, como Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são hiperplanos então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ é também um hiperplano. Pelo lema $\dim(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = \dim \Gamma_1^{n-1} - 1 = n - 2$. Como $\dim \Gamma_v^{n-2} = n - 2$ então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} = \Gamma_v^{n-2}$. ■

6 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE $(n-1)$ ESFERAS

Como no caso dos hiperplanos, aqui iremos apresentar as posições relativas entre $(n-1)$ -esferas. Lembramos inicialmente que no espaço euclidiano duas esferas são iguais se possuem mesmo raio e o mesmo centro. E que são concêntricas se possuem o mesmo centro. No caso em que temos duas $(n-1)$ -esferas a situação é a mesma. No que segue veremos como pode ser caracterizado este fato do ponto de vista da Geometria Analítica.

Proposição 6.1. Sejam $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ $(n-1)$ -esferas de centros $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$, respectivamente. Então:

i. $r_1 = r_2$ e $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) = \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$;;

ii. $r_1 \neq r_2$ e $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas e não coincidentes.

Demonstração:

i) \Rightarrow) Como $r_1 = r_2$, então

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r_1^2 = r_2^2.$$

E sendo $d(a,b) = 0$ então $a = b$, ou seja, $a_i = b_i, 1 \leq i \leq n$. Daí,

$$r_2^2 = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = (x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2$$

Logo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \subset \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Analogamente prova-se que $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \subset \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ obtendo-se assim a igualdade.

\Leftarrow) Vamos provar que se $r_1 \neq r_2$ ou $d(a, b) \neq 0$ então $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Suponha que $d(a,b) \neq 0$ então $a \neq b$. Se $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$, nada temos a provar. Suponha então que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \neq \emptyset$, logo existe $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ tal que $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí, $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Se $r_1 \neq r_2$, sem perda de generalidades podemos supor $r_2 > r_1$. Vamos supor também que $d(a, b) = 0$, caso contrário caímos no caso anterior e a proposição estará provada. Sendo assim $a = b$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ então $\|x - b\| = r_2$ e daí $\|x - a\| = \|x - b\| = r_2 > r_1$ Logo $x \notin \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

ii) \Rightarrow) Como $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$ e sendo $r_2 \neq r_1$ podemos supor sem perda de generalidades que $r_1 < r_2$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ então $\|x - a\| = r_1 < r_2$ e portanto $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$, Logo $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas não coincidentes.

\Leftarrow) Sendo $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ concêntricas então $d(a,b) = 0$. Como elas não são coincidentes, isto é, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$, então pela proposição 6.1 item (i) temos que $r_2 \neq r_1$. ■

Dois círculos são ditos secantes se possuem dois pontos em comum. Para (n-1)-esferas, com $n > 2$, o conceito é análogo.

Definição 6.1. Duas (n-1)-esferas $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ onde $n \geq 2$, são ditas hipersecantes se existe uma (n - 2)-esfera $\mathbb{S}_r^{n-2}(c)$ tal que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \mathbb{S}_r^{n-2}(c).$$

No caso em que $n = 3$ temos que $\mathbb{S}_{r_1}^2(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^2(b) = \mathbb{S}_r^1(c)$, logo as esferas $\mathbb{S}_{r_1}^2(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^2(b)$ são hipersecantes.

Proposição 6.2. Sejam $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ ($n - 1$) - esfera de centros $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ respectivamente. Então:

- i. $d(a,b) > r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$;
- ii. $d(a,b)$ é igual a $r_1 + r_2$ ou $|r_1 - r_2|$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$;
- iii. $|r_1 - r_2| < d(a,b) < r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \mathbb{S}_r^{n-2}(c)$.

Demonstração:

i) \Rightarrow Suponha que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \neq \emptyset$, então existe $p = (p_1, \dots, p_n)$ em $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí $d(p, a) = r_1$ e $d(p, b) = r_2$

Concluimos que $d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) = r_1 + r_2$.

\Leftarrow Suponha que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \neq \emptyset$, vamos provar que $d(a,b) > r_1 + r_2$.

Seja $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ fechados, então

$$d(\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a), \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)) = \min\{d(x, y) \mid x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \text{ e } y \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)\}$$

$$= d(x_0, y_0) > 0,$$

Pois $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$.

Portanto,

$$d(a, b) = d(a, \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)) + d(\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a), \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)) + d(\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b), b) > r_1 + r_2.$$

ii) \Rightarrow Seja $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a curva que liga os pontos a e b definida por

$$x(t) = (1 - t)a + tb, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

onde $x(0) = a$ e $x(1) = b$.

Vamos supor inicialmente que $d(a,b) = r_1 + r_2$. Seja $x_0(t_0) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}$ então

$$\begin{aligned} r_1 &= \|x(t_0) - a\| = \|(1 - t_0)a + bt_0 - a\| = \|b - a\|t_0 \\ &= (r_1 + r_2)t_0. \end{aligned}$$

Logo $t_0 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$. Agora,

$$p = x(t_0) = x\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right) = \frac{r_2}{r_1 + r_2}a + \frac{r_1}{r_1 + r_2}b$$

Daí, $\|p - b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2} \|a - b\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.
 Vamos supor agora, sem perda de generalidades, que $r_1 > r_2$ e que $d(a,b) = r_1 - r_2$,
 então

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1 - t_0)a + bt_0 - a\| = \|b - a\|t_0 = (r_1 - r_2)t_0.$$

Logo, $t_0 = \frac{r_1}{r_1+r_2}$. Agora, $p = x(t_0) = x\left(\frac{r_1}{r_1+r_2}\right) = -\frac{r_2}{r_1-r_2}a + \frac{r_1}{r_1-r_2}b$.

Sendo assim, $\|p - b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2} \|b - a\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Sendo $x(t_0)$, em quaisquer dos dois casos, único, então $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$.
 \Leftrightarrow Supomos agora que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$, então existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$x(t_0) = p.$$

Como $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ então $r_1 = \|p - a\| = \|b - a\|t_0 = d(a,b)t_0$.

Enquanto que $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ implica que $r_1 = \|p - b\| = |t_0 - 1|d(a,b)$.

Daí, $(t_0 - 1)d(a,b) = -r_2$ ou $(t_0 - 1)d(a,b) = r_2$. Como $d(a,b) > 0$ então

$$\left(1 - \frac{r_1}{d(a,b)}\right) d(a,b) = r_2 \text{ ou } \left(1 - \frac{r_1}{d(a,b)}\right) d(a,b) = -r_2 \text{ ou } . \text{ Portanto } d(a,b) = r_1+r_2 \text{ ou } d(a,b) = r_1 - r_2.$$

iii) Como $d(a,b) > r_1+r_2$ pelo item (i) desta proposição temos que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$
 Logo, existe $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí,

$$(x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2 = r_2^2 \tag{11}$$

e

$$(x_n - a_n)^2 = r_1^2 - (x_1 - a_1)^2 - \dots - (x_{n-1} - a_{n-1})^2 \tag{12}$$

Note que

$$(x_i - b_i)^2 = (x_i - a_i)^2 + 2(a_i - b_i)(x_i - a_i) + (a_i - b_i)^2, \text{ onde } 1 \leq i \leq n. \tag{13}$$

De (11), (12) e (13) obtemos

$$2(a_1 - b_1)x_1 + \dots + 2(a_n - b_n)x_n + b_1^2 + \dots + b_n^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2 = r_2^2 - r_1^2$$

Portanto p pertence à um hiperplano Γ_v^{n-1} , que tem como vetor normal $v = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$

Como $d(a, \Gamma_v^{n-1}) < r_1$ então pela Teorema 4.1 temos que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1} \cap \Gamma_v^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r_1^2 - k^2}}^{n-2}(q).$$

onde $\mathbb{S}_{\sqrt{r_1^2 - k^2}}^{n-2}(q)$ é a $(n-2)$ -esfera contida no hiperplano Γ_v^{n-1} tendo q como centro, ponto de interseção Γ_v^{n-1} de com a reta l normal a Γ_v^{n-1} e que passa por a e por b . Além disso $k = (a, \Gamma_v^{n-1})$.

71 CONCLUSÕES

Neste artigo, estudamos as posições relativas entre o hiperplano e o n -esfera. Foi apresentado, um resultado que generaliza para o n -espaço euclidiano, o problema de como caracterizar as posições relativas: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências, e finalmente entre o plano e a esfera, no caso do 3-espaço euclidiano. Destacamos o caso da caracterização da posição relativa de um hiperplano com uma $(n-1)$ -esfera, quando a distância até o hiperplano é menor do que o raio da esfera, a interseção dos referidos objetos é uma $(n-2)$ -esfera e não um círculo como no caso do 3-espaço euclidiano.

REFERÊNCIAS

COELHO, F. Uchoa.; LOURENÇO, M. L.. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

HONIG, C. S. **Aplicações da topologia à análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

KREYZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: John Wiley & Sons, 1978.

LANG, S.. **Álgebra linear**: traduzido da terceira edição em inglês. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L.. **Curso de análise** Vol.2. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

MILLMAN, R. S.; PORKER, G. D. **Elements of Differential Geometry**. New Jersey: Prentice Hall, 1977.

MENDELSON, B.. **Introduction to topology**. New York: Dover Publications, 1990.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F. **Hiperplano e $n(n-1)$ -esfera: posições relativas**. RCT-Revista de Ciência e Tecnologia. v.1.n.1, 2015.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F. **Relative positions between the hyperplane and the n -sphere**. RCT – Revista de Ciência e Tecnologia. v.5.n.8, 2019.

SANTOS, N. M.. **Vetores e matrizes: uma introdução a álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2007.

SPIVAK, M. **O cálculo em variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2003.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Adaptações 2, 5, 272, 273, 275, 276, 277, 278, 280, 281, 282, 283, 285

Adição 153, 179, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 220, 237, 244

Alunos com Necessidades Educacionais Especiais 273

Análise Dinâmica 118, 125

ANSYS - LS 118

Aprendizagem Matemática 1, 14, 46, 48, 146, 190, 199, 204, 218, 270

Aprendizagem Significativa 45, 109, 110, 111, 116, 117, 146, 151, 192, 276

Aula Invertida 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315

Avaliação 5, 9, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 45, 46, 48, 112, 114, 138, 193, 202, 203, 205, 207, 218, 261, 265, 288

B

Bhaskara/ Φ 241, 242, 247, 248, 249, 250, 251, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259

C

Campos Conceituais 207, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271

Complementaridade 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 298

Conceitos Básicos 75, 78, 153, 271

Conhecimentos 4, 6, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 24, 31, 41, 42, 43, 52, 57, 63, 76, 77, 80, 84, 85, 86, 110, 113, 114, 116, 144, 146, 190, 194, 197, 198, 199, 203, 204, 205, 211, 217, 228, 229, 239, 240, 260, 262, 263, 265, 267, 269, 290, 291, 293, 294, 299, 311, 312

Consumo 55, 69, 111, 144, 145, 146, 148, 150, 151

Cotidiano 50, 51, 52, 53, 55, 77, 81, 83, 84, 113, 146, 149, 150, 151, 198, 270

Crivo 170, 171, 175, 176

D

Decomposição lu 101

Desinteresse dos Alunos 1, 9, 10, 13

Dificuldades de Aprendizagem 74, 75, 79, 88

Divisão 47, 54, 66, 170, 171, 234, 261, 266, 267, 268, 271, 287, 288, 293, 294, 295, 296, 297, 298

E

Educação a Distância 50

Educação Matemática 6, 14, 18, 20, 26, 27, 29, 39, 48, 49, 74, 87, 108, 109, 132, 139, 140,

142, 151, 177, 189, 190, 191, 200, 202, 203, 218, 271, 286, 289, 298, 300, 316

Elementos Estruturantes 75, 76, 78, 83, 85

Elementos Finitos 32, 118, 119

Ensino de Matemática 11, 56, 70, 71, 77, 141, 142, 144, 149, 150, 200, 219, 271, 302, 307, 316

Ensino Fundamental 1, 2, 3, 25, 40, 41, 43, 48, 140, 143, 151, 189, 193, 195, 198, 200, 201, 203, 218, 219, 220, 221, 260, 267, 287, 288, 292

Ensino Médio 7, 8, 25, 27, 69, 71, 74, 75, 76, 81, 84, 87, 109, 110, 112, 114, 115, 116, 117, 144, 146, 147, 149, 151, 219, 221, 227, 241, 271, 276, 302

Epístola 228

Equação Diferencial Parcial - EDP 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38

Equação Polinomial de Grau Dois 241

Espaço Euclidiano 152, 155, 164, 168

F

Feira de Matemática 16, 18, 20, 197

Filas 89, 90, 91, 92, 94, 95, 104, 233

Formação Docente 16, 18, 19, 26, 140

Formação para o Trabalho 50, 58

G

Geogebra 69, 70, 71, 72, 73

H

Hiperesfera 152

Hiperplano 152, 153, 154, 155, 156, 158, 160, 161, 163, 164, 167, 168

História 13, 21, 22, 26, 29, 31, 33, 39, 51, 86, 87, 88, 112, 141, 142, 150, 189, 197, 228, 229, 238, 239, 245, 259, 263

História da Matemática 29, 39, 112, 189, 197, 239, 245, 259

I

Interfaces Educacionais 101

J

Jogos Matemáticos 197, 221, 260, 261, 266, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 283, 285, 286, 301, 307

M

Matemática 2, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27,

28, 29, 30, 31, 33, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 64, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 108, 109, 110, 112, 116, 117, 119, 120, 132, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 177, 178, 179, 184, 186, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 211, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 234, 235, 237, 239, 240, 243, 244, 245, 246, 259, 260, 261, 262, 266, 268, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 306, 307, 308, 310, 316

Matemática Financeira 144, 145, 146, 147, 150, 151, 316

Materiais Didáticos 47, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 199, 200, 201, 276, 307

Material Concreto 198, 200, 201, 301, 303

Mediação 202, 207, 209, 211, 212, 215, 267, 290

Método de Diferenças Finitas 118

Método de Resolução 241

Metodologias Inovadoras de Ensino 190, 195, 199

Modelagem Matemática 61, 119, 132, 141

N

Números Primos 170, 171, 172, 175, 176, 234, 235, 236, 237

O

Operação Matemática 177, 178, 184, 294

P

Prática Docente 4, 11, 50, 51, 193, 219, 226

Professor Iniciante 1, 2, 3, 8

Programação Orientada a Objeto 61

Projeto GAMA 308, 309, 310, 311, 314

Proposta Pedagógica 54, 177, 186

R

Resolução de Problemas 87, 109, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 177, 198, 202, 204, 205, 206, 218, 220, 274, 301

Rstudio 95

S

Sadosky 101, 102, 103, 104, 108

Semiótica 287, 288, 289, 290, 292, 294, 298

Sentido 2, 3, 4, 6, 7, 11, 14, 17, 20, 23, 42, 44, 45, 47, 51, 53, 56, 71, 76, 77, 78, 79, 80,

81, 83, 85, 101, 112, 150, 171, 200, 244, 263, 264, 267, 285, 287, 288, 291, 292, 294, 296, 298, 299, 314

Subtração 202, 203, 205, 206, 207, 208, 213, 216, 267

T

Técnica da Transformada Integral Clássica - (CITT) 29, 30, 31, 32, 38

Técnica da Transformada Integral Generalizada - (GITT) 29, 30, 32, 33, 37, 38

Tecnologias Digitais 69, 70, 71, 74

Teoria de Conjunto 61, 64

Teoria dos Números 170, 228, 229, 230, 234, 235, 236, 237, 238, 240

Territórios Virtuais 50, 51, 52

Teste de Primalidade 170, 171, 172, 174, 175

Torneio de Jogos Matemáticos 272, 273, 274, 275, 276, 277, 283, 285

Transformada Integral 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

Trigonometria 69, 71, 72, 245, 301, 302

V

Viga de Euler-Bernoulli 118, 125





www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

www.atenaeditora.com.br 
contato@atenaeditora.com.br 
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 
www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3