

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2021 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2021 Os autores

Copyright da Edição © 2021 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Ivone Goulart Lopes – Instituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^ª Dr^ª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Prof^ª Dr^ª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof^ª Dr^ª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof^ª Dr^ª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^ª Dr^ª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Dr^ª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^ª Dr^ª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Prof^ª Dr^ª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfnas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília

Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof^ª Dr^ª Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina

Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília

Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra

Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco

Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará

Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma

Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino

Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais
Prof. Me. Alexandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Profª Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Profª Drª Andrezza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar

Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Fabiano Eloy Atilio Batista – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR

Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Ma. Lilians Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Prof^ª Dr^ª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof^ª Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz
Prof^ª Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Prof^ª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Prof^ª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Prof^ª Dr^ª Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa
Prof^ª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Prof^ª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Prof^ª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof^ª Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof^ª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
 André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-5706-856-4
 DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil
 Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, na que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. [org/10.29327/217514.7.1-5](https://doi.org/10.29327/217514.7.1-5). **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: <http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430>. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

Celina Amélia da Silva

Carmen Teresa Kaiber

DOI 10.22533/at.ed.5642108031

CAPÍTULO 2..... 12

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS

Adan Rodrigo Vale Pacheco

Fábio Barros Gonçalves

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.5642108032

CAPÍTULO 3..... 25

PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM

Wharton Martins de Lima

Davis Rytley Lira Martins

Jamilson Pinto de Medeiros

João Pedro Nogueira da Silva

Sérgio Barbosa da Penha

William Gomes dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.5642108033

CAPÍTULO 4..... 35

AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Francisca Missilene Muniz Magalhães

Pedro Franco de Sá

DOI 10.22533/at.ed.5642108034

CAPÍTULO 5..... 44

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Daniel Martins Nunes

Fábio Mendes Ramos

DOI 10.22533/at.ed.5642108035

CAPÍTULO 6..... 59

DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7º ANO

Emilim Caroline Canabarro

Lucieli Martins Gonçalves Descovi

DOI 10.22533/at.ed.5642108036

CAPÍTULO 7	71
DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES	
Beatriz Nascimento Gomes	
Altemir da Silva Braga	
DOI 10.22533/at.ed.5642108037	
CAPÍTULO 8	80
RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS	
Helena Dória Lucas de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.5642108038	
CAPÍTULO 9	91
NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS	
Dayson Wesley Lima Castro	
Arlison da Conceição Rocha	
Natanael Freitas Cabral	
Miguel Chaquiam	
DOI 10.22533/at.ed.5642108039	
CAPÍTULO 10	104
SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA	
Giovanni Santos	
Mairon Carliel Pontarolo	
Sebastião Romero Franco	
DOI 10.22533/at.ed.56421080310	
CAPÍTULO 11	109
CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS	
Ana Emilia de Melo Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.56421080311	
CAPÍTULO 12	118
UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
José Roberto Costa	
Vanessa Tluscik dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080312	
CAPÍTULO 13	130
A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGICA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL	
Catiex Rodrigues de Souza	
Adelmo Carvalho da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.56421080313	

CAPÍTULO 14	143
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA	
Wanderlei Verissimo	
Thiago Fanelli Ferraiol	
DOI 10.22533/at.ed.56421080314	
CAPÍTULO 15	156
DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA	
Gustavo Pereira Gomes	
Bianca Menezes Campos	
DOI 10.22533/at.ed.56421080315	
CAPÍTULO 16	164
A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA	
Elivane Leandro da Silva	
Lucianne Oliveira Monteiro Andrade	
Marcelo de Sousa Coêlho	
DOI 10.22533/at.ed.56421080316	
CAPÍTULO 17	187
ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE	
Cristiane Martins Fernandes Tavares	
Edson Leite Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.56421080317	
CAPÍTULO 18	205
O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA	
Eliana Alves Arxer	
Dulcimeire Aparecida Volante Zanon	
DOI 10.22533/at.ed.56421080318	
CAPÍTULO 19	214
UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR	
Adriana Stefanello Somavilla	
Luani Griggio Langwinski	
Leonardo Silguero Pimentel	
DOI 10.22533/at.ed.56421080319	
CAPÍTULO 20	225
CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	
Adriana de Jesus Gabilão	

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra

Renata Forti Braga

DOI 10.22533/at.ed.56421080320

CAPÍTULO 21.....228

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM SOLVER LINHA

Mairon Carliel Pontarolo

Giovanni Santos

Sebastião Romero Franco

DOI 10.22533/at.ed.56421080321

CAPÍTULO 22.....233

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS

Vilma Luísa Sieglloch Barros

DOI 10.22533/at.ed.56421080322

CAPÍTULO 23.....241

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER

Henry Otavio Fontana

Thiago Gilberto do Prado

Vinícius Piccirillo

DOI 10.22533/at.ed.56421080323

CAPÍTULO 24.....254

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Fernando Santos Silva

Ana Paula Perovano

DOI 10.22533/at.ed.56421080324

CAPÍTULO 25.....266

DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS

Thiago Schinda Bubniak

Inácio Andruski Guimarães

Sonia Maria de Freitas

DOI 10.22533/at.ed.56421080325

CAPÍTULO 26.....273

COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION

Rejane de Barros Araújo

Antonio Augusto Rodrigues Coelho

DOI 10.22533/at.ed.56421080326

SOBRE OS ORGANIZADORES	282
ÍNDICE REMISSIVO.....	283

Data de aceite: 17/02/2021

Fernando Santos Silva

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
– UESB
Vitória da Conquista – BA
<http://lattes.cnpq.br/1193461132432149>

Ana Paula Perovano

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
– UESB
Vitória da Conquista – BA
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho
Rio Claro – SP
<http://lattes.cnpq.br/8892821688981110>

RESUMO: Neste texto, propomos uma nova definição de derivada Fuzzy do tipo local, denominada compatível Fuzzy. A definição é fundamentada na derivada de Khalil de ordem $0 < \alpha < 1$, e baseada na diferença de Hukuhara. Estudamos suas propriedades e apresentamos a solução da equação diferencial de Malthus compatível com condição inicial Fuzzy. O estudo proposto estende o caso de equações diferenciais Fuzzy de ordem inteira.

PALAVRAS - CHAVE: Derivada compatível; Números Fuzzy; Diferença de Hukuhara;

ABSTRACT: In this text, we propose a new definition of a Fuzzy derivative of the local type, called Fuzzy compatible. The definition is based on the Khalil derivative of order $0 < \alpha < 1$, and

based on the Hukuhara difference. We study its properties and present the solution of the Malthus compatible differential equation with initial Fuzzy condition. The proposed study extends the case of Fuzzy differential equations of an entire order.

KEYWORDS: Compatible derivative; Fuzzy numbers; Hukuhara's Difference.

1 | INTRODUÇÃO

A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Augustin-Louis Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal. Nesse sentido, para ε o incremento de x , a derivada de uma função $y = f(x)$ com relação a x é o limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$, se esse limite existir (GUIDORIZZI, 2001).

Se uma função admite a derivada em um ponto, dizemos que ela é derivável nesse ponto. Observamos que um conceito chave para derivada é a diferença

$$f(x + \varepsilon) - f(x). \quad (1)$$

Além disso, ao longo da história do Cálculo Diferencial a forma com que expressamos as derivadas matematicamente constituem uma razão suficientemente forte para a sua própria generalização. Podemos nos referir a derivada de uma função f por:

- Notação de Lagrange: f' ,

- Notação de Euler: Df ,
- Notação de Newton: \dot{f} ,
- Notação de Leibniz: $\frac{df}{dx}$.

As razões históricas para as notações acima incluem vantagens, desvantagens e escolhas pessoais. De forma semelhante, se para cada $n \in \mathbb{N}$, f for n vezes derivável, denotadas por

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = D^n f(x).$$

O conhecimento do conceito de derivada ficou bastante tempo restrito a praticamente dois pequenos grupos de matemáticos: O grupo de sir Isaac Newton (Inglaterra) e o do barão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (Alemanha). A notação de Leibniz é vantajosa, pois faz do Cálculo Diferencial um “Cálculo Operacional”.

Os irmãos Bernoulli propagaram por toda a Europa os símbolos e ideias de Leibniz para diversos matemáticos, dentre eles, o francês Guillaume François Antonie L’Hospital, mais conhecido como Marquês de L’Hospital. Em 1695, numa famosa carta, o Marquês pergunta a Leibniz o significado de $\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}}$.

Segundo Camargo e Oliveira (2015), Leibniz profetizou: “Este aparente paradoxo permitirá, no futuro, extrair consequências interessantes.”

Em 1819, Lacroix consegue responder o questionamento do Marquês de L’Hospital para a função $f(x) = x^m$, com os seguintes passos:

1. Determinou a n -ésima derivada da f para com m e n inteiros positivos e: $m \geq n$
 $D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$.

2. Substituiu m por $\Gamma(m+1)$ e $(m-n)!$ por $\Gamma(m-n+1)$, onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama (de Euler):

3. Por último, substituindo n por $\alpha \in (0, 1)$, m por um número β real positivo qualquer e supondo $x > 0$:

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.$$

4. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, temos $D^{0.5} x = \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$.

O cálculo da ordem não inteira chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent, Hardy, Littlewood,

Erdélyi, Kober, Caputo entre outros (CAMARGO, OLIVEIRA, 2015).

Recentemente Khalil et al. (2014) propôs chamada de derivada compatível de ordem α , $0 < \alpha \leq 1$. Em sua proposta, modificou a diferença da Equação (1) por $f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)$ Seu objetivo foi de generalizar as propriedades clássicas do cálculo clássico. A derivada local compatível de ordem α , sendo $0 < \alpha \leq 1$, de uma função f é dada por,

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \quad (2)$$

para todo $x > 0$. Consequentemente, a derivada conformável satisfaz quase todas as propriedades da derivada clássicas. Essa derivada tem sido utilizada em aplicações envolvendo mecânica de Newton (CHUNG, 2015), equação do calor (EROGLU, AVCI, OZDEMIR, 2017) e, usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial (SILVA, MOREIRA, MORET, 2018).

Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas. Para Guidorizzi (2001) as equações diferenciais ordinárias conhecidas simplesmente por: Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente por meio de simples manipulação algébrica é possível reescrever na forma de uma ou mais equações $y' = f(x, y)$. No entanto, a modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas $y' = f(x, y)$ quase sempre está incompleta. Por exemplo, o valor inicial pode não ser exatamente conhecido. Em geral, ele é estimado utilizando alguma medida e pode estar sujeito a erros.

Os números Fuzzy são um subconjunto do conjunto dos números reais, quantificando a imprecisão associada a uma dada informação e representando valores incertos. Todos os números Fuzzy estão relacionados a graus de pertinência que expressam o quanto é verdadeiro dizer se algo pertence ou não a um determinado conjunto.

Nestas situações, em vez de trabalhar com números reais, podemos considerar um número Fuzzy que representa “aproximadamente” ou “em torno de”. A aritmética Fuzzy pode ser considerada como uma extensão dos números reais e, também de sua aritmética.

Existem diferentes tipos de números Fuzzy, mas, para fins simplicidade vamos trabalhar com os números Fuzzy triangulares. Além disso, as conversões desses números Fuzzy em relação ao conceito de intervalos também são incorporadas.

Existem várias formas de estender a noção de derivada no contexto Fuzzy. Uma das primeiras generalizações foi obtida por Puri e Ralescu (1983) que é baseada na noção da diferença de Hukuhara. Posteriormente, Kaleva (1987) usa esta noção para desenvolver uma teoria de equações diferenciais Fuzzy.

Neste trabalho apresentamos a derivada compatível de uma função a valores Fuzzy, demonstramos algumas propriedades e apresentamos exemplos ilustrativos.

Definição 1.1 (Khalil et al., 2014) Sejam $t \in \mathbb{R}$ e f uma função real. Observemos pela definição acima que se f for diferenciável então $\mathcal{D}^\alpha f(x) = x^{\alpha-1} f'(x)$.

2 | CONCEITOS BÁSICOS

Zadeh (1965) publicou o primeiro artigo sobre teoria dos conjuntos Fuzzy. Esta teoria caracteriza qualquer conjunto clássico por uma função de pertinência generalizada. Neste artigo, o autor define conjunto Fuzzy como uma classe de objetos com um grau de pertinência contínuo.

Um número Fuzzy A é um subconjunto Fuzzy de \mathbb{R} com uma função de pertinência $\mu_A: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ semi-contínua superiormente, Fuzzy convexa, normal e com suporte compacto. Em particular, $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento x em A .

A família de todos os números Fuzzy será denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Os r -níveis do número Fuzzy A são intervalos limitados e fechados, podendo ser denotados da seguinte maneira: $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$, para todo $r \in [0, 1]$. O nível zero de um subconjunto Fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de \mathbb{R} que contém o conjunto suporte de A . Quando $r = 1$ dizemos $[A]_1$ é o núcleo de A .

A função de pertinência não é função densidade de probabilidade, mas sim uma medida de compatibilidade entre o objeto e o conceito representado pelo conjunto Fuzzy. Não existem regras definitivas para a escolha dessas funções na literatura. Aplicações muito sensíveis à escolha das funções de pertinência são, em geral, não adequadas para modelagem Fuzzy. Em muitos casos práticos as funções simples são convenientes, sendo as mais comuns com formato no plano cartesiano de triângulos e trapézios.

Entre os mais conhecidos estão os números Fuzzy triangulares e os números Fuzzy trapezoidais. Conforme já apontamos anteriormente, neste trabalho usaremos os números Fuzzy Triangulares. Na literatura é comum denotar a função de pertinência μ_A do número Fuzzy A simplesmente por A .

Um número Fuzzy A em \mathbb{R} é chamado número Fuzzy triangular quando sua função de pertinência é dada por

$$A(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases}.$$

Observe que para o valor de x igual a b o grau de pertinência do mesmo é igual a 1, o que caracteriza o número Fuzzy normalizado, e seu gráfico tem a forma de um

triângulo, tendo por base o intervalo $[a, c]$ e, como único vértice fora da base, o ponto $(b, 1)$. Denotaremos um número Fuzzy triangular pelo terno (a, b, c) .

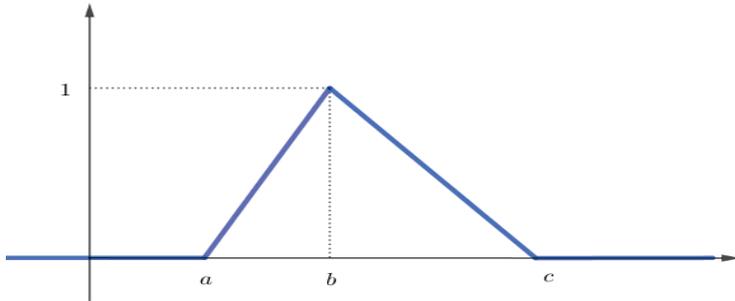


Figura 1: Estrutura do Número Triangular Fuzzy (a, b, c)

Fonte: Elaborada pelos autores.

A forma paramétrica de um número Fuzzy é representada por $[A]_r = [a + r(c - a), b + r(c - b)]$.

As seguintes operações aritméticas com números Fuzzy podem ser definidas baseadas no chamado Princípio da Extensão (DE BARROS, BASSANEZI, 2010): sejam dois números Fuzzy triangulares definidos por

$$A_1 = (a_1, b_1, c_1) \text{ e } A_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

- **Adição:** $A_1 \oplus A_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$.
- **Produto:** $A_1 \odot A_2 = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2)$.
- **Produto por um número real:** $\lambda \odot A_1 = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot b_1, \lambda \cdot c_1)$.

Um conjunto básico de operações de Minkowski (SERRA, 1983), adição e multiplicação por escalar, podem ser definidas nos r -níveis para cada $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[A]_r + [B]_r = \{a + b \mid a \in [A]_r, b \in [B]_r\} \text{ e } \lambda A = \{\lambda a \mid a \in [A]_r\}. \quad (3)$$

Se $\lambda = -1$, a multiplicação por escalar é chamada de oposta

$$-[A]_r := (-1)A = [-a_r^-, -a_r^+]. \quad (4)$$

Em geral, $[A]_r - [A]_r \neq \{0\}$, isto é, o oposto de $[A]_r$ não é o inverso de $[A]_r$ com respeito a adição de Minkowski. A diferença de Minkowski é dada por

$$[A]_r + (-1)[B]_r = [a_r^- - b_r^+, a_r^+ - b_r^-].$$

Exemplo 2.1 Sejam $A = [0, 1]$ e $(-1)A = [-1, 0]$. Por conseguinte, temos

$$A - (-1)A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1]. \quad (5)$$

Portanto, o oposto de um conjunto não gera uma operação de diferença entre conjuntos.

O diâmetro de um número Fuzzy A é medido pelo fecho de seu suporte, isto é,

$$\text{diam}(A) = \text{diam}([A]_0) = a_0^+ - a_0^-. \quad (6)$$

Assim, quanto maior for o diâmetro de $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ mais Fuzzy ele é.

De acordo com o princípio de extensão de Zadeh para intervalos da reta podemos definir a soma e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, respectivamente, por

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \sup_{y+z=x} \min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\} \quad (7)$$

e

$$\mu_{\lambda \odot A}(x) = \begin{cases} \mu_A\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases} \quad (8)$$

onde $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de $\{0\}$.

Por meio dos \mathcal{I} -níveis podemos relacionar as operações aritméticas para números fuzzy com as respectivas operações Minkowski:

$$[A \oplus B]_r = [A]_r + [B]_r, \quad [\lambda \odot A]_r = \lambda[A]_r, \quad \forall r \in [0, 1]. \quad (9)$$

Observação 1. Vale ressaltar que $1 \odot A = A$, $A \oplus B = B \oplus A$ e $\lambda \odot A = A \odot \lambda$.

Definição 2.2 Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A métrica de Pompeiu-Hausdorff $d_H: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, é definida por

$$d_H(A, B) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \max\{|a_r^- - b_r^-|, |a_r^+ - b_r^+|\}, \quad (10)$$

sendo $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$ e $[B]_r = [b_r^-, b_r^+]$.

Teorema 2.3 (Dimond, Kloedem, 2000) Dados $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. O par $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ é um espaço métrico completo, separável e localmente compacto;
2. $d_H(A \oplus B, B \oplus C) = d_H(A, B)$;
3. $d_H(\lambda \odot A, \lambda \odot B) = |\lambda|d_H(A, B)$;
4. $d_H(A \oplus B, C \oplus D) \leq d_H(A, C) + d_H(B, D)$.

Teorema 2.4 (Anastassiou, 2001) Valem as seguintes propriedades:

- I. Se $\tilde{0} = \chi_{\{0\}}$, então $\tilde{0} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um elemento neutro com respeito a adição de números Fuzzy, isto é, $A \oplus \tilde{0} = \tilde{0} \oplus A = A$, para todo $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
- II. Com respeito ao elemento $\tilde{0}$, nenhum elemento de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tem oposto em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$
- III. Sejam $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \cdot b \geq 0$, temos $(a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A$
- IV. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (A \oplus B) = \lambda \odot A \oplus \lambda \odot B$.
- V. Para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (\beta \odot A) = (\lambda \cdot \beta) \odot A$.
- VI. Sejam $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Então $d_H(a \odot A, b \odot A) \leq |a - b| \cdot d_H(A, \tilde{0})$.
- VII. A aplicação $\|A\|_{\mathcal{F}} = d_H(A, \tilde{0})$ tem as propriedades de uma norma em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Observação 2 Convém destacar que a tripla $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e, conseqüentemente, $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço normado.

Definição 2.5 (Diferença de Hukuhara) Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H -diferença de A e B , denotada por $A \ominus_H B$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H -diferença de A e B , denotada por $A \ominus_H B$.

Observação 3 A diferença de Hukuhara nem sempre existe, por exemplo $\{0\} \ominus_H [0, 1]$. Além disso, $A \ominus_H B \neq A \oplus (-1) \odot B$.

Teorema 2.6 (Angulo-Castillo, 2015) Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

1. $A \ominus_H A = \{0\}$.
2. $(A \oplus B) \ominus_H B = A$.
3. Se $A \ominus_H B = C$ existe, C é único.
4. Se $\beta \leq \lambda$, $(\lambda - \beta) \odot A = (\lambda \odot A) \ominus_H (\beta \odot A)$.
5. $\beta \odot (A \ominus_H B) = (\beta \odot A) \ominus_H (\beta \odot B)$ sempre que $A \ominus_H B$ exista.

Definição 2.7 Uma função com valores a números Fuzzy, ou simplesmente uma função Fuzzy, é a aplicação $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, para cada número real $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ associamos um número Fuzzy $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Quando nos referirmos a funções Fuzzy

contínuas significa continuidade em relação a métrica d_∞ .

Para cada $x \in \Omega$, denotamos os r -níveis da função Fuzzy f por

$$[f(x)]_r = [f_r^-(x), f_r^+(x)], \forall r \in [0, 1]. \quad (11)$$

Dessa forma, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é representada por duas funções $f_r^-, f_r^+: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para cada r .

Definição 2.8 Uma função $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável (H -diferenciável) em $x_0 > 0$ se os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)}{h} \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h)}{h}. \quad (12)$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ na métrica d_H . O número Fuzzy $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é chamado de H -derivada de f em x_0 .

Definição 2.9 Sejam $\alpha \in (0, 1]$ e $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função. A aplicação f é αH -diferenciável em $x > 0$ se existir um elemento $\mathcal{D}_H f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que para todo $h > 0$ suficientemente pequeno, $\exists f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)$ e $f(x) \ominus_H f(x + hx^{1-\alpha})$ e vale o limite (na métrica d_H)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x + hx^{1-\alpha})}{h} = \mathcal{D}_H^\alpha f(x). \quad (13)$$

Definição 2.10 (Compatível Fuzzy) Sejam $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0, 1]$. A derivada Compatível Fuzzy de ordem α da função f em $x > 0$ é definida por $x > 0$ é definida por

1. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x + hx^{1-\alpha})}{h}.$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$.

2. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x) \ominus_H f(x + hx^{1-\alpha})}{h}$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$. O número Fuzzy $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$ é chamado de derivada H -compatível de f em x .

3 I DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Teorema 3.1 Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_F$ uma função αH -diferenciável, com r níveis dados por $[f(x)]_r = [f_r^+(x), f_r^-(x)]$, $\forall r \in [0, 1]$. Então, $f_r^+(x)$ e $f_r^-(x)$ são α -diferenciáveis tais que

1. no primeiro caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r = [f_r^+(x), f_r^-(x)]$, $\forall r \in [0, 1]$
2. no segundo caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r = [\mathcal{D}^\alpha f_r^+(x), \mathcal{D}^\alpha f_r^-(x)]$, $\forall r \in [0, 1]$

Teorema 3.2 Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_F$ e $\alpha \in (0, 1]$. Se f e g são αH -diferenciáveis então $\mathcal{D}_H^\alpha (f + g)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha (f + g) = \mathcal{D}_H^\alpha f \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g$.

Demonstração. Seja $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $S_f = f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)$ e $S_g = g(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H g(x)$ existam. Por definição obtemos $f(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus f(x)$ e $g(x + hx^{1-\alpha}) = S_g \oplus g(x)$. Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos

$$(f \oplus g)(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus S_g \oplus (f \oplus g)(x),$$

isto é,

$$(f \oplus g)(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H (f \oplus g)(x) = S_f \oplus S_g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_H\left(\frac{S_f}{h} \oplus \frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right) &= d_H\left(\frac{S_f}{h} \oplus \frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right) \\ &\leq d_H\left(\frac{S_f}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right) + d_H\left(\frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right). \end{aligned}$$

faça $h \rightarrow 0^+$ e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

Teorema 3.3 Sejam $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_F$, $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0, 1]$. Se f é αH -diferenciável então $\mathcal{D}_H^\alpha (c \odot f)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha (c \odot f) = c \odot \mathcal{D}_H^\alpha f$.

Demonstração. Observe que

$$(c \odot f)(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H (c \odot f)(x) = c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x).$$

Para $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $S_f = f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x) \in \mathbb{R}_F$. Temos por definição $f(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus f(x)$. Agora,

$$c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) = c \odot (S_f \oplus f(x)).$$

Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos

$$c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x) = c \odot S_f.$$

Para a equação

$$\begin{aligned} d_H \left(\frac{c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x)}{h}, c \odot \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \right) &= d_H \left(\frac{c \odot S_f}{h}, c \odot \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \right) \\ &= |c| d_H \left(\frac{S_f}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \right) \end{aligned}$$

faça $h \rightarrow 0^+$ na equação acima e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

4 I MODELO DE MALTHUS-COMPATÍVEL COM CONDIÇÃO INICIAL FUZZY

No modelo compatível de crescimento populacional temos que a população aumenta exponencialmente conforme o tempo passa. Assim, considerando a condição inicial Fuzzy, obtemos o seguinte PVI Fuzzy

$$\mathcal{D}_H^\alpha y(x) = ky \quad y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

sendo $k \in \mathbb{R}_+^*$ a taxa de decrescimento intrínseca da população. Pelo Teorema 3.1, para α fixado, a solução do PVI com derivada compatível fuzzy é uma função $y_\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com r -níveis $[y_\alpha(x)]_r = [y_{\alpha,r}^-(x), y_{\alpha,r}^+(x)]$, para $r \in [0, 1]$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha y_{\alpha,r}^-(x) = ky_{\alpha,r}^-(x) \\ y(0) = y_0^- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathcal{D}^\alpha y_{\alpha,r}^+(x) = ky_{\alpha,r}^+(x) \\ y(0) = y_0^+ \end{cases},$$

onde $[Y_0]_r = [y_0^-, y_0^+]$. A solução é dada por

$$[y_\alpha(x)]_r = [y_0^- \cdot e^{k \frac{t^\alpha}{\alpha}}, y_0^+ \cdot e^{k \frac{t^\alpha}{\alpha}}] = e^{k \frac{t^\alpha}{\alpha}} [Y_0]_r.$$

Tomando $Y_0 = (a, b, c)$:

$$[y_\alpha(x)]_r = [(a + r(c - a)) \cdot e^{k \frac{t^\alpha}{\alpha}}, (b + r(c - b)) \cdot e^{k \frac{t^\alpha}{\alpha}}]$$

Se considerarmos alguns parâmetros como por exemplo: $a = 0,2$, $r = 0, a = 3, b = 4$ e $c = 5$, teremos o gráfico representado pela Figura 2.

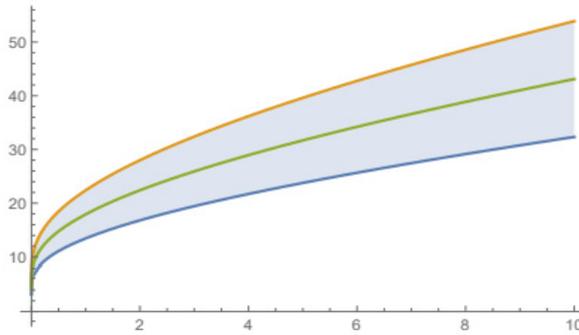


Figura 2: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros $a = 0,2$, $r = 0$, $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$

Fonte: Elaborado pelos autores

Modificando um dos parâmetros teremos a Figura 3:

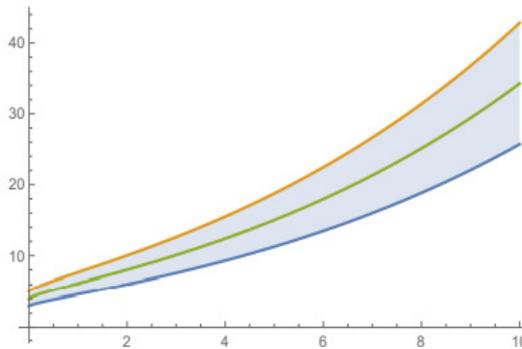


Figura 3: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros $a = 0,7$, $r = 0$, $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$

Percebe-se que quando a tende a 1, a equação diferencial de Malthus compatível tende a equação diferencial de Malthus.

5 | CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma discussão sobre derivada compatível, munido da noção de diferenciabilidade Hukuhara, que forneceu uma única solução para a equação diferencial do modelo de Malthus compatível com condição inicial representada por números Fuzzy triangulares. Percebe-se facilmente que a solução encontrada define um

número Fuzzy para qualquer que seja. A derivada compatível pertence a uma classe de derivadas tais como Katugampola, M-derivada etc. Segundo alguns critérios na literatura elas não devem ser chamadas de derivadas fracionárias, no entanto, essa derivada tem sido utilizada com sucesso em aplicações envolvendo mecânica de Newton e usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial. Finalmente, trabalhos futuros podem se enquadrar na abordagem de outros tipos de generalizações da derivadas Hukuhara e as diversas definições das integrais Fuzzy associadas.

REFERÊNCIAS

- ANASTASSIOU, G. A. and GAL, S. **On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type.** Journal of Fuzzy Mathematics, 9 (3), Los Angeles, 701–708, 2001.
- ANGULO-CASTILLO, V. **Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos.** Revista Integración, 32(1), 27-37, 2014.
- CAMARGO, R. F., OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário.** Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- DE BARROS, L. C., and SANTO PEDRO, F. **Fuzzy differential equations with interactive derivative.** Fuzzy sets and systems, 309, 64-80, 2017.
- DE BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.** Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.
- DIMOND, P., KLOEDEM, P. **Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis.** In: Handbook fuzzy sets. 7, 583-641, 2000.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** v. 1, 5a. edição. Rio de Janeiro, LTC Editora, 2001.
- KHALIL, R., HORANI, M. A., YOUSEF, A., SABABHEH, M. **A new definition of fractional derivative.** Journal of Computational and Applied Mathematics. 264, 65-70, 2014.
- PURI, M. and RALESCU, D. **Differential and fuzzy functions.** J. Math.Anal. Appl. 91, 552–558, 1983.
- SERRA, J. **Image analysis and mathematical morphology.** Academic Press, Inc., 1983.
- SILVA, Fernando S.; MOREIRA, Davidson M.; MORET, Marcelo A. **Conformable Laplace transform of fractional differential equations.** Axioms, v. 7, n. 3, p. 55, 2018.
- ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets.** Information and Control, v. 8, p. 338-353, 1965.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra 9, 18, 63, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 154, 189, 190, 203, 204, 227
Anos Iniciais 7, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 80, 81, 88, 89, 120, 121, 126, 128, 226, 227
Aplicativo online 9, 187, 188, 204
Aprendizagem 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 23, 25, 26, 27, 33, 35, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 85, 89, 92, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 160, 163, 164, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 205, 206, 211, 212, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 223, 224, 226, 234, 235, 236, 237, 239
Aprendizagem Matemática 9, 26, 60, 118, 119, 125, 154, 164, 167, 175, 183, 184
Aproximação de Raízes 44
Atenuação da perturbação 273
Auditoria de Contas 10, 266, 267, 271

B

Biografia 13, 91, 93, 94, 102, 103
Brincadeiras 8, 118, 120, 125, 126, 127, 150

C

Caos 10, 241, 242, 246, 251, 252
Condução de Calor 104, 105, 228
Controle Preditivo 273

D

Deficiente visual 9, 214, 215, 216, 218, 219, 221, 222, 223
Derivada compatível 254, 256, 263, 264, 265
Detecção de Fraudes 266, 267
Determinantes 9, 163, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 204
Diagramas de Vergnaud 110
Diferença de Hukuhara 254, 260
Dificuldades 5, 7, 9, 13, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 68, 70, 72, 92, 93, 121, 123, 124, 126, 138, 139, 143, 144, 145, 149, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 169, 174, 177, 183, 184, 189, 190, 199, 200, 201, 202, 214, 217, 224, 225, 227, 233
Dificuldades do Ensino 35, 36, 39, 40, 121
Dinâmica não linear 10, 241, 242

Discalculia 7, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70

Disciplina de Matemática 35, 36, 40, 216

Distribuição de Newcomb-Benford 10, 266, 270, 271

Docentes 5, 35, 36, 40, 42, 102, 120, 121, 124, 125, 127, 128, 137, 151, 154, 156, 157, 164, 167, 168, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 186, 212, 213, 216, 222, 233, 237, 238, 239

E

Educação Matemática 11, 26, 37, 58, 80, 81, 83, 92, 118, 134, 156, 161, 163, 164, 167, 203, 204, 212, 213, 223, 237, 239, 240, 282

Ensino 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 68, 69, 70, 89, 91, 92, 93, 102, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 179, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 282

Ensino-Aprendizagem 39, 43, 44, 92, 130, 132, 139, 140, 143, 144, 146, 148, 172, 185, 189, 190, 201, 212

Ensino de Matemática 9, 10, 12, 23, 25, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 91, 128, 132, 134, 140, 144, 146, 158, 162, 202, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 214, 215, 218, 222, 223, 233, 237, 282

Ensino de Química 8, 130, 131, 132, 133, 134, 137, 140, 141

Escrita de números 63, 80, 85

Estabilidade Dinâmica 273

Estágio 109, 158, 171

Estatística 71, 72, 79, 103, 166, 186, 265, 282

Estratégias 9, 164, 175

Estruturas Aditivas 8, 109, 110, 111, 116, 117

Excel 8, 46, 49, 109, 111, 112, 114, 115, 116, 117

Expoente de Lyapunov 241, 251, 253

F

Formação Continuada 80, 86, 109, 111, 167, 171, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 189, 205, 219

Formação inicial de professores de Matemática 1, 233

Funções Elípticas 91, 98, 101

G

Gauss-Seidel 104, 105, 106, 228, 229, 230, 231

GeoGebra 7, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 58

Geometria Euclidiana 7, 12, 18, 21, 24, 159, 160

Geometria Não Euclidiana 12

H

História da Matemática 12, 13, 14, 23, 24, 91, 92, 93, 96, 102, 103, 155, 217, 224, 237

I

Inclusão 5, 3, 59, 60, 67, 69, 70, 91, 102, 188, 202, 214, 215, 218, 223

Interdisciplinaridade 8, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141

Inversão de matrizes 187, 188, 190, 194, 198, 200

Investigação Matemática 9, 143, 144, 146, 147, 148, 153, 154

J

Jogos 8, 10, 25, 27, 33, 42, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 180, 184, 225, 227, 233, 234, 235, 236, 237, 238

Jogos Digitais 10, 233, 234, 235, 236, 237, 238

L

Lúdico 25, 26, 30, 41, 42, 118, 120, 122, 123, 124, 128, 129, 141

M

Matemática 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 109, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 265, 282

Método das Diferenças Finitas 104, 106, 228, 229, 230

Metodologias inovadoras de ensino 118

Métodos Numéricos 7, 44, 45, 46, 57, 58, 104, 105, 243

Modelagem de dados 71

Motivação 56, 63, 67, 88, 118, 119, 123, 134, 166, 167, 211

N

Niels Henrik Abel 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103

Números Fuzzy 254, 259

O

Outliers 71, 72

P

Perspectiva CTS 205

Perspectivas 9, 91, 92, 101, 102, 128, 156, 157, 159, 171, 180, 227, 240

Pesquisa na formação do professor de Matemática 1

Postura investigativa na formação do professor de Matemática 1

Práticas Pedagógicas 60, 65, 66, 68, 69, 81, 156, 157, 167, 183

Probabilidade 29, 30, 71, 72, 73, 78, 79, 138, 141, 257, 268

Projeto de sistemas de controle 273

R

Rastreamento de Referência 273

Recursos didáticos 8, 80, 81, 88, 89, 102, 215, 218, 223

S

Sala de recurso 59

Sistema de Numeração Decimal 80, 82, 85, 87, 88, 89, 225

Sistemas Lineares 9, 187, 188, 189, 190, 191, 200, 202, 204

T

Tecnologias da Informação e Comunicação 233, 234, 237, 282

Tendência contemporânea 205

Transtorno 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2