Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2021

Atena
Editora
Ano 2021

Atena Editora
Ano 2021

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Luiza Alves Batista
Correção:	Kimberlly Elisandra Gonçalves Carneiro
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-855-7
DOI 10.22533/at.ed.557211003

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***”, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 22

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE GRAU DOIS: UMA NOVA ABORDAGEM

Data de aceite: 01/03/2021

Fernando Cézar Gonçalves Manso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Flávia Aparecida Reitz Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

RESUMO: Este artigo tem o intuito de apresentar uma nova abordagem para encontrar raízes de equações polinomiais de grau dois. Tendo como base a já conhecida fórmula de Bhaskara, o método Bhaskara/Φ proposto é mais sistemático e não depende de tentativa e erro como quando aplicamos as relações de Girard, por exemplo. O importante é que se tenha de forma simplificada um conjunto de ferramentas para o cálculo das raízes, o que acreditamos ser bastante útil, principalmente para alunos das séries iniciais. Para enriquecer, apresentamos ainda um panorama histórico acerca das equações polinomiais e a definição do método Po-Shen Loh para resolução das equações polinomiais. Tanto o método Bhaskara/Φ como o método Po-Shen Loh são detalhadamente apresentados e comparados na resolução das equações polinomiais de forma a facilitar o entendimento e proporcionar uma nova maneira de se encontrar as raízes das equações.

PALAVRAS-CHAVE: Equação polinomial de grau dois, Método de resolução, Bhaskara/Φ.

POLYNOMIAL EQUATION OF DEGREE TWO: A NEW APPROACH

ABSTRACT: This article aims to present a new approach to find roots of polynomial equations of degree two. Based on the already known Bhaskara formula, the proposed Bhaskara/Φ method is more systematic and does not depend on trial and error as when we apply Girard's relations, for example. The important thing is to have in a simplified way a set of tools for calculating the roots, which we believe to be quite useful, especially for students in the initial grades. To enrich it, we also present a historical overview about polynomial equations and the definition of the Po-Shen Loh method for solving polynomial equations. Both the Bhaskara/Φ method and the Po-Shen Loh method are presented in detail and compared in solving the polynomial equations in order to facilitate understanding and provide a new way if the roots of the equations are found.

KEYWORDS: Polynomial equation of degree two, Resolution method, Bhaskara/Φ.

1 I INTRODUÇÃO

Para os alunos do ensino médio, e até para alguns mais jovens, há uma familiarização com a forma de resolução de uma equação quadrática considerando, considerando o oposto de b, mais ou menos a raiz quadrada de b ao quadrado menos 4ac, todos divididos por 2a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula (fórmula de Bhaskara) permite que sejam encontradas a raiz ou as raízes das equações quadráticas da forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Mas de onde veio esta fórmula? Por que civilizações mais antigas precisaram resolver equações desta forma em primeiro lugar? Responder a estas perguntas a partir de uma linha histórica é parte deste trabalho. O principal objetivo, no entanto, é apresentar uma nova abordagem de resolução equações polinomiais de grau dois (equações quadráticas) que esperamos possa contribuir de alguma forma para a consolidação desse conhecimento.

Apresentaremos dois métodos de resolução para as equações quadráticas:

1) Método de Po-Shen Loh (Universidade de Carnegie Mellon - Estados Unidos)

2) Método de Bhaskara/Φ (Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Brasil)

Os dois métodos têm por base o método de Bhaskara e representam uma simplificação operacional nos cálculos, o que acreditamos ser bastante útil, principalmente para alunos das séries iniciais.

2 | DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Seja uma função quadrática genérica da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde x representa a variável desconhecida, e a, b e c representam coeficientes numéricos conhecidos, onde $a \neq 0$. Se $a = 0$, a equação é linear, não quadrática, pois não existe um termo ax^2. Os números a, b e c são os coeficientes da equação e podem ser distinguidos chamando-os, respectivamente, de coeficiente quadrático, de coeficiente linear e de termo constante ou independente (Boyer, 2010; Chaquiam, 2015).

Os valores de x que satisfazem a equação são chamados soluções da equação e raízes ou zeros da função. Uma equação quadrática tem no máximo duas soluções. Se não houver uma solução real, existem duas soluções complexas. Se houver apenas uma solução, diz-se que é uma raiz dupla. Uma equação quadrática sempre tem duas raízes, se raízes complexas forem incluídas e uma raiz dupla for contada para duas. Uma função quadrática pode ser fatorada em uma equação equivalente a:

$$f(x) = a(x - a)\ (x - \beta)$$

A partir desta forma fatorada podemos estabelecer duas relações importantes entre as raízes a e β:

1) soma (S)

2) produto (P)

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha . \beta = \frac{c}{a}$$

Tais relações são conhecidas como Relações de Girard e α e β são as soluções para *x*. A operação de completar quadrado em uma equação quadrática na forma canônica ($f(x) = a(x-m)^2 + k$) resulta na fórmula quadrática, que expressa as soluções em termos de *a*, *b* e *c*.

Como a equação quadrática envolve apenas um desconhecido, é chamada univariada. A equação quadrática contém apenas potências de *x* que são números inteiros não negativos e, portanto, é uma equação polinomial. Em particular, é uma equação polinomial de segundo grau, já que a maior potência é dois.

O desenvolvimento, ou derivação, de uma ideia matemática é geralmente o mais lógico, dedutível e retilíneo possível. Isso traz a noção comum de que seu desenvolvimento histórico é igualmente contínuo, lógico e retilíneo: um matemático adota uma ideia onde outro matemático a deixa.

Usando a fórmula quadrática como exemplo, é possível verificar que o desenvolvimento histórico da matemática não é de todo retilíneo. Em vez disso, desenvolvimentos paralelos, interconexões e confluências podem ser encontrados, os quais - para complicar ainda mais essas coisas - também estão relacionados a questões sociais, culturais, políticas e religiosas.

A chamada fórmula quadrática foi derivada no decorrer de alguns milênios à sua forma atual, que é ensinada para a maioria nas instituições de ensino. E as soluções para problemas que podem ser expressos em termos de equações quadráticas eram conhecidas já em 2000 aC (Dante, 2012; Silveira, 2015).

2.1 O problema original - 2000 (mais ou menos) aC

Os engenheiros egípcios, chineses e babilônios eram pessoas realmente inteligentes - eles sabiam como a área de um quadrado se ajusta ao comprimento de seu lado. Eles sabiam que é possível armazenar nove vezes mais fardos de feno se a lateral de um *loft* quadrado for triplicada. Eles também descobriram como calcular a área de projetos mais complexos, como retângulos e formas em *T* e assim por diante. No entanto, eles não sabiam como calcular os lados das formas - o comprimento dos lados, começando em uma determinada área - que muitas vezes era o que seus clientes realmente precisavam. E, portanto, este é o problema original: uma certa forma deve ser dimensionada com uma área total e, no final, são necessários comprimentos dos lados ou paredes para fazer uma planta de trabalho (Dante, 2012).

2.2 Os inícios - Egito - 1500 aC

O primeiro aspecto que finalmente levou à equação quadrática foi o reconhecimento de que ela está conectada a um problema muito pragmático, que por sua vez exigia uma solução rápida e certeira. Observa-se, nesse contexto, que a matemática egípcia não conhecia equações e números, como se faz hoje em dia; é descritivo, retórico e às vezes muito difícil de seguir. Sabe-se que os sábios egípcios (engenheiros, escribas e padres) estavam cientes dessa falha - mas criaram uma maneira de contornar esse problema: em vez de aprender uma operação ou uma fórmula que pudesse calcular os lados da área, eles calcularam a área para todos os lados e formas possíveis de quadrados e retângulos e formaram uma mesa de consulta. Esse método funciona da mesma maneira que se aprendem as tabuadas de cor na escola, em vez de fazer a operação corretamente (Eves, 2004).

Portanto, se alguém quisesse um *loft* com uma certa forma e uma certa capacidade de armazenar fardos de papiro, o engenheiro iria até sua mesa e encontraria o *design* mais adequado. Os engenheiros não tiveram tempo para calcular todas as formas e lados para fazer sua própria mesa. Em vez disso, a tabela que eles usavam era uma reprodução de uma tabela de consulta principal. Os reprodutores não sabiam se as coisas que estavam reproduzindo faziam sentido ou não, pois não sabiam nada sobre matemática. Portanto, obviamente, às vezes erros apareciam e as cópias das cópias eram menos confiáveis. Essas tabelas ainda existem e é possível ver onde os erros surgiram durante a cópia dos documentos (Eves, 2004).

2.3 O próximo passo - Babilônia e China - 400 aC

O método egípcio funcionou bem, mas uma solução mais geral - sem a necessidade de tabelas - parecia desejável. É aí que os *nerds* da Babilônia entram em cena. A matemática babilônica tinha uma grande vantagem sobre a usada no Egito, a saber, um sistema numérico que é praticamente igual ao que se usa hoje, embora em uma base hexagesimal, ou na base 60. A adição e multiplicação eram muito mais fáceis de executar com esse sistema, portanto, os engenheiros em torno de 1000 aC sempre podiam verificar novamente os valores em suas tabelas. Em 400 aC, eles encontraram um método mais geral chamado “completar o quadrado” para resolver problemas genéricos envolvendo áreas. Não há indicações de que essas pessoas usaram um procedimento matemático específico para descobrir as soluções; portanto, provavelmente algumas suposições equivocadas estavam envolvidas. Na mesma época, ou um pouco mais tarde, esse método também aparece em documentos chineses. Os chineses, como os egípcios, também não usavam um sistema numérico, mas uma verificação dupla de operações matemáticas simples foi surpreendentemente fácil pelo uso generalizado do ábaco (Dante, 2012).

2.4 Geometria - Área Mediterrânea Helenística - 300 aC

As primeiras tentativas de encontrar uma fórmula mais geral para resolver equações quadráticas podem ser rastreadas no desenvolvimento de grandes matemáticos da geometria e trigonometria: Pitágoras (500 aC em Croton, Itália) e Euclides (300 aC em Alexandria, Egito), que usavam estritamente abordagens geométricas e encontraram um procedimento geral para resolver a equação quadrática. Pitágoras notou que as relações entre a área de um quadrado e o respectivo comprimento do lado - a raiz quadrada - nem sempre eram inteiras, mas ele se recusava a permitir outras proporções além da racional. Euclides foi ainda mais longe e descobriu que essa proporção também pode não ser racional. Ele concluiu que números irracionais existem.

Os elementos de Euclides cobriram mais ou menos toda a matemática necessária para aplicações técnicas do ponto de vista teórico. No entanto, ele não usou a mesma notação com fórmulas e números como se usa atualmente. Por esse motivo, não foi possível calcular manualmente a raiz quadrada de qualquer número, a fim de obter uma boa aproximação para o valor exato da raiz, que é o que os arquitetos e engenheiros buscavam. Como todas as matemáticas (pelo menos teoricamente relevantes) pareciam estar completas, mas inúteis, as muitas guerras que ocorreram na Europa e também no início da Idade Média tornaram o mundo matemático na Europa silencioso até o século XIII. Nesse período, a matemática também sofreu uma grande mudança, passando de uma ciência pragmática para uma disciplina filosófica e mais mística (Eves, 2004).

2.5 Todos os números - Índia - 700 dC

A matemática hindu usa o sistema decimal pelo menos desde 600 aC. Uma das influências mais importantes na matemática hindu foi que ela era amplamente usada no comércio. O comerciante hindu era bastante rápido em matemática simples. Se alguém tivesse uma dívida, os números seriam negativos, se alguém tivesse um crédito, os números seriam positivos. Além disso, se alguém não tivesse crédito nem dívida, os números seriam zero. Zero é um número importante na história da matemática, e sua aparência relativamente tardia se deve ao fato de muitas culturas terem dificuldade em conceber o “nada”. O conceito do nada, o vazio, ou o conceito de equilíbrio já estava ancorado na cultura hindu.

Por volta de 700 dC, a solução geral para a equação quadrática, desta vez usando números, foi desenvolvida por um matemático hindu chamado Brahmagupta, que, entre outras coisas, usava números irracionais; ele também reconheceu duas raízes na solução. A solução final e completa como se conhece hoje veio por volta de 1100 dC, por outro matemático hindu chamado Baskhara. Baskhara foi o primeiro a reconhecer que qualquer número positivo tem duas raízes quadradas (Dante, 2012).

2.6 Poderosa ciência islâmica - Pérsia - 820 dC

Por volta de 820 dC, perto de Bagdá, Mohammad bin Musa Al-Khwarismi, um famoso matemático islâmico que conhecia a matemática hindu, também derivou a equação quadrática. A álgebra usada por ele era inteiramente retórica, e ele rejeitou soluções negativas. Essa derivação específica da fórmula quadrática foi trazida para a Europa pelo matemático/astrônomo judeu Abraham bar Hiyya (Savasorda) que viveu em Barcelona por volta de 1100 (Eves, 2004).

2.7 Renascença - Europa - 1500 dC

Com o Renascimento na Europa, a atenção acadêmica voltou aos problemas matemáticos originais. Em 1545, Girolamo Cardano, que era um típico cientista renascentista, e um dos melhores algebraistas de seu tempo, compilou os trabalhos relacionados às equações quadráticas - ou seja, ele misturou Al-Khwarismi solução com a geometria euclidiana. Ele possivelmente não foi o primeiro ou o único, mas o mais famoso. Em suas obras (principalmente retóricas), ele permite a existência de números complexos ou imaginários - isto é, raízes de números negativos. No final do século XVI, a notação e o simbolismo matemáticos foram introduzidos pelo matemático François Viète, na França. Em 1637, quando René Descartes publicou La Géométrie, nasceu a Matemática moderna, e a fórmula quadrática adotou a forma que se conhece hoje (Silveira, 2015).

2.8 Representações da função polinomial do segundo grau e suas raízes

A função polinomial do segundo grau, ou função quadrática, pode ser representada de formas distintas, merecendo destaque a forma geral $f(x) = ax^2+bx+c$ e a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2+k$. Há uma série de vantagens em se expressar uma função quadrática na sua forma canônica.

Chegamos à forma canônica partindo da forma geral, em dois passos:

1) Estabelecendo as ordenadas do vértice da parábola $V(m, k)$

Para se determinar o vértice de uma função polinomial do segundo grau, na sua forma geral, faz-se uma derivação e se iguala a equação a zero, ou seja:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = m$$

Com isso, obtém-se a abscissa *x* ou *m* do vértice da parábola. Substituindo então *m* na função geral, obtém-se a ordenada *y* ou *f*(*m*) do vértice:

$$f(m) = \frac{\cancel{a}b^2}{4\cancel{a}^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$f(m) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(m) = -\frac{\Delta}{4a} = k,$$

logo *V* (*m*, *k*).

2) Aplicando o método de completar os quadrados

Primeiramente colocar o a em evidência:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Após, completar quadrado entre *x* e $\frac{b}{2a}$:

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \therefore f(x) = a(x-m)^2 + k$$

$$f(x) = a(x-m)^2 + k$$

Dessa forma, tem-se que:

Se a < 0: f(x) terá um valor máximo se x = m ∴ f(x) = k

$$v = (m, k) \therefore m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Se a > 0: f(x) terá um valor mínimo se x = m ∴ f(x) = k

$$v = (m, k) \therefore m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Agora estamos aptos para, a partir da forma canônica, chegarmos na fórmula de Bhaskara apresentada no início deste texto.

Para a obtenção das raízes, iguala-se a função na sua forma canônica a zero:

$$a(x-m)^2 + k = 0$$

$$(x-m)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x - m = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x = m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}},$$

Portanto, a fórmula de Bhaskara é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Natureza das raízes - discriminante Δ

Uma função polinomial de grau dois terá sempre duas raízes, a saber:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1) Se $\Delta > 0$: a e β são raízes reais e distintas

2) Se $\Delta = 0$: a e β são raízes reais e iguais

3) Se $\Delta < 0$: a e β são raízes complexas e conjugadas onde $i = \sqrt{-1}$

2.9 Método de Po-Shen Loh

2.9.1 Descrição do método

O método consiste numa simplificação da fórmula de Bhaskara com o intuito de tornar os cálculos mais simples e diretos e não há restrição, podendo ser aplicado em qualquer equação quadrática. Neste método, o valor do coeficiente a é obrigatoriamente 1 (a = 1) e definiremos o parâmetro *P*. A solução para as equações polinomiais de grau dois será dada por:

$$x = -\frac{b}{2} \pm |P|,$$

onde $|P|$ será encontrado pela expressão:

$$P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Todas estas equações podem ser obtidas por manipulações algébricas a partir da fórmula de Bhaskara.

Resumindo:

se a = 1

$$P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm |P|$$

2.9.2 Demonstração da validade do método

Partimos da fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para a = 1, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

que podemos reescrever como

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

Como $P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$, temos que $x = -\frac{b}{2} \pm |P|$.

2.9.3 Passo a passo para aplicação do método e exemplo

1) verificar se a = 1. Caso não seja, dividir todos os coeficientes por a para se trabalhar com a nova equação gerada;

2) calcular $|P|$ a partir de $P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$;

3) calcular x_1 e x_2 pela expressão $x = -\frac{b}{2} \pm |P|$.

Para exemplificar, serão determinadas as raízes da equação pelo método de Po-Shen Loh.

Ex1: $x^2 - 5x + 6 = 0$

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6$$

$$P^2 = \left(\frac{25}{4}\right) - \left(\frac{24}{4}\right)$$

$$P^2 = \frac{1}{4}$$

$$P = \pm\frac{1}{2}$$

$$|P| = \frac{1}{2}$$

P3)

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2$$

3 | MÉTODO DE BHASKARA/Φ

3.1 Descrição do método

O método consiste numa simplificação da fórmula de Bhaskara com o intuito de tornar os cálculos mais simples e direto, nos casos em que seja possível substituir delta (Δ), da fórmula de Bhaskara, por Φ^2. A simplificação ocorrerá porque substituiremos a raiz quadrada de delta por uma soma ou diferença entre dois números naturais ($F \pm f$). Deste modo, temos:

$$\sqrt{\Delta} = F \pm f = \Phi^2$$

e a solução para as equações polinomiais de grau dois será dada por:

$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

Para obtermos os naturais F e f com $F \geq f$ temos dois casos a considerar:

1) ac < 0. Neste caso escrevemos todos os *i*ésimos produtos possíveis $\forall\,(F.f)_i$ que nos forneça o módulo do produto ac, ou seja, $|ac| = \forall(F.f)_i$. Se o método for aplicável, existirá um *i*ésimo par (F_i, f_i) cuja diferença expressará o módulo de *b*, ou seja, se $ac < 0, \exists(F_i, f_i)/|b| = (F - f)_i$. Deste modo, definimos o parâmetro Φ como sendo a soma dos naturais $(F,f)_i$, ou seja, $\Phi = (F+f)_i$ e, a solução da equação quadrática, será $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

Resumindo, se ac < 0 :

$$|ac| = \forall(F.f)_i;\ F,f \in \mathbb{N}, F \geq f$$
$$|b| = (F - f)_i$$
$$\Phi = (F + f)_i$$
$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

2) ac > 0. Neste caso escrevemos todos os *i*ésimos produtos possíveis $\forall\ (F.f)_i$ que nos forneça o módulo do produto ac, ou seja, $|ac| = \forall(F.f)_i$. Se o método for aplicável, existirá um *i*ésimo par (F_i, f_i) cuja diferença expressará o módulo de *b*, ou seja, se ac > 0, $\exists(F_i, f_i)/|b| =$ $(F+f)_i$. Deste modo, definimos o parâmetro Φ como sendo a soma dos naturais $(F,f)_i$, ou seja, $\Phi = (F-f)_i$ e, a solução da equação quadrática, será $x = \frac{-b\pm\Phi}{2a}$.

Resumindo, se ac > 0:

$$|ac| = \forall(F.f)_i;\ F,f \in \mathbb{N}, F \geq f$$
$$|b| = (F + f)_i$$
$$\Phi = (F - f)_i$$
$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

3.2 Demonstração da validade do método

Dada a fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ e a fórmula de resolução do método Bhaskara/Φ $x = \frac{-b\pm\Phi}{2a}$, dividiremos a demonstração nos dois casos apontados anteriormente: 1) ac < 0 e 2) ac < 0. Em ambos os casos precisamos, a partir das hipóteses levantadas, demonstrar que $\sqrt{\Delta} = \Phi$ ou $\Delta = \Phi^2$.

1º caso: ac < 0

Hipótese 1: ac < 0

Hipótese 2: $|ac| = F.f;\quad F \geq f;\quad F,f \in N$

Hipótese 3: $|b| = F - f$

Tese: $(F + f)^2 = \Delta$

Partimos da expressão de delta $\Delta = b^2 - 4ac$. Pela hipótese 3 temos que $|b| = F - f$, então escrevemos:

$$\Delta = (F - f)^2 - 4ac.$$

Pelas hipóteses 1 e 2 temos que $ac = -Ff$, então escreveremos:

$$\Delta = (F - f)^2 + 4Ff,$$

o que nos leva a:

$$\Delta = F^2 - 2Ff + f^2 + 4Ff,$$

portanto:

$$\Delta = F^2 + 2Ff + f^2,$$

o que nos leva à tese $(F+f)^2 = \Delta$.

2º caso: ac > 0

Hipótese 1: ac > 0

Hipótese 2: $|ac| = F.f; \quad F \geq f; \quad F, f \in N$

Hipótese 3: $|b| = F + f$

Tese: $(F-f)^2 = \Delta$

Partimos da expressão de delta $\Delta = b^2 - 4ac$. Pela hipótese 3 temos que $|b| = F + f$, então escrevemos:

$$\Delta = (F+f)^2 - 4ac.$$

Pelas hipóteses 1 e 2 temos que , então escreveremos:

$$\Delta = (F+f)^2 - 4Ff,$$

o que nos leva a:

$$\Delta = F^2 + 2Ff + f^2 - 4Ff,$$

portanto:

$$\Delta = F^2 - 2Ff + f^2,$$

o que nos leva à tese $(F-f)^2 = \Delta$.

3.3 Passo a passo para aplicação do método e exemplo

1) verificar se ac < 0 ou ac > 0;

2) escrever todos os *i*ésimos produtos possíveis para lacl na forma $(F.f)_i$ com $F, f \in N$ e $F \geq f$;

3) escrever $|b| = F - f$ se $ac < 0$ ou $|b| = F + f$ se $ac > 0$;

4) escrever $\Phi = F + f$ se $ac < 0$ ou $\Phi = F - f$ se $ac > 0$;

5) calcular x_1 e x_2 pela expressão $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

Para exemplificar, serão determinadas as raízes da equação pela nova forma:

Ex1: $x^2 - 5x + 6 = 0$

P1)

ac = 6 > 0

P2)

lacl = 6.1

lacl = 3.2

P3)

lbl = 3 + 2 = 5

P4)

$$\Phi = 3 - 2 = 1$$

P5)

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 3$ e $x_2 = 2$

3.4 Parâmetro Φ como discriminante da equação quadrática

Como $\Phi = \sqrt{\Delta}$, temos:

se $\Delta > 0 \therefore \Phi > 0$ $\exists$ duas raízes reais distintas;

se $\Delta = 0 \therefore \Phi = 0$ $\exists$ duas raízes reais iguais (uma raiz real de multiplicidade dois)

se $\Delta < 0$ ou $\Delta \neq \Phi^2$ o método não se aplica.

Temos aí, portanto, uma importante restrição na aplicabilidade do método. Nesses casos não será possível escrever $|b| = F \pm f$. Assim, se para uma dada equação quadrática não for possível escrever $|b| = F \pm f$, isso significa que $\Delta < 0$ ou $\Delta \neq \Phi^2$ e, então, precisamos aplicar a fórmula de Bhaskara ou o método de Po-Shen Loh, que não apresentam nenhum tipo de restrição.

4 | APLICAÇÕES DOS MÉTODOS

Para exemplificar, serão determinadas as raízes das equações pela nova forma: Ex1: $2x^2 + 7x + 5 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

$$ac = 2.5 = 10 > 0$$

P2)

$$|ac| = 10.1$$

$$|ac| = 5.2$$

P3)

$$|b| = 5 + 2 = 7$$

P4)

$$\Phi = 5 - 2 = 3$$

P5)

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{5}{2}$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a \neq 1 \therefore x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

$$P^2 = \left(\frac{49}{16}\right) - \left(\frac{40}{16}\right)$$

$$P^2 = \frac{9}{16}$$

$$P = \pm\frac{3}{4}$$

$$|P| = \frac{3}{4}$$

P3)

$$x = -\frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = -\frac{5}{2}$$

Ex2: $4x^2 - 5x - 6 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

ac = 4.(-6) = -24 < 0

P2)

lacl = 24.1

lacl = 12.2

lacl = 8.3

lacl = 6.4

P3)

lbl = 8 -3 = 5

P4)

Φ = 8 + 3 = 11

P5)

$$x = \frac{5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -\frac{3}{4}$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a \neq 1 \therefore x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} = 0$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

$$P^2 = \left(\frac{25}{64}\right) + \left(\frac{96}{64}\right)$$

$$P^2 = \frac{121}{64}$$

$$P = \pm\frac{11}{8}$$

$$|P| = \frac{11}{8}$$

P3)

$$x = \frac{5}{8} \pm \frac{11}{8}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -\frac{3}{4}$$

Ex3: $x^2 + x - 12 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

ac = 1.(-12) = -12 < 0

P2)

|ac| = 12.1

|ac| = 6.2

|ac| = 4.3

P3)

|b| = 4 - 3 = 1

P4)

Φ = 4 + 3 = 7

P5)

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$x_1 = 3$ e $x_2 = -4$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12$$

$$P^2 = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{48}{4}\right)$$

$$P^2 = \frac{49}{4}$$

$$P = \pm\frac{7}{2}$$

$$|P| = \frac{7}{2}$$

P3)

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -4$$

Ex4: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.4 = 4 > 0$$

P2)

$$|ac| = 4.1$$

$$|ac| = 2.2$$

P3)

$$|b| = 2 + 2 = 4$$

P4)

$$\Phi = 2 - 2 = 0$$

P5)

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 2$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

$$P^2 = 4 - 4$$

$$P^2 = 0$$

$$P = \pm 0$$

$$|P| = 0$$

P3)

$$x = 2 \pm 0$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 2$$

Ex5: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.(-5) = -5 < 0$$

P2)

$$|ac| = 5.1$$

P3)

$$|b| = 5 - 1 = 4$$

P4)

$$\Phi = 5 - 1 = 4$$

P5)

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -5$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2$$

$$P^2 = 4 + 5$$

$$P^2 = 9$$

$$P = \pm 3$$

$$|P| = 3$$

P3)

$$x = -2 \pm 3$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -5$$

Ex6: $x^2 - 2x - 8 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.(-8) = -8 < 0$$

P2)

$$|ac| = 8.1$$

$$|ac| = 4.2$$

P3)

$$|b| = 4 - 2 = 2$$

P4)

$$\Phi = 4 + 2 = 6$$

P5)

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -2$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + 8$$

$$P^2 = 1 + 8$$

$$P^2 = 9$$

$$P = \pm 3$$

$$|P| = 3$$

P3)

$$x = 1 \pm 3$$

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -2$$

5 I CONCLUSÃO

Funções polinomiais são importantes porque podem modelar inúmeros problemas em variadas áreas, e são de relativamente fácil manipulação. Funções polinomiais de grau dois são apresentadas aos estudantes já nas séries inicias e uma plena compreensão deste assunto é fundamental para que estes estudantes se apropriem, adequadamente, do conceito de funções. Neste artigo destacamos o cálculo de zeros de uma função ou raízes de equações quadráticas, apresentando de forma inédita como contribuição dos autores o método Bhaskara/Φ, que juntamente com o método Po-Shen Loh (do autor norte americano de mesmo nome), têm por objetivo propiciar aos estudantes, quando comparado ao método tradicional, manobras mais simples e diretas de encontrar as raízes para as equações quadráticas. Uma outra forma de encontrar as raízes é pelas relações de Girard $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; e $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$, mas neste artigo damos ênfase aos métodos Bhaskara/Φ e Po-Shen Loh por serem métodos mais sistemáticos e não depender de tentativa e erro quando aplicamos as relações de Girard. O importante é que se tenha um conjunto de ferramentas para o cálculo das raízes. Ambos os métodos tratados no texto têm por base a já tradicional fórmula de Bhaskara.

No intuito de enriquecer ainda mais o texto, apresentamos todo um panorama histórico à cerca das equações quadráticas e os autores desejam e esperam que este texto possa ajudar professores e estudantes das séries iniciais ao aplicar as ferramentas para o cálculo de zeros de funções quadráticas.

Nosso agradecimento à estrutura da UTFPR-CM, nosso ambiente de trabalho, que nos possibilita pensar estratégias para o aprimoramento da prática matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto teláris**: matemática. 1.ed. São Paulo: Ática, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

SILVA, M. N. P. **O surgimento da equação do 2º Grau**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/o-surgimento-equacao-2-o-grau.htm. Acesso em 03 de abril de 2020.

SILVEIRA, E. **Matemática**: compreensão e prática. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2015.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

M

N

O

P

R

S

T

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Atena Editora
Ano 2021