Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Luiza Alves Batista
Correção:	Kimberlly Elisandra Gonçalves Carneiro
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-855-7
DOI 10.22533/at.ed.557211003

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um "novo normal", onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse "novo normal", o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um "novo normal"; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 15

UM ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS DO HIPERPLANO E DA (n-1) -ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 04/01/2021

Joselito de Oliveira
Universidade Federal de Roraima
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Boa Vista-RR
http://lattes.cnpq.br/7059770609022356

Wender Ferreira Lamounier
Universidade Federal de Roraima
Escola de Aplicação
Boa Vista-RR
http://lattes.cnpq.br/5878316434409400

RESUMO: Na Geometria Analítica *são estudados a reta, o círculo e as suas posições relativas.* Neste artigo, de forma semelhante é apresentado um estudo das posições relativas do hiperplano e da (n-1)-esfera, no espaço euclidiano n-dimensional. Inicialmente, apresenta-se um estudo sobre as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera. Depois, as posições relativas entre hiperplanos são apresentadas. E finalmente, estuda-se as posições relativas entre as (n-1)-esferas.

PALAVRAS-CHAVE: Hiperesfera, Hiperplano, Espaço Euclidiano.

A STUDY OF THE RELATIVE POSITIONS OF THE HYPERPLANE AND OF THE (n-1) -SPHERE IN EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT: In Analytical Geometry, the line, the circle and their relative positions are studied. In this paper, in a similar way, a study of the relative positions of the hyperplane and the (n-1)-sphere is presented, in the n-dimensional Euclidean space. Initially, a study is presented on the relative positions between the hyperplane and the (n-1)-sphere. Then, the relative positions between hyperplanes are presented. And, finally, we study the relative positions between the (n-1)-spheres.

KEYWORDS: Hypersphere, Hyperplane, Euclidean Space.

1 I INTRODUÇÃO

Nas Geometrias, Analítica Plana e Espacial, estuda-se as posiç*ões* relativas de retas e planos*.* Estuda-se também a posição relativa: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências. Neste artigo estuda-se, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera, entre hiperplanos, e entre (n-1)-esferas, compilando assim todo o estudo realizado nos artigos (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2015) e (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019). Além das proposições, que caracteriza as posições relativas dos referidos objetos geométricos, apresenta-se o conceito de hipersecante. Em (MILLMAN, 1977), assim como em (MENDELSON, 1990), a definição de (n-1)-esfera restringe-se ao caso em que o raio vale um) o centro *é* a origem. Aqui, sem perda de generalidades vamos considerar a (n-1)-esfera com raio maior ou igual a um e centro em um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$. O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção dois encontra-se a matemática necessária ao entendimento das seções seguintes. Sua leitura poderá ser dispensada. A seção três nos mostra a fórmula para se calcular a distância entre um ponto e um hiperplano. Na seção 4, estuda-se as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera. Na seção cinco, as posições relativas entre hiperplanos são estudadas. E finalmente, na seção 6, trata das posições relativas entre (n-1)-esferas.

2 I PRELIMINARES

Nessa seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas que servirão de suporte teórico para o desenvolvimento do artigo. Para iniciar esta seção apresenta-se alguns conceitos básicos que podem ser encontrados nas referências (LIMA, 2005) e (SPIVAK, 2003).

Definição 2.1. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, denota-se por $\mathbb{R}^n$ o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

As operações seguintes fazem do $\mathbb{R}^n$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Dados $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, vetores do $\mathbb{R}^n$ e um número real λ, as operações de soma $x + y$ e o produto $\lambda \cdot x$ são definidas por:

i. $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$;

ii. $(\lambda . x_1,\ldots, \lambda . x_n)$

Observação 2.1. O elemento neutro para a adição é o **0** = (0, ..., 0), enquanto que o simétrico de $x = (x_1,\ldots,x_n)$ é o elemento $-x = (-x_1,\ldots,-x_n)$, uma vez que x + (-x) = **0**.

Dados dois vetores $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$, o produto interno de x e y aqui considerado é dado por $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

É fácil provar que o produto interno usual satisfaz as seguintes propriedades:

1. $< x, x > \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e $< x, x > = 0$ se, e somente se $x = 0$;
2. $< x, y > = < y, x >$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3. $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$, para todo x, y, z $\in \mathbb{R}^n$;
4. $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$, para todo x, y$\in$ x, y $\in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1. De acordo com a definição 2.1, temos os seguintes espaços euclidianos: a reta $\mathbb{R}$; o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, e o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Lembramos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando { x, y} = 0.

Para o nosso estudo, vamos considerar a norma euclidiana, isto é, o número real dado por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Do produto interno é provado que a norma satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, *e* $\|x\| > 0$ *se* $x \neq 0$.

2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Com base na norma pode-se definir a distância em $\mathbb{R}^n$, do seguinte modo*:* Dados *x*, *y* $\in \mathbb{R}^n$, a distância de *x a y* é definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dessa forma dados $P = (p_1, ..., p_n)$ e $Q = (q_1, ..., q_n)$, pontos do $\mathbb{R}^n$ então

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}.$$

O conceito de hiperplano pode ser encontrado em (COELHO, 2001) e (LANG, 2003), mas aqui será enunciado considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2. Sejam $v \neq 0$ um vetor não nulo e P um ponto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\Gamma_v^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid < X - P, , v >= 0\},$$

é denominado **hiperplano**.

Sendo o hiperplano, que passa pelo ponto $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor não nulo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, dado $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_v^{n-1}$, então $\langle (X - P), v \rangle = 0$. Portanto, $v \perp (X - P)$, onde $X - P = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Então

$$\langle (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n - p_1 v_1 - \cdots - p_n v_n,$$

ou seja,

$$v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n + d = 0, \text{ onde } d = -p_1 v_1 - \cdots - p_n v_n.$$

E esta é a equação do hiperplano Γ_v^{n-1},, que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Exemplo 2.2. No plano, caso em que n = 2, o hiperplano é a conhecida equação da reta $v_1 x_1 + v_2 x_2 + d = 0$, objeto de estudo da geometria analítica plana.

Exemplo *2.3.* No espaço, caso em que n *= 3*, o hiperplano *é* conhecido como equação do plano $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + d = 0$.

3 I DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM HIPERPLANO

Nós iniciamos a seção com a versão do teorema de Pitágoras para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, presente em (HONIG, 1976) e proposto como um exercício em (SPIVAK, 2003). Então, nós apresentamos a definição de distância de um ponto a um hiperplano no espaço $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1 *(Teorema de Pitágoras)***.** Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Então,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

Demonstração. *Sejam A, B e C pontos em* $\mathbb{R}^n$*, então*

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle.$$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$. ■

Corolário 3.1*.* Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$*,* tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *e* $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$..

Então:

i) $\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$;

ii) $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$.

Demonstração. *Se* $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ *então, pelo Teorema 3.1,* $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

Analogamente, se $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ *então, pelo Teorema 3.1 temos que* $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Veremos agora o caso em que os vetores $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{BC}$ *não são nulos.*

Se $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ *pelo Teorema 3.1 temos*

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 > \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| > \|\overrightarrow{AB}\|.$$

A prova de (ii) é análoga. ■

Corolário 3.2. Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $C \neq B, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Então $d(A,B) < d(A,C)$.

Demonstração. *Pelo Corolário 3.1(i) e o teorema 3.1 obtemos* $d(A,B) < d(A,C)$.. ■.

Definição 3.1*.* A distância de um ponto *P* em $\mathbb{R}^n$ a um hiperplano Γ_v^{n-1}, onde $P \notin \Gamma_v^{n-1}$ é dado como a menor das distâncias de *P* aos pontos de Γ_v^{n-1}, ou seja,

$$d(P, \Gamma_v^{n-1}) = min\{d(P,Q) \mid Q \in \Gamma_v^{n-1}\} \cdot$$

A próxima afirmação será considerada aqui como um axioma, contudo, na referência (KREYSZIG, 1978) é um teorema que precisa de técnicas da análise funcional para realizar sua demonstração.

Axioma 3.1. Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano, P_0 um ponto do $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$ e v um vetor normal a Γ_v^{n-1}. Existe um único ponto $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ tal que $\overrightarrow{PQ} // v$ e $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$.

Agora iremos apresentar uma fórmula que permite calcular a distância de um ponto ao hiperplano. Inicialmente, vamos lembrar a fórmula nos seguintes casos*:*

1. Em $\mathbb{R}^2$, considere a reta $\Gamma_v^1 : ax + by = d$ (hiperplano), gerada pelo vetor v=(a,b) e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_v^1$. A distância do ponto ao plano é dada por

$$d(P_0, \Gamma_v^1) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere o plano $\Gamma_v^2 : ax + by + cz = d$ (hiperplano), gerado pelo vetor *v = (a, b,c)* e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_v^2$. A distância do ponto ao plano é dado por

$$d(P_0, \Gamma_v^2) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

O próximo teorema nos dá a fórmula para calcular a distância de um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ a um hiperplano Γ_v^{n-1}.

Teorema 3.*2*. Sejam $\Gamma_v^{n-1} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$ um hiperplano gerado pelo vetor não nulo $v = (a_1, \ldots, a_n)$ e $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ um ponto em $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$. Então, a distância entre o ponto P_0 e o hiperplano Γ_v^{n-1} é dada por:

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + \cdots + a_nx_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Demonstração. *A demonstração foi adaptada de (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).*

Seja $\Gamma_v^{n-1} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + d = 0$ *a equação de um hiperplano com vetor normal não nulo* $v = (a_1, \ldots, a_n)$ *através de um ponto* P *e* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$, *então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto* $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{P_0Q} // v$ *e* $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$. *Como* $\overrightarrow{P_0Q} // v$, *então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $Q - P_0 = \lambda v$ *, isto é,*

$$P_0 = Q - \lambda v \tag{1}$$

Sendo $P_0 = Q - \lambda v$ *então* $P_0 - P = (Q - P) + \lambda v$. *Portanto,*

$$< P_0 - P, v > = < Q - P, v > + \lambda < v, v >.$$
$$= \lambda < v, v > \cdot$$

Sendo v ≠ 0, então

$$\lambda = \frac{<p_0 - p, v>}{\|v\|^2} \cdot \tag{2}$$

De (1) *e* (2) *obtemos*

$$P_0 = Q - \frac{< P_0 - P, v >}{\| v \|^2} v \cdot$$

Então, a distância de P_0 ao ponto mais próximo Q é igual a

$$\begin{aligned} d(P_0, Q) &= \| P_0 - Q \| \\ &= \| -\frac{< P_0 - P, v >}{\| v \|^2} v \| \\ &= \frac{|< P_0 - P, v >|}{\| v \|}. \end{aligned}$$

E como $d(P_0\,, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$, *então*

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1 x_1^0 + \cdots + a_n x_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \cdot \quad \blacksquare$$

Apresentaremos a seguir a definição de (n-1)-esfera e a equação que à representa no $\mathbb{R}^n$. Em (MILLMAN, 1977) e (MENDELSON, 1990) a definição *de* (n-1)-esfera é restrita ao caso em que o raio vale um e o centro é a origem. Sem perda de generalidades iremos considerar a (n-1)-esfera em que o raio é maior ou igual a um e o centro sendo um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2. Uma (n-1)-esfera no $\mathbb{R}^n$ *n ≥ 1,* de raio r > *0* e centro c é o conjunto

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(c, x) = r\}, \text{ onde } n \geq 1.$$

Note que, sendo d (c, x), onde *x = (x_1, ..., x_n) e c = (c_1, ..., c_n),* então

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 = r^2,$$

que é a equação da (n-1)-esfera de centro *c* e raio *r.* Portanto, a (**n-1**)-esfera pode ser escrita como sendo o conjunto

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2\}.$$

Exemplo 3.1. Dados c = (c_1, ..., c_2) $\in \mathbb{R}^n$ e r > *0*, então:

1. Para n = *1*, a *0*-esfera $\mathbb{S}_r^0(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-c)^2 = r^2\} = \{c-r, c+r\}$; ;

2. Para n = *2*, a *1*-esfera $\mathbb{S}_r^1(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2}(x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é o círculo de centro c = (c_1,c_2) e raio r > *0*;

3. Para n = *3*, a *2*-esfera $\mathbb{S}_r^2(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3}(x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é a esfera de centro *c = (c_1, ..., c_n)* e raio > 0.

4 | POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE O HIPERPLANO E A (n-1)-ESFERA

Na educação básica estudamos as posições relativas entre a reta e o círculo (1-esfera), no $\mathbb{R}^2$. Nesta seção, nós estudaremos as posições relativas entre o hiperplano e a (*n*-1)-esfera, no $\mathbb{R}^n$.

O próximo teorema caracteriza as posições relativas entre o hiperplano e a (*n* -1)-esfera, que foram estudas em (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019).

Teorema 4.1*.* Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano que passa pelo ponto *p = (p_1, ..., p_n)* do $\mathbb{R}^n$ e *v = (v_1, ..., v_n)* um vetor normal a Γ_v^{n-1}. Seja $\mathbb{S}_r^{n-1}(c)$ uma (n-1)-esfera de centro *c = (c_1, ..., c_n)* e raio r > *0*. Então:

a. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) > r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \emptyset$;

b. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) = r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$. Neste caso dizemos que o hiperplano é tangente à (n-1)-esfera;

c. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) < r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(q)$, onde k = $d(c, \Gamma_v^{n-1})$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}$ é *a* (n-2)-esfera contida no hiperplano Γ_v^{n-1} com raio $\sqrt{r^2-k^2}$ e centro em q, ponto de intersecção do plano Γ_v^{n-1} com a reta l normal a Γ_v^{n-1}, passando por c, com vetor normal v.

Demonstração. *Sem perda de generalidades vamos considerar:*

i. *A (n-1)-esfera* $\mathbb{S}_r^{n-1}(o) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2\}$, *com centro na origem* 0 = (0, ..., 0), *que de modo simplificado é denotada por* $\mathbb{S}_r^{n-1}$*;*

ii. *O hiperplano* $\Gamma_{e_n}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{R}^n \mid k$ *é constante*$\}$, *onde* e_n = (0, ..., 1) *é o vetor normal ao hiperplano.*

Nesta primeira parte da demonstração provaremos a implicação da esquerda para direita.

a1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *então pelo Axioma 3.1, existe um único* $p' \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{op'} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, p') > r$.

Temos então que $d(o, q) \geq d(o, p') > r$ *para todo* $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$.

Então $q \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$ *para todo* $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e portanto* $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \emptyset$.

b1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *nós concluímos então, pelo Axioma 3.1, que existe um único* $q_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{oq_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, q_0)$ *então* $q_0 \in \mathbb{S}_r^{n-1}$.

Seja $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *então* $d(o, b) \geq d(o, q_0)$. *Portanto, para todo* $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \setminus \{q_0\}$, *temos que* $b \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$. *Portanto,* $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \{q_0\}$.

c1) Se $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, *então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto* $p_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(p_0, o)$, *onde* $\overrightarrow{op_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$, *e l é uma reta gerada por* $e_n = (0,\ldots,0,1)$, *portanto* $p_o = (0,\ldots,0,k)$.

Sendo $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$ *então* $d(o,p_0) = |k| < r$ *e portanto* $r^2 - k^2 > 0$.
Podemos considerar $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0) = \{p \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \mid d(p,p_0) = \sqrt{r^2-k^2}\}$.

Seja $p = (x_1, \ldots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_o)$, então

$$d(p,p_0) = \sqrt{r^2-k^2}$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2 \cdot$$

Concluímos então que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_r^{n-1}$. *Portanto,* $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1}$, *e como* $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0) \subset \Gamma_{e_n}^{n-1}$, *então*

$$\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}. \qquad (3)$$

Podemos concluir que $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} \neq \emptyset$. Agora, seja $p \in \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}$, ou seja, $p \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $p \in \mathbb{S}_r^{n-1}$, então

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = r^2 - k^2.$$

Logo, $p \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$ e portanto

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \subset \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0). \qquad (4)$$

De (3) e (4) concluímos que

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \cdot$$

Nesta segunda parte da prova, nós provaremos a implicação dá direita para a esquerda.

a*2) Nós provaremos que: Se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$ *então* $d(0,\Gamma^{n-1}) > r$.
Equivalentemente: Se $d(o,\Gamma^{n-1}) \leq r$, *então* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \emptyset$. .
Se $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *de* (b*1) temos* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p\} \neq \emptyset$. *Agora, se* $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, *de* (c*1) concluímos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_2) \neq \emptyset$, *onde* $k = d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1})$.

b2) *Provaremos que: Se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$, *então* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$.

Equivalentemente, se $d((o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ então $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_{e_n}^{n-1}$ não é um único ponto.

Para $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ *temos dois casos:* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$ *ou* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$..

No caso em que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*a1*) temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_{e_n}^{n-1} = \emptyset$.

Agora, se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*c1*) temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$.

c2) *Provaremos que: se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$ *então* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$.

Equivalentemente: Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \geq r$, *então* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$.

Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *pelo item (*b1*), temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = r$..

E se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*a1*) temos* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$.■

Agora, vamos ver exemplos de posições relativas entre o plano Γ_v^2 *e a 2*-esfera unitária com centro na origem $\mathbb{S}_1^2$.

Exemplo 4.1. Se $d(o, \Gamma_v^2) > 1$ então o plano Γ_v^2 *não intercepta a 2*-esfera unitária $\mathbb{S}_1^2$.

Vejamos um exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação *x: - z + 2 = 0*, onde v = (1,0, - 1), então pelo Teorema 3.2 $d(o, \Gamma_v^2) = \sqrt{2} > 1$. Pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \emptyset$. Veja a figura *1*.

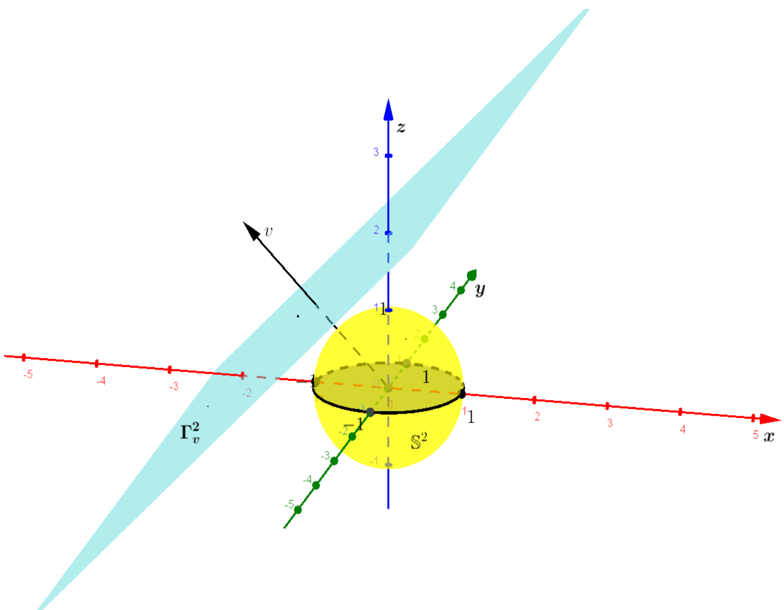

Figura 1

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.2. Se $d(o,\Gamma_v^2) = 1$, então o hiperplano Γ_v^2 é tangente ao *2*-esfera $\mathbb{S}_1^2$, no ponto *P*. Vejamos o exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação $x - z + \sqrt{2} = 0$, onde $v = (1,0,-1)$, então pelo Teorema 3.2 temos que $d(o,\Gamma_v^2) = 1$. E pelo Teorema 4.1 obtemos $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \{p\}$, onde p = $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Veja a figura *2*.

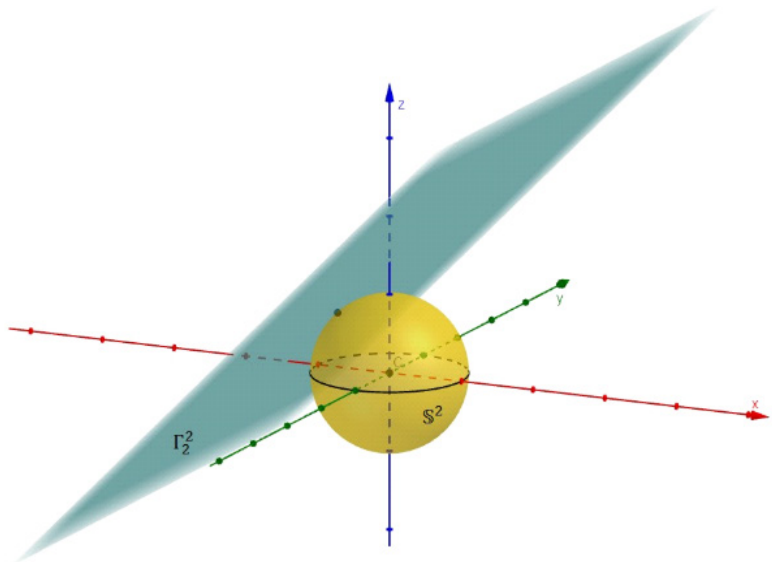

Figura 2

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.3. Se $d(o,\Gamma_v^2) < 1$ então o plano Γ_v^2 intersecta *2*-esfera $\mathbb{S}_1^2$, formando uma 1-esfera $\mathbb{S}_r^1(q)$ (circunferência) de raio $r = \sqrt{1 - d(o,\Gamma_v^2)^2}$, como mostra o seguinte exemplo:

Considere o hiperplano $\boldsymbol{\Gamma_v^2}$ com equação $y - z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, onde $v = (0,1,-1)$, então pelo Teorema 3.2 $d(o,\Gamma_v^2) = \frac{1}{2} < 1$. E pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \mathbb{S}_{\sqrt{3}/2}^1(q)$, onde $q = (0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Veja a figura *3*.

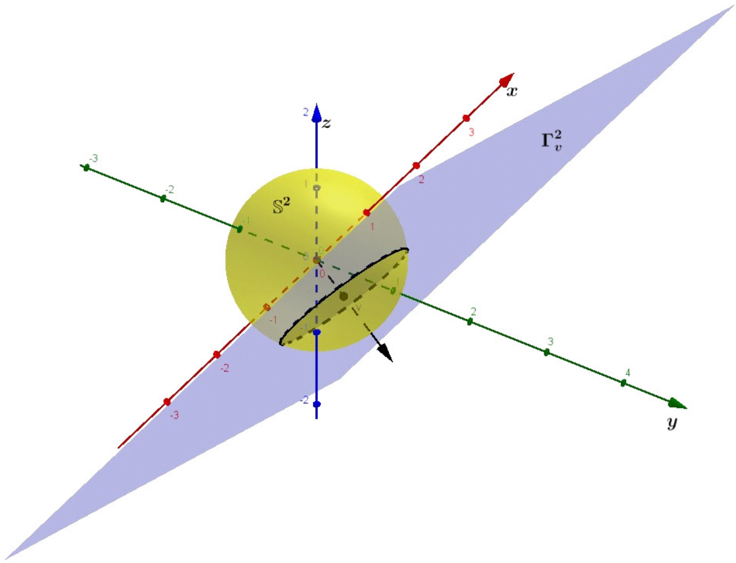

Figura 3

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

5 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE HIPERPLANOS

Na geometria analítica plana e espacial estuda-se as posições relativas de retas e planos, que são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Aqui, estudaremos posições relativas entre hiperplanos no $\mathbb{R}^n$.

Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, observa-se intuitivamente que se Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos, o ângulo entre eles é igual a zero.

Com base no conceito de ângulo entre planos dado em (SANTOS, 2007) definimos ângulo entre hiperplanos da seguinte forma:

Definição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. O ângulo entre Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} , denotado por < (Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1}), é dado por

$$\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos^{-1}(\frac{|<u,v>|}{\|u\|\cdot\|v\|}).$$

Definição 5.2. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} *são ortogonais se o ângulo entre eles é igual a 90°.*

A próxima proposição nos dá a caracterização de hiperplanos ortogonais.

Proposição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. Então

$$\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1} \text{ se, e somente se, } < u, v > = 0..$$

Demonstração:

$$:\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 90^o,$$

Isto é, $\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1}$.

Definição 5.3. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são iguais ou paralelos se o ângulo entre eles é igual a zero.

Para demonstração da proposição seguinte precisamos do seguinte lema, cuja a demonstração pode ser vista em (COELHO, 2001).

Lema 5.1. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n ≥ 1 e *W* um subespaço próprio de *V*. Então *W* é um hiperplano se, e somente se, $\dim_{\mathbb{K}} W = n - 1$.

Proposição 5.2. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, tendo como vetores normais u e v, respectivamente. Então:

i. u e v *são* colineares se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos ou iguais*;*

ii. u e v não são paralelos se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1}, onde n ≥ 2.

Demonstração: *Sejam* Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} *hiperplanos distintos com vetores normais* $u = (u_1, ..., u_n)$ *e* $v = (v_1,..., v_n)$*, respectivamente e com equações*

$$u_1x_1 + ... + u_nx_n + d_1 = 0 \tag{5}$$

e

$$v_1x_1 + ... + v_nx_n + d_2 = 0 \tag{6}$$

i) ⇒) Suponha que u *e* v *são vetores colineares, então existe* $t \in \mathbb{R}^*$ *tal que u = tv. Logo,*

$$\begin{aligned} \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) &= cos^{-1}(\frac{|< u, v >|}{\|u\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(\frac{|< tv, v >|}{\|tv\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(1). \end{aligned}$$

Daí $cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 1$ *e portanto* $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 0,$*, isto é,* $\Gamma_1^{n-1} // \Gamma_2^{n-1}$ *ou* $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$.

ii) ⇐)

a) Se $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}.$*, então* u = v.

b) Suponha que $\Gamma_1^{n-1}//\Gamma_2^{n-1}$, como para cada $w \in \Gamma_2^{n-1}$ existe um representante w' de w *em Γ_1^{n-1} então $\langle w', u\rangle = 0$, já que $u \perp \Gamma_1^{n-1}$. Daí temos que $\langle w, u\rangle = 0$ e sendo* w *arbitrário, então $u \perp \Gamma_2^{n-1}$. Portanto, u//v, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = \lambda v$.*

ii) *⇒)* Suponha u e v não paralelos, pelo item (i) Γ_1^{n-1} *e* Γ_2^{n-1} não são paralelos, ou seja, $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \neq \phi$.

Dado $p = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ então $p \in \Gamma_1^{n-1}$ *e* $p \in \Gamma_2^{n-1}$. . Portanto,

$$u_1x_1 + \dots + u_nx_n + d_1 = 0 \qquad (7)$$

e

$$v_1x_1 + \dots + v_nx_n + d_2 = 0 \qquad (8)$$

Suponha sem perda de generalidades que $v_n \neq 0$, então

$$x_n = -\frac{d_2}{v_n} - \frac{u_1}{v_n} - \dots - \frac{u_{n-1}}{v_n} \qquad (9)$$

Substituindo-se (9) em (7), obtemos

$$A_1x_1 + \dots + A_{n-1}x_{n-1} + d = 0, \qquad (10)$$

onde $A_i = u_iv_n - u_nv_i$, com 1 ≤ i ≤ n -1, e $d = d_1v_n - u_nd_2$.

Note que esta é a equação de um hiperplano Γ_v^{n-2} com vetor normal v = (A_1, ..., A_n). Logo $p \in \Gamma_v^{n-2}$ e portanto $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \subseteq \Gamma_v^{n-2}$.

Agora, como Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são hiperplanos então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ é também um hiperplano. Pelo lema $dim(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = dim\Gamma_1^{n-1} - 1 =$ n -2. Como = n - 2 então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} = \Gamma_v^{n-2}$.■

6 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE *(n -1)* ESFERAS

Como no caso dos hiperplanos, aqui iremos apresentar as posições relativas entre (*n*-1)-esferas. Lembramos inicialmente que no espaço euclidiano duas esferas são iguais se possuem mesmo raio e o mesmo centro. E que são concêntricas se possuem o mesmo centro. No caso em que temos duas (*n*-1)-esferas a situação é a mesma. No que segue veremos como pode ser caracterizado este fato do ponto de vista da Geometria Analítica.

Proposição 6.1. Sejam $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ (n-1)-esferas de centros a = (a_1, ..., a_n) e b = (b_1, ..., b_n), respectivamente. Então:

i. $r_1 = r_2$ *e d (a, b) = 0* se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) = \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$;;

ii. $r_1 \neq r_2$ *e d (a, b) = 0* se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas e não coincidentes.

Demonstração:

i) ⇒*)* Como $r_1 = r_2$, então

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r_1^2 = r_2^2.$$

E sendo d(a,b*) = 0 então* a = b*, ou seja,* $a_i = b_i$*, 1 ≤* i *≤* n*. Daí,*

$$r_2^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = (x_1 - b_1)^2 + ... + (x_n - b_n)^2$$

Logo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *e portanto* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \subset \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$*. Analogamente prova-se que* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \subset \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *obtendo-se assim a igualdade.*

⇐) *Vamos provar que se* $r_1 \neq r_2$ *ou d(a, b) ≠ 0 então* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$*.*

Suponha que d (a,b) ≠ 0 então a ≠ b. Se $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \phi$, nada temos a provar. Suponha então que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \phi$, logo existe $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ tal que $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí, $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Se $r_1 \neq r_2$, sem perda de generalidades podemos supor $r_2 > r_1$. Vamos supor também que d(a, b) = 0, caso contrário caímos no caso anterior e a proposição estará provada. Sendo assim a = b. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ então $\| x - b \| = r_2$ e daí $\| x - a \| = \| x - b \| = r_2 > r_1$ Logo $x \notin \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

ii) ⇒*)* Como d(a,b) = 0 ⇒ a = b e sendo $r_2 \neq r_1$ podemos supor sem perda de generalidades que $r_1 < r_2$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ então $\| x - a \| = r_1 < r_2$ e portanto $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$, Logo $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas não coincidentes.

⇐*) Sendo* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *concêntricas então* d(a,b*) = 0. Como elas não são coincidentes, isto é,* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$*, então pela proposição 6.1 item* (i*) temos que* $r_2 \neq r_1$. ■

Dois círculos são ditos secantes se possuem dois pontos em comum. Para (n-1)-esferas, com n > 2, o conceito é análogo*.*

Definição 6.1. Duas (n-1)-esferas $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ onde n *≥ 2*, são ditas hipersecantes se existe uma *(*n *– 2)*-esfera $\mathbb{S}_{r}^{n-2}(c)$ tal que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \mathbb{S}_{r}^{n-2}(c).$$

No caso em que n = 3 temos que $\mathbb{S}^2_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^2_{r_2}(b) = \mathbb{S}^1_r(c)$, logo as esferas $\mathbb{S}^2_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^2_{r_2}(b)$ são hipersecantes.

Proposição 6.2. Sejam $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ $(n-1)$ - esfera de centros a = (a_1, ..., a_n) e b = (b_1, ..., b_n) respectivamente. Então:

i. *d(a,b)* > $r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \emptyset$;

ii. *d(a,b)* é igual a $r_1 + r_2$ ou $| r_1 + r_2 |$ se,e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \{p\}$;

iii. $|r_1 - r_2| < d(a,b) < r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \mathbb{S}^{n-2}_r(c)$.

Demonstração:

i) ⇒) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \emptyset$, *então existe p = ($p_1$, ..., p_n)* $\in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ *e portanto* $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$. *Daí* $d(p,a) = r_1$ *e* $d(p,b) = r_2$ *Concluímos que d(a,b) ≤ d(a,p) + d(p,b) =* $r_1 + r_2$.

⇐) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \emptyset$, *vamos provar que d(a,b) >* $r_1 + r_2$.

Sendo $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ *e* $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ *fechados, então*

$$d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right) = min\left\{d(x,y) | \, x \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \; e \; y \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right\}$$

$$= d(x_0, y_0) > 0,$$

Pois $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \emptyset$.

Portanto,

$$d(a,b) = d\left(a, \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)\right) + d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right) + d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b), b\right) > r_1 + r_2.$$

ii)⇒) Seja $x: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *a curva que liga os pontos a e b definida por*

$$x(t) = (1-t)a + tb, \;\; 0 \leq t \leq 1,$$

onde $x(0) = a$ e $x(1) = b$.

Vamos supor inicialmente que d*(a,b) =* $r_1 + r_2$. *Seja* $x_0(t_0) \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}$ *então*

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b - a\| t_0$$

$$= (r_1 + r_2)t_0.$$

Logo $t_0 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$. Agora,

$$p = x(t_0) = x(\frac{r_1}{r_1 + r_2}) = \frac{r_2}{r_1 + r_2}a + \frac{r_1}{r_1 + r_2}b$$

Daí, $\|p-b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2}\|a-b\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Vamos supor agora, sem perda de generalidades, que $r_1 > r_2$ *e que* $d(a,b) = r_1 - r_2$, *então*

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b-a\|t_0 = (r_1 - r_2)t_0.$$

Logo, $t_0 = \frac{r_1}{r_1+r_2}$. *Agora,* $p = x(t_0) = x\left(\frac{r_1}{r_1-r_2}\right) = -\frac{r_2}{r_1-r_2}a + \frac{r_1}{r_1-r_2}k\,\cdot$

Sendo assim, $\|p-b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2}\|b-a\| = r_2$. *Logo* $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *e portanto* $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$..

Sendo $x(t_0)$*, em quaisquer dos dois casos, único, então* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$.

$\Leftarrow$*) Supomos agora que* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$*, então existe* $t_0 \in (0,1)$ *tal que* $x(t_0) = p$.

Como $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *então* $r_1 = \|p-a\| = \|b-a\|t_0 = d(a,b)t_0$.

Enquanto que $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *implica que* $r_1 = \|p-b\| = |t_0 - 1|d(a,b)$.

Daí, $(t_0-1)d(a,b) = -r_2$ *ou* $(t_0-1)d(a,b) = r_2$. *Como* $d(a,b) > 0$ *então*

$\left(1 - \frac{r_1}{d(a,b)}\right)d(a,b) = r_2$ *ou* $\left(1 - \frac{r_1}{d(a,b)}\right)d(a,b) = -\,r_2$ *ou . Portanto* $d(a,b) = r_1 + r_2$ *ou* $d(a,b) = r_1 - r_2$.

iii) Como $d(a,b) > r_1 + r_2$ *pelo item (i) desta proposição temos que* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$ *Logo, existe* $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.. *Daí,*

$$(x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2 = r_2^2 \tag{11}$$

e

$$(x_n - a_n)^2 = r_1^2 - (x_1 - a_1)^2 - \dots - (x_{n-1} - a_{n-1})^2 \tag{12}$$

Note que

$$(x_i - b_i)^2 = (x_i - a_i)^2 + 2(a_i - b_i)(x_i - a_i) + (a_i - b_i)^2, \text{ onde } 1 \le i \le n. \tag{13}$$

De (11), (12) e (13) obtemos

$$2(a_1 - b_1)x_1 + \dots + 2(a_n - b_n)x_n + b_1^2 + \dots + b_n^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2 = r_2^2 - r_1^2$$

Portanto p pertence à um hiperplano Γ_v^{n-1}*, que tem como vetor normal* $v = (a_1 - b_1, \dots, a_n - x_n)$

Como $d(a, \Gamma_v^{n-1}) < r_1$ então pela Teorema 4.1 temos que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1} \cap \Gamma_v^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r_1^2-k^2}}^{n-2}(\mathrm{q}).$$

onde $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(q)$ *é a (n-2)-esfera contida no hiperplano* Γ_v^{n-1} *tendo q como centro, ponto de interseção* Γ_v^{n-1} *de com a reta l normal a* Γ_v^{n-1} *e que passa por a e por b. Além disso* $k = (a, \Gamma_v^{n-1})$.

7 I CONCLUSÕES

Neste artigo, estudamos as posições relativas entre o hiperplano e o n-esfera. Foi apresentado, um resultado que generaliza para o n-espaço euclidiano, o problema de como caracterizar as posições relativas: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências, e finalmente entre o plano e a esfera, no caso do 3-espaço euclidiano. Destacamos o caso da caracterização da posição relativa de um hiperplano com uma (n-1)-esfera, quando a distância até o hiperplano é menor do que o raio da esfera, a interseção dos referidos objetos é uma (n-2)-esfera e não um círculo como no caso do 3-espaço euclidiano.

REFERÊNCIAS

COELHO, F. Uchoa.; LOURENÇO, M. L.. **Um curso de álgebra linear.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

HONIG, C. S. **Aplicações da topologia `a análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

KREYZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: Jonh Wiley & Sons, 1978.

LANG, S.. *Álgebra* **linear:** traduzido da terceira edição em inglês. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L.**. Curso de análise** Vol.2. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

MILLMAN, R. S.; PORKER, G. D. **Elements of Differential Geometry.** New Jersey: Prentice Hall, 1977.

MENDELSON, B.**. Introduction to topology.** New York: Dover Publications, 1990.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F**. Hiperplano e n(n-1)-esfera: posições relativas**. RCT-Revista de Ciência e Tecnologia. v.1.n.1, 2015.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F. **Relative positions between the hyperplane and the n-sphere.** RCT – Revista de Ciência e Tecnologia. v.5.n.8, 2019.

SANTOS, N. M.. **Vetores e matrizes: uma introdução a álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2007.

SPIVAK, M**. O cálculo em variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2003.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

N

O

P

R

S

T

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena
Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena Editora
Ano 2021