Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-856-4
DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

CAPÍTULO 24

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Data de aceite: 17/02/2021

Fernando Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Vitória da Conquista – BA
http://lattes.cnpq.br/1193461132432149

Ana Paula Perovano
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Vitória da Conquista – BA
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro – SP
http://lattes.cnpq.br/8892821688981110

RESUMO: Neste texto, propomos uma nova definição de derivada Fuzzy do tipo local, denominada compatível Fuzzy. A definição é fundamentada na derivada de Khalil de ordem 0 <α<1, e baseada na diferença de Hukuhara. Estudamos suas propriedades e apresentamos a solução da equação diferencial de Malthus compatível com condição inicial Fuzzy. O estudo proposto estende o caso de equações diferenciais Fuzzy de ordem inteira.

PALAVRAS - CHAVE: Derivada compatível; Números Fuzzy; Diferença de Hukuhara;

ABSTRACT: In this text, we propose a new definition of a Fuzzy derivative of the local type, called Fuzzy compatible. The definition is based on the Khalil derivative of order 0 <α <1, and based on the Hukuhara difference. We study its properties and present the solution of the Malthus compatible differential equation with initial Fuzzy condition. The proposed study extends the case of Fuzzy differential equations of an entire order.

KEYWORDS: Compatible derivative; Fuzzy numbers; Hukuhara's Difference.

1 I INTRODUÇÃO

A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Augustin-Louis Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal. Nesse sentido, para ε o incremento de x, a derivada de uma função $y = f(x)$ com relação a x é o limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$, se esse limite existir (GUIDORIZZI, 2001).

Se uma função admite a derivada em um ponto, dizemos que ela é derivável nesse ponto. Observamos que um conceito chave para derivada é a diferença

$$f(x+\varepsilon) - f(x). \tag{1}$$

Além disso, ao longo da história do Cálculo Diferencial a forma com que expressamos as derivadas matematicamente constituem uma razão suficientemente forte para a sua própria generalização. Podemos nos referir a derivada de uma função f por:

- Notação de Lagrange: f',

- Notação de Euler: $\mathrm{D}f$,
- Notação de Newton: $\dot{f}$,
- Notação de Leibniz: $\dfrac{df}{dx}$.

As razões históricas para as notações acima incluem vantagens, desvantagens e escolhas pessoais. De forma semelhante, se para cada $n \in \mathbb{N}$, f for n vezes derivável, denotadas por

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \mathrm{D}^n f(x).$$

O conhecimento do conceito de derivada ficou bastante tempo restrito a praticamente dois pequenos grupos de matemáticos: O grupo de sir Isaac Newton (Inglaterra) e o do barão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (Alemanha). A notação de Leibniz é vantajosa, pois faz do Cálculo Diferencial um "Cálculo Operacional".

Os irmãos Bernoulli propagaram por toda a Europa os símbolos e ideias de Leibniz para diversos matemáticos, dentre eles, o francês Guillaume François Antonie L'Hospital, mais conhecido como Marquês de L'Hospital. Em 1695, numa famosa carta, o Marquês pergunta a Leibniz o significado de $\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}$.

Segundo Camargo e Oliveira (2015), Leibniz profetizou: "Este aparente paradoxo permitirá, no futuro, extrair consequências interessantes."

Em 1819, Lacroix consegue responder o questionamento do Marquês de L'Hospital para a função $f(x) = x^m$, com os seguintes passos:

1. Determinou a n-ésima derivada da f para com m e n inteiros positivos e: $m \geq n$
$\mathrm{D}^n x^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$.

2. Substituiu m por $\Gamma(m+1)$ e $(m-n)!$ por $\Gamma(m-n+1)$, onde $\Gamma(.)$ é a

a função Gama (de Euler):

3. Por último, substituindo n por $\alpha \in (0,1)$, m por um número β real positivo qualquer e supondo $x > 0$:
$\mathrm{D}^\alpha x^\beta = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$.

4. Para $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\beta = 1$, temos $\mathrm{D}^{0.5} x = \sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}$.

O cálculo da ordem não inteira chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent, Hardy, Littlewood, Erdèlyi, Kober, Caputo entre outros (CAMARGO, OLIVEIRA, 2015).

Recentemente Khalil et al. (2014) propôs chamada de derivada compatível de ordem α, $0 < \alpha \leq 1$. Em sua proposta, modificou a diferença da Equação (1) por $f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)$Seu objetivo foi de generalizar as propriedades clássicas do cálculo clássico. A derivada local compatível de ordem a, sendo $0 < \alpha \leq 1$, de uma função f é dada por,

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \qquad (2)$$

para todo $x > 0$. Consequentemente, a derivada conformável satisfaz quase todas as propriedades da derivada clássicas. Essa derivada tem sido utilizada em aplicações envolvendo mecânica de Newton (CHUNG, 2015), equação do calor (EROGLU, AVCI, OZDEMIR, 2017) e, usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial (SILVA, MOREIRA, MORET, 2018).

Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas. Para Guidorizzi (2001) as equações diferenciais ordinárias conhecidas simplesmente por: Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente por meio de simples manipulação algébrica é possível reescrever na forma de uma ou mais equações $y' = f(x, y)$. No entanto, a modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas $y' = f(x, y)$ quase sempre está incompleta. Por exemplo, o valor inicial pode não ser exatamente conhecido. Em geral, ele é estimado utilizando alguma medida e pode estar sujeito a erros.

Os números Fuzzy são um subconjunto do conjunto dos números reais, quantificando a imprecisão associada uma dada informação e representando valores incertos. Todos os números Fuzzy estão relacionados a graus de pertinência que expressam o quanto é verdadeiro dizer se algo pertence ou não a um determinado conjunto.

Nestas situações, em vez de trabalhar com números reais, podemos considerar um número Fuzzy que representa “aproximadamente” ou “em torno de”. A aritmética Fuzzy pode ser considerada como uma extensão dos números reais e, também de sua aritmética.

Existem diferentes tipos de números Fuzzy, mas, para fins simplicidade vamos trabalhar com os números Fuzzy triangulares. Além disso, as conversões desses números Fuzzy em relação ao conceito de intervalos também são incorporadas.

Existem várias formas de estender a noção de derivada no contexto Fuzzy. Uma das primeiras generalizações foi obtida por Puri e Ralescu (1983) que é baseada na noção da diferença de Hukuhara. Posteriormente, Kaleva (1987) usa esta noção para desenvolver uma teoria de equações diferenciais Fuzzy.

Neste trabalho apresentamos a derivada compatível de uma função a valores Fuzzy, demonstramos algumas propriedades e apresentamos exemplos ilustrativos.

Definição 1.1 (Khalil et al., 2014) Sejam $t \in \mathbb{R}$ e f uma função real. Observemos pela definição acima que se f for diferenciável então $\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = x^{\alpha-1} f'(x)$.

2 I CONCEITOS BÁSICOS

Zadeh (1965) publicou o primeiro artigo sobre teoria dos conjuntos Fuzzy. Esta teoria caracteriza qualquer conjunto clássico por uma função de pertinência generalizada. Neste artigo, o autor define conjunto Fuzzy como uma classe de objetos com um grau de pertinência contínuo.

Um número Fuzzy A é um subconjunto Fuzzy de $\mathbb{R}$ com uma função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ semi-contínua superiormente, Fuzzy convexa, normal e com suporte compacto. Em particular, $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento x em A.

A família de todos os números Fuzzy será denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Os r-níveis do número Fuzzy A são intervalos limitados e fechados, podendo ser denotados da seguinte maneira: $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$, para todo $r \in [0, 1]$. O nível zero de um subconjunto Fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de $\mathbb{R}$ que contém o conjunto suporte de A. Quando $r = 1$ dizemos $[A]_1$ é o núcleo de A.

A função de pertinência não é função densidade de probabilidade, mas sim uma medida de compatibilidade entre o objeto e o conceito representado pelo conjunto Fuzzy. Não existem regras definitivas para a escolha dessas funções na literatura. Aplicações muito sensíveis à escolha das funções de pertinência são, em geral, não adequadas para modelagem Fuzzy. Em muitos casos práticos as funções simples são convenientes, sendo as mais comuns com formato no plano cartesiano de triângulos e trapézios.

Entre os mais conhecidos estão os números Fuzzy triangulares e os números Fuzzy trapezoidais. Conforme já apontamos anteriormente, neste trabalho usaremos os números Fuzzy Triangulares. Na literatura é comum denotar a função de pertinência μ_A do número Fuzzy A simplesmente por A .

Um número Fuzzy A em $\mathbb{R}$ é chamado número Fuzzy triangular quando sua função de pertinência é dada por

$$A(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases}.$$

Observe que para o valor de x igual a b o grau de pertinência do mesmo é igual a 1, o que caracteriza o número Fuzzy normalizado, e seu gráfico tem a forma de um triângulo, tendo por base o intervalo $[a,c]$ e, como único vértice fora da base, o ponto $(b,1)$. Denotaremos um número Fuzzy triangular pelo terno (a,b,c).

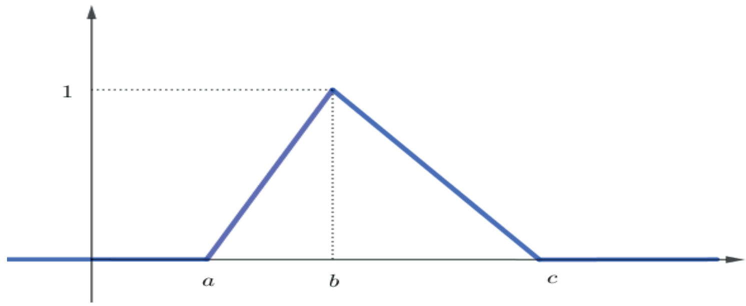

Figura 1: Estrutura do Número Triangular Fuzzy (a, b, c)

Fonte: Elaborada pelos autores.

A forma paramétrica de um número Fuzzy é representada por $[A]_r = [a + r(c - a), b + r(c - b)]$.

As seguintes operações aritméticas com números Fuzzy podem ser definidas baseadas no chamado Princípio da Extensão (DE BARROS, BASSANEZI, 2010): sejam dois números Fuzzy triangulares definidos por

$A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$

- **Adição**: $A_1 \oplus A_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$.
- **Produto**: $A_1 \odot A_2 = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2)$.
- **Produto por um número real**: $\lambda \odot A_1 = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot b_1, \lambda \cdot c_1)$.

Um conjunto básico de operações de Minkowski (SERRA, 1983), adição e multiplicação por escalar, podem ser definidas nos r-níveis para cada $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[A]_r + [B]_r = \{a + b | a \in [A]_r, b \in [B]_r\} \text{ e } \lambda A = \{\lambda a | a \in [A]_r\}. \quad (3)$$

Se $\lambda = -1$, a multiplicação por escalar é chamada de oposta

$$-[A]_r := (-1)A = [-a_r^-, -a_r^+]. \quad (4)$$

Em geral, $[A]_r - [A]_r \neq \{0\}$, isto é, o oposto de $[A]_r$ não é o inverso de $[A]_r$ com respeito a adição de Minkowski. A diferença de Minkowski é dada por

$$[A]_r + (-1)[B]_r = [a_r^- - b_r^+, a_r^+ - b_r^-].$$

Exemplo 2.1 Sejam $A = [0, 1]$ e $(-1)A = [-1, 0]$. Por conseguinte, temos

$$A - (-1)A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1]. \tag{5}$$

Portanto, o oposto de um conjunto não gera uma operação de diferença entre conjuntos.

O diâmetro de um número Fuzzy A é medido pelo fecho de seu suporte, isto é,

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}([A]_0) = a_0^+ - a_0^-. \tag{6}$$

Assim, quanto maior for o diâmetro de $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ mais Fuzzy ele é.

De acordo com o princípio de extensão de Zadeh para intervalos da reta podemos definir a soma e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, respectivamente, por

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup_{y+z=x} \min\{\mu_A(y), \mu_(z)\} \tag{7}$$

e

$$\mu_{\lambda\odot A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\frac{x}{\lambda}), & \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases} \tag{8}$$

onde $\chi\{0\}$ é a função característica de $\{0\}$.

Por meio dos r-níveis podemos relacionar as operações aritméticas para números fuzzy com as respectivas operações Minkowski:

$$[A \oplus B]_r = [A]_r + [B]_r, \quad [\lambda \odot A]_r = \lambda[A]_r, \quad \forall r \in [0, 1]. \tag{9}$$

Observação 1. Vale ressaltar que $1 \odot A = A$, $A \oplus B = B \oplus A$ e $\lambda \odot A = A \odot \lambda$.

Definição 2.2 Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A métrica de Pompeiu-Hausdorff $d_H : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, é definida por

$$d_H(A, B) = \sup_{0\leq r\leq 1} \max\{|a_r^- - b_r^-|, |a_r^+ - b_r^+|\}, \tag{10}$$

sendo $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$ e $[B]_r = [b_r^-, b_r^+]$.

Teorema 2.3 (Dimond, Kloedem, 2000) Dados $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. O par $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_\infty)$ é um espaço métrico completo, separável e localmente compacto;
2. $d_H(A \oplus B, B \oplus C) = d_H(A, B)$;
3. $d_H(\lambda \odot A, \lambda \odot B) = |\lambda| d_H(A, B)$;
4. $d_H(A \oplus B, C \oplus D) \leq d_H(A, C) + d_H(B, D)$.

Teorema 2.4 (Anastassiou, 2001) Valem as seguintes propriedades:

I. Se $\widetilde{0} = \chi_{\{0\}}$, então $\widetilde{0} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um elemento neutro com respeito a adição de números Fuzzy, isto é, $A \oplus \widetilde{0} = \widetilde{0} \oplus A = A$, para todo $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

II. Com respeito ao elemento $\widetilde{0}$, nenhum elemento de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tem oposto em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

III. Sejam $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \cdot b \geq 0$, temos $(a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A$

IV. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (A \oplus B) = \lambda \odot A \oplus \lambda \odot B$.

V. Para todo $\lambda, \beta \in$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (\beta \odot A) = (\lambda \cdot \beta) \odot A$.

VI. Sejam $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Então $d_H(a \odot A, b \odot A) \leq |a - b| \cdot d_H(A, \widetilde{0})$.

VII. A aplicação $||A||_{\mathcal{F}} = d_H(A, \widetilde{0})$ tem as propriedades de uma norma em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Observação 2 Convém destacar que a tripla $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e, consequentemente, $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço normado.

Definição 2.5 (Diferença de Hukuhara) Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H-diferença de A e B, denotada por $A \ominus_H B$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H -diferença de A e B, denotada por $A \ominus_H B$.

Observação 3 A diferença de Hukuhara nem sempre existe, por exemplo $\{0\} \ominus_H [0, 1]$. Além disso, $A \ominus_H B \neq A \oplus (-1) \odot B$.

Teorema 2.6 (Angulo-Castillo, 2015) Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

1. $A \ominus_H A = \{0\}$.
2. $(A \oplus B) \ominus_H B = A$.
3. Se $A \ominus_H B = C$ existe, C é único.
4. Se $\beta \leq \lambda$, $(\lambda - \beta) \odot A = (\lambda \odot A) \ominus_H (\beta \odot A)$.
5. $\beta \odot (A \ominus_H B) = (\beta \odot A) \ominus_H (\beta \odot B)$ sempre que $A \ominus_H B$ exista.

Definição 2.7 Uma função com valores a números Fuzzy, ou simplesmente uma função Fuzzy, é a aplicação $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, para cada número real $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ associamos um número Fuzzy $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Quando nos referirmos a funções Fuzzy contínuas significa continuidade em relação a métrica d_∞.

Para cada $x \in \Omega$, denotamos os r -níveis da função Fuzzy f por

$$[f(x)]_r = [f_r^-(x), f_r^+(x)], \forall r \in [0,1]. \tag{11}$$

Dessa forma, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é representada por duas funções $f_r^-, f_r^+ \colon \Omega \to \mathbb{R}$, para cada r.

Definição 2.8 Uma função $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável (H -diferenciável) em $x_0 > 0$ se os limites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} \text{ e } \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{h}. \tag{12}$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ na métrica d_H. O número Fuzzy $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é chamado de H-derivada de f em x_0.

Definição 2.9 Sejam $\alpha \in (0,1]$ e $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função. A aplicação f é αH-diferenciável em $x > 0$ se existir um elemento $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que para todo $h > 0$ suficientemente pequeno, $\exists\, f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)$ e $f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})$ e vale o limite (na métrica d_H)

$$lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h} = \mathcal{D}_H^\alpha f(x). \tag{13}$$

Definição 2.10 (Compatível Fuzzy) Sejam $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1]$. A derivada Compatível Fuzzy de ordem α da função f em $x > 0$ é definida por $x > 0$ é definida por

1. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h}.$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$.

2. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h}$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$. O número Fuzzy $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$ é chamado de derivada H-compatível de f em x .

3 I DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Teorema 3.1 Sejam $0<\alpha\leq 1$ e $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função αH-diferenciável, com r níveis dados por $[f(x)]_r=[f_r^+(x),f_r^+(x)]$, $\forall r\in[0,1]$. Então, $f_r^+(x)$ e $f_r^+(x)$ são α -diferenciáveis tais que

1. no primeiro caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r=[f_r^+(x),f_r^+(x)],\quad\forall r\in[0,1]$
2. no segundo caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r=[\mathcal{D}^\alpha f_r^+(x),\mathcal{D}^\alpha f_r^+(x)],\quad\forall r\in[0,1]$

Teorema 3.2 Sejam $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\alpha\in(0,1]$. Se f e g são αH-diferenciáveis então $\mathcal{D}_H^\alpha(f+g)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha(f+g)=\mathcal{D}_H^\alpha f\oplus\mathcal{D}_H^\alpha g$.

Demonstração. Seja $h>0$ suficientemente pequeno tal que $S_f=f(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H f(x)$ e $S_g=g(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H g(x)$ existam. Por definição obtemos $f(x+hx^{1-\alpha})=S_f\oplus f(x)$ e $g(x+hx^{1-\alpha})=S_g\oplus g(x)$. Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos

$$(f\oplus g)(x+hx^{1-\alpha})=S_f\oplus S_g\oplus(f\oplus g)(x),$$

isto é,

$$(f\oplus g)(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H(f\oplus g)(x)=S_f\oplus S_g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}d_H\left(\frac{S_f}{h}\oplus\frac{S_g}{h},\mathcal{D}_H^\alpha f(x)\oplus\mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right) &= d_H\left(\frac{S_f}{h}\oplus\frac{S_g}{h},\mathcal{D}_H^\alpha f(x)\oplus\mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right)\\ &\leq d_H\left(\frac{S_f}{h},\mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right)+d_H\left(\frac{S_g}{h},\mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right).\end{aligned}$$

faça $h\to 0^+$ e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

Teorema 3.3 Sejam $f:[0,\infty)\to$, $c\in\mathbb{R}$ e $\alpha\in(0,1]$. Se f é αH-diferenciáveis então $\mathcal{D}_H^\alpha(c\odot f)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha(c\odot f)=c\odot\mathcal{D}_H^\alpha f$.

Demonstração. Observe que

$$(c\odot f)(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H(c\odot f)(x)=c\odot f(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H c\odot f(x).$$

Para $h>0$ suficientemente pequeno tal que $S_f=f(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H f(x)\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Temos por definição $f(x+hx^{1-\alpha})=S_f\oplus f(x)$. Agora,

$$c\odot f(x+hx^{1-\alpha})=c\odot(S_f\oplus f(x)).$$

Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos
$c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x) = c \odot S_f$.

Para a equação

$$\begin{aligned} d_H\left(\frac{c\odot f(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H c\odot f(x)}{h}, c\odot \mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right) &= d_H\left(\frac{c\odot S_f}{h}, c\odot \mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right) \\ &= |c| d_H\left(\frac{S_f}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right) \end{aligned}$$

faça $h \to 0^+$ na equação acima e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

4 | MODELO DE MALTHUS-COMPATÍVEL COM CONDIÇÃO INICIAL FUZZY

No modelo compatível de crescimento populacional temos que a população aumenta exponencialmente conforme o tempo passa. Assim, considerando a condição inicial Fuzzy, obtemos o seguinte PVI Fuzzy

$\mathcal{D}_H^\alpha y(x) = kx \quad y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

sendo $k \in \mathbb{R}_+^*$ a taxa de decrescimento intrínseca da população. Pelo Teorema 3.1, para α fixado, a solução do PVI com derivada compatível fuzzy é uma função $y_\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com r -níveis $[y_\alpha(x)]_r = [y^-_{\alpha,r}(x), y^+_{\alpha,r}(x)]$, para $r \in [0,1]$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha y^-_{\alpha,r}(x) = k y^-_{\alpha,r}(x) \\ y(0) = y_0^- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathcal{D}^\alpha y^+_{\alpha,r}(x) = k y^+_{\alpha,r}(x) \\ y(0) = y_0^+ \end{cases},$$

onde $[Y_0]_r = [y_0^-, y_0^+]$. A solução é dada por

$[y_\alpha(x)]_r = [y_0^- \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}, y_0^+ \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}] = e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}[Y_0]_r$.

Tomando $Y_0 = (a, b, c)$:

$$[y_\alpha(x)]_r = [(a + r(c-a)) \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}, (b + r(c-b)) \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}]$$

Se considerarmos alguns parâmetros como por exemplo: a = 0,2, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5, teremos o gráfico representado pela Figura 2.

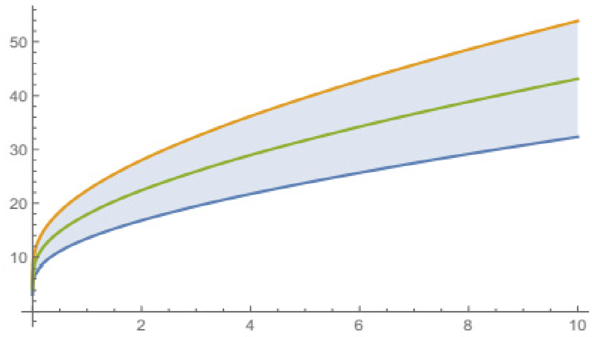

Figura 2: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros a = 0,2, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5

Fonte: Elaborado pelos autores

Modificando um dos parâmetros teremos a Figura 3:

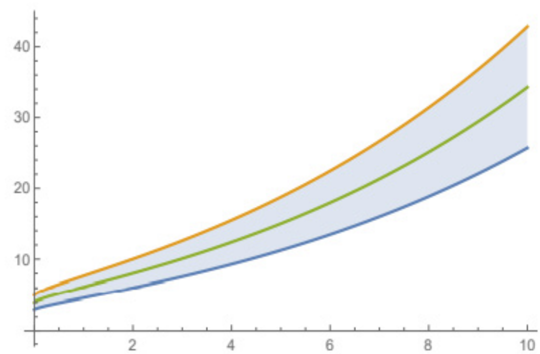

Figura 3: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros a = 0,7, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5

Percebe-se que quando a tende a 1, a equação diferencial de Malthus compatível tende a equação diferencial de Malthus.

5 I CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma discussão sobre derivada compatível, munido da noção de diferenciabilidade Hukuhara, que forneceu uma única solução para a equação diferencial do modelo de Malthus compatível com condição inicial representada por números Fuzzy triangulares. Percebe-se facilmente que a solução encontrada define um número Fuzzy para qualquer que seja. A derivada compatível pertence a uma classe de derivadas tais como Katugampola, M-derivada etc. Segundo alguns critérios na literatura elas não devem ser chamadas de derivadas fracionárias, no entanto, essa derivada tem sido utilizada com sucesso em aplicações envolvendo mecânica de Newton e usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial. Finalmente, trabalhos futuros podem se enquadrar na abordagem de outros tipos de generalizações da derivadas Hukuhara e as diversas definições das integrais Fuzzy associadas.

REFERÊNCIAS

ANASTASSIOU, G. A. and GAL, S. **On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type.** Journal of Fuzzy Mathematics, 9 (3), Los Angeles, 701–708, 2001.

ANGULO-CASTILLO, V. **Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos.** Revista Integración, 32(1), 27-37, 2014.

CAMARGO, R. F., OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário.** Livraria da Física, São Paulo, 2015.

DE BARROS, L. C., and SANTO PEDRO, F. **Fuzzy differential equations with interactive derivative.** Fuzzy sets and systems, 309, 64-80, 2017.

DE BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.

DIMOND, P., KLOEDEM, P. **Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis**. In: Handbook fuzzy sets. 7, 583-641, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** v. 1, 5a. edição. Rio de Janeiro, LTC Editora, 2001.

KHALIL, R., HORANI, M. A., YOUSEF, A., SABABHEH, M. **A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics.** 264, 65-70, 2014.

PURI, M. and RALESCU, D. **Differential and fuzzy functions.** J. Math.Anal. Appl. 91, 552–558, 1983.

SERRA, J. **Image analysis and mathematical morphology.** Academic Press, Inc., 1983.

SILVA, Fernando S.; MOREIRA, Davidson M.; MORET, Marcelo A. **Conformable Laplace transform of fractional differential equations.** Axioms, v. 7, n. 3, p. 55, 2018.

ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets.** Information and Control, v. 8, p. 338-353, 1965.

ÍNDICE REMISSIVO

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

P

R

S

T

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena Editora
Ano 2021