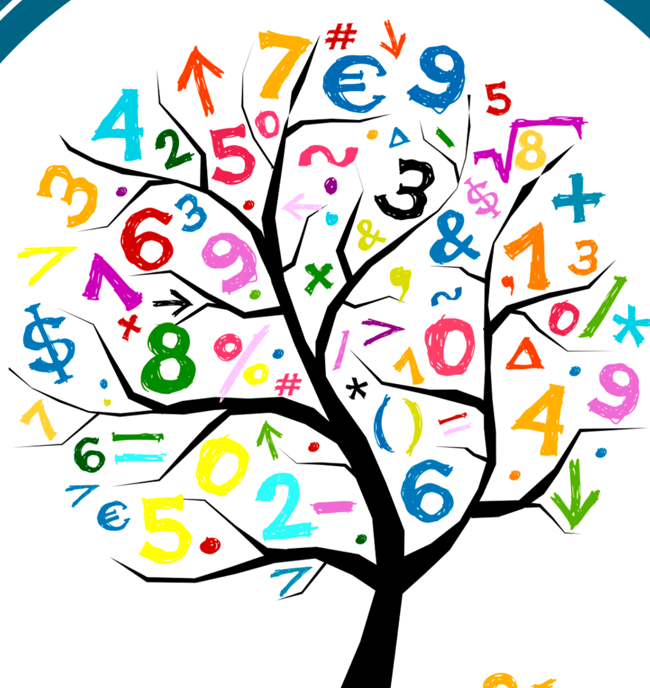
# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

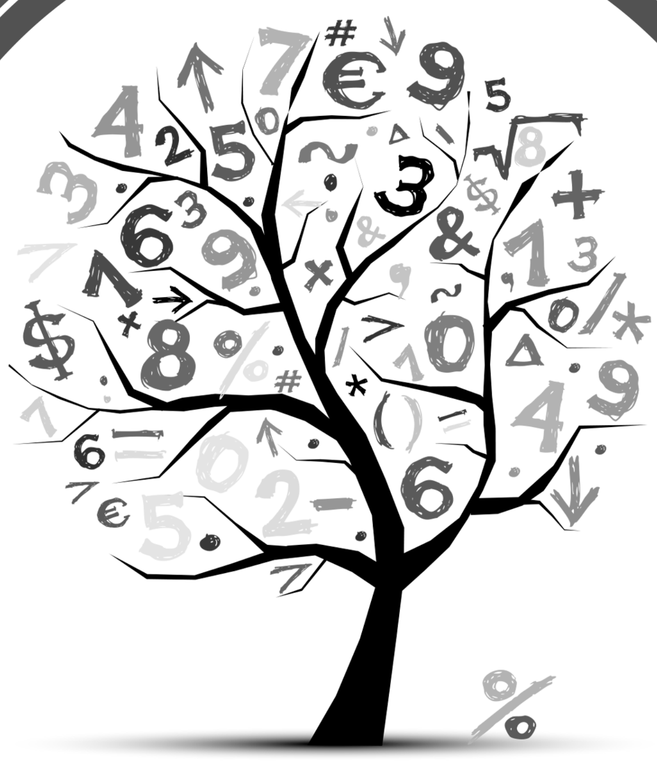

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)


Atena Editora
Ano 2020

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

**Editora Chefe**
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
**Assistentes Editoriais**
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
**Bibliotecária**
Janaina Ramos
**Projeto Gráfico e Diagramação**
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
**Imagens da Capa**
Shutterstock
**Edição de Arte**
Luiza Alves Batista
**Revisão**
Os Autores



Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2


| | |
|---|---|
| **Editora Chefe:** | Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira |
| **Bibliotecária:** | Janaina Ramos |
| **Diagramação:** | Camila Alves de Cremo |
| **Correção:** | Vanessa Mottin de Oliveira Batista |
| **Edição de Arte:** | Luiza Alves Batista |
| **Revisão:** | Os Autores |
| **Organizadores:** | Américo Junior Nunes da Silva<br>André Ricardo Lucas Vieira<br>Mirian Ferreira de Brito |

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-610-2
DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020


Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

# APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro “***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***”, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva
Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira
Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

## SUMÁRIO

# CAPÍTULO 2

# MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO

*Data de aceite: 17/11/2020*
*Data de submissão: 05/10/2020*

**Francisco Cleuton de Araújo**
Mestre em Matemática pela Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA
Mossoró – RN
http://lattes.cnpq.br/9157474657085589

O presente artigo toma como base a dissertação apresentada por este autor ao Departamento de Ciências Exatas e Naturais no Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA.

**RESUMO:** O presente trabalho tem como principal objetivo estudar alguns métodos diretos e iterativos para obter uma solução exata ou aproximada do sistema linear *Ax=b*, assim como investigar o desempenho destes métodos e o uso adequado de cada um deles. A investigação deste trabalho traz à luz métodos de solução de sistemas lineares não convencionais para o Ensino Básico. Acredito que este material irá contribuir com o estudo complementar dos professores e público em geral que tenham interesse pelo tema em estudo.
**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas Lineares, Métodos Diretos, Métodos Iterativos, Álgebra Linear.

## DIRECT AND ITERATIVE METHODS FOR SOLUTION OF THE LINEAR EQUATION SYSTEM AX = B: AN INTRODUCTORY STUDY

**ABSTRACT:** This work aims to study some direct and iterative methods for to obtain an exact or approximate solution of the linear system *Ax=b*, and investigate the performance of these methods and the proper use of each of these. The investigation of this work brings to light methods of solution of non-conventional linear systems for basic education. I believe that this will work to contribute to the further study of teachers and the general public with an interest in the subject under study.
**KEYWORDS:** Linear Systems, Direct methods, Iterative methods, Linear Algebra.

## 1 I INTRODUÇÃO

De modo geral, no Ensino Básico, os procedimentos para resolução de sistemas de equações lineares são apresentados da seguinte maneira: métodos da adição, da substituição e regra de Cramer. Deste modo, podemos incorrer no erro de pensar que só existem esses métodos, ou ainda que estes métodos sejam os melhores, mais práticos e precisos.

No presente trabalho, pretendemos expandir esses conhecimentos apresentando para isso alguns métodos diretos e iterativos para resolução destes sistemas.

Os cálculos para determinar as soluções de sistemas lineares de pequeno porte (número pequeno de equações e variáveis) são simples, manualmente encontramos os resultados desejados sem muitas dificuldades. Em contrapartida, a solução de sistemas de grande porte envolve um número muito elevado de operações. Tornando-se inviável a solução manual. Outro ponto que devemos levar em consideração é que, em sistemas de grande porte, existe uma tendência maior a erros de arredondamento e truncamento.

Podemos nos perguntar então qual a importância em estudarmos métodos para solucionar *Ax=b*. Essa necessidade se concentra no fato de que diversos fenômenos podem ser modelados por *Ax=b*.

Segundo Lamin,

> Provavelmente um dos problemas mais importantes em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações cientificas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa. (LAMIN, 2000, p. 29)

Ademais, as aplicações de sistemas lineares são inúmeras, abrangendo inclusive diversas áreas do conhecimento, como Economia, Engenharia, Estatística, Física, Ciências Sociais, Biologia, entre outras.

Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam contribuir com ensino-aprendizagem de Matemática, em particular de Sistemas Lineares.

O objetivo geral deste trabalho é estudar alguns métodos diretos e numéricos para obter a solução do sistema linear *Ax=b*. Especificamente, nos propomos a: 1) estudar quatro métodos diretos na solução de Ax=b; 2) estudar dois métodos iterativos na solução de Ax=b; 3) resolver sistemas lineares do tipo Ax=b.

## 2 | MÉTODOS DIRETOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

### 2.1 Introdução

As soluções do sistema *Ax=b* de ordem *n*, dividem-se em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

Na presente seção, vamos estudar métodos diretos, que são aqueles que nos fornecem uma solução exata após um número finito de operações aritméticas. A desvantagem desses métodos são os possíveis erros de arredondamento, que em sistemas de grande porte tornam a solução sem significado.

Em geral, nos ensinos Fundamental e Médio são estudados os métodos de adição, substituição e regra de Cramer. Os dois primeiros são eficientes em sistemas de pequeno porte (duas equações e duas variáveis).

A regra de Cramer, que recebe grande destaque, já se mostra um pouco impraticável em sistemas de ordem superior a 3. Neste método faz-se necessário para resolução de um sistema de ordem *n*, o cálculo de *n*+1 determinantes de mesma ordem e um número elevado de multiplicações e adições.

Vale lembrar que em sistemas de equações lineares de ordem *n*, com única solução, a solução de $Ax=b$ é dada por $x = A^{-1}b$, onde $A^{-1}$ é a matriz inversa de $A$. Todavia os cálculos de $A^{-1}$ e $A^{-1}b$ envolvem um número grande de operações, tornando esse processo inviável e pouco competitivo em relação a outros métodos.

## 2.2 Método de eliminação de Gauss

O processo de eliminação gaussiana consiste na transformação do sistema linear dado em um sistema triangular equivalente, após uma série de operações elementares.

**Teorema:** Seja $Ax=b$ um sistema linear. Sobre as linhas do sistema aplicamos uma série de operações que podem ser escolhidas entre:

I. trocar duas equações;

II. multiplicar uma equação por uma constante não nula;

III. adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Ao final, obtemos um novo sistema $A'x=b'$, equivalente ao sistema $Ax=b$.

O método de eliminação gaussiana utiliza o teorema acima para triangularizar a matriz $A$ supondo $det\,(A) \neq 0$.

**Exemplo 1:** Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12. \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3/2L1]{2L2-L1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3+1/18L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_2 + 3x_3 = 21 \\ -\frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

É imediato que $x_3 = -2$, $x_2 = 3$ e $x_1 = 1$

**Exemplo 2:** Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-1/2L1]{L2-2L1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 13/2 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_3 = 3 \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

De onde vem que $x_3 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_1 = 1$

## 2.3 Método de Eliminação Gauss-Jordan

A eliminação gaussiana irá produzir uma matriz na forma escalonada e o método de eliminação Gauss-Jordan produzirá uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas.

**Exemplo 3:** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

A matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3L1]{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-10L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a segunda linha por -1 para introduzirmos um líder na linha 2 coluna 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Agora multiplicando a terceira linha por -1/52 para introduzirmos um líder na linha 3 coluna 3, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz está na forma escalonada. Para obtermos a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo. Iniciando pela última linha não nula e operando para cima, somaremos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores com intuito de introduzir zeros acima dos líderes.

$$\xrightarrow{L2+5L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1-L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas. Imediatamente, temos $x_3 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.

A eliminação Gauss-Jordan envolve escrever menos e, em sistemas pequenos, pode-se argumentar ser mais eficiente que a eliminação gaussiana. Porém, para sistemas grandes o método Gauss-Jordan precisa de cerca de 50% mais operações que a eliminação gaussiana. Na próxima seção, estudaremos um outro método: a decomposição LU.

## 2.4 Método da Decomposição ou Fatoração LU

Esse método de resolução de sistemas consiste em decompor a matriz *A* em um produto da matriz triangular inferior com diagonal unitária *L* pela matriz triangular superior *U*.

Teorema: Sejam *A* uma matriz quadrada de ordem *n* e $A_k$ a matriz formada das primeiras *k* linhas e *k* colunas de *A*. Supondo $det(A_k) \neq 0$, onde $k$=1,2,...,$n$-1. Então existe única matriz triangular inferior $L = l_{ij}$, com $l_{ii}$ =1,1≤ $i \leq n$ e uma única matriz triangular superior $U = u_{ii}$ tais que $LU = A$. Ademais, $det(A_k) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$.

A demonstração deste teorema pode ser feita por indução sobre *n*. Para saber mais ver (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos usar a decomposição *LU* para resolver $Ax = b$. Desta forma, sejam o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição *LU* da matriz *A*. Temos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema pode ser obtida através da resolução dos seguintes sistemas:

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

Vale lembrar ainda que *y* é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da eliminação de Gauss.

Sejam *A*, *L* e *U* matrizes $n \times n$. Fazendo $LU = A$, temos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Existem várias formas de decompor a matriz *A* na forma *LU*. Uma dessas formas é dada pelo método de eliminação de Gauss, pois ao final deste método obtemos a matriz *U*. A matriz *L* é obtida de forma implícita, e os elementos $m_{ij}$ da matriz *L* são os números usados na eliminação por linhas $(l_i - m_{ij} l_j) \rightarrow l_i$.

Para obtermos os elementos das matrizes *L* e *U*, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \ , i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}) / \, u_{jj} \, , i > j \end{cases}$$

Por convenção, $\sum_{j=1}^{k} \equiv 0$ se $k < 1$.

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se *A* satisfaz as condições da decomposição *LU*, isto é, $det(A_k) \neq 0$; b) decompor *A* em *LU*; c) resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$.

**Exemplo 4:** Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição *LU*.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

É fácil verificar que $det(A_k) \neq 0$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$. Agora vamos decompor a matriz *A* na forma *LU*. Aplicando o método de redução por linhas na matriz A temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{21} = -1$$

$$\xrightarrow{L3-3L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{31} = 3$$

$$\xrightarrow{L3-10L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{32} = 10$$

Logo a matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}$ e a matriz $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$, isto é, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Pode ser verificado $A = LU$.

O seguinte passo é resolver o sistema $Ax = b$ isto é feito em dois passos.

Primeiro passo: considere $Ly = b$, então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, de\ onde\ vem:$$

$y_1 = 8$

$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 9$

$3y_1 + 10y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = -104.$

Segundo passo: como $Ux = y$, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -104 \end{pmatrix}, de\ onde\ segue:$$

$-52x_3 = -104 \Rightarrow x_3 = 2.$

$-x_2 + 5x_3 = 9 \Rightarrow x_2 = 1.$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 3.$

Assim, a solução do sistema é $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Na seção seguinte, trataremos do método de Cholesky. Através desse método podemos simplificar os cálculos da decomposição *LU*, para os casos em que a matriz relacionada ao sistema linear seja simétrica.

## 2.5 Método de Cholesky

A decomposição de Cholesky requer aproximadamente a metade do número de operações efetuadas na fase da eliminação da decomposição *LU*.

**Definição:** Uma matriz real simétrica *A* de ordem *n* é positiva definida quando para $A_k$, matriz formada pelas primeiras *k* linhas e *k* colunas de *A* valer: $det(A_k) > 0$, $k = 1,2,...,n$.

**Teorema:** Se *A* é simétrica, positiva definida, então *A* pode ser decomposta de forma única no produto $GG^t$, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos.

Se *A*, *G* e $G^t$ matrizes $n \times n$. Então

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{n2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \cdots & u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}, \text{onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos os elementos da matriz *G*, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

a) Para elementos diagonais de *G*:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}{}^2\right)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

b) Para elementos não diagonais de *G*:

$$\begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \ldots, n. \\ g_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk})/\, g_{jj}\,, i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Vale observar que na decomposição *LU* tínhamos $det(A) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$, já no método Cholesky temos que: $det(A) = det(G)^2 = (g_{11}\, g_{22} \ldots g_{nn})^2$, onde $A = GG^t$.

A resolução do sistema linear $Ax = b$ segue o seguinte esquema:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^t)x = b \Rightarrow \begin{cases} i)\ Gy = b \\ ii)\ G^t x = y \end{cases}$$

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se $A$ satisfaz as condições do método de Cholesky, isto é, $det(A_k) > 0$; b) decompor $A$ em $GG^t$; c) resolver o sistema $Ax = b$, onde $(b_1\, b_2 \ldots b_n)^t$

**Exemplo 5:** Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 19 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

a) Temos que: $det(A_1) = 1 > 0$, $det(A_2) = 2 > 0$, $det(A_3) = det(A) = 8 > 0$.

b) Usando as fórmulas, obtemos:

$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{1} \Rightarrow g_{11} = 1,$

$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow g_{21} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow g_{31} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{22} = (a_{22} - {g_{21}}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = (3 - 1^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{2},$

$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31} g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = \frac{-1-1.1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$

$g_{33} = (a_{33} - {g_{31}}^2 - {g_{32}}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = (7 - 1^2 - (-\sqrt{2})^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = 2.$

Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $Gy = b$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 5$

$y_1 + \sqrt{2} y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3\sqrt{2}$

$y_1 - \sqrt{2} y_2 + 2y_3 = 19 \Rightarrow y_3 = 4.$

Para $G^t x = y$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2.$

$\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -1.$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 4.$

Assim, a solução de $Ax = b$ é $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

# 3 I MÉTODOS ITERATIVOS

## 3.1 Introdução

Em paralelo aos métodos diretos para resolução de sistemas lineares, existem os métodos iterativos. A grande vantagem desses métodos é a autocorreção, diminuindo assim erros de arredondamento nas soluções oriundas de métodos diretos.

Seja o sistema linear *Ax = b*. Este sistema será transformado em um outro sistema do tipo *x = Bx + g*, onde *B* é a matriz $n \times n$ e *g* vetor $n \times 1$. A solução desse novo sistema é também solução de *Ax = b*, por se tratarem de sistemas equivalentes. Vale notar que se $\varphi(x) = Bx + g$, então o sistema *x = Bx + g* é reescrito na forma $x = \varphi(x)$. Onde $\varphi$ é chamada função de iteração.

O processo de iteração segue o seguinte esquema:

I. Começamos com uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para solução;

II. Em seguida, construímos aproximações sucessivas:

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + g = \varphi\left(x^{(0)}\right), \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + g = \varphi\left(x^{(1)}\right), \\ \vdots \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g = \varphi\left(x^{(k)}\right), k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

De modo que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$, onde $\alpha$ é solução do sistema *Ax = b*.

Contudo é importante sabermos se a sequência que estamos construindo está convergindo ou não para a solução almejada. Surge, portanto, a necessidade de se trabalhar com critérios de convergência.

Repetimos o processo iterativo até o vetor $x^{(k)}$ está suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Ademais, dados uma precisão $\mathcal{E}$ e uma distância $d^{(k)}$, com $d^{(k)} = \max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$, o vetor $x^{(k)}$ é escolhido como solução aproximada se $d^{(k)} < \mathcal{E}$. O teste de erro relativo pode ser realizado pelo seguinte cálculo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k)}\right|}.$$

## 3.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

A ideia central desse método é transformar o sistema linear $Ax = b$ no sistema equivalente $x = Bx + g$. Para isso, tendo como base o sistema original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Assumindo $a_{ij} \neq 0$, operamos da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}.$$

Assim, $x = Bx + g$, onde

$$B = \begin{bmatrix} a & -a_{12}/\,a_{11} & \cdots & -a_{1n}/\,a_{11} \\ -a_{21}/\,a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/\,a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/\,a_{nn} & -a_{n2}/\,a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dado uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(1)},\ldots, x^{(k)}$ recursivamente, pela relação $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}.$$

**Exemplo 1:** Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(5 + x_2^{(k)}\right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(-1 - x_1^{(k)}\right) = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}$$

De maneira que $x^{(k+1)} = Bx^{(k)}+g$, onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Para $k$=0, temos

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8} = -0{,}875$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8}$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = \left|-\frac{7}{8} + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{8}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{5}{7} = 0{,}714 > \varepsilon.$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para $k$=1:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-7}{8}\right) + \frac{5}{4} = \frac{33}{32} = 1{,}031$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{15}{16} = -0{,}937$$

$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 33/32 \\ -15/16 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|\frac{33}{32} - \frac{7}{8}\right| = \frac{5}{32}$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|-\frac{15}{16} + \frac{7}{8}\right| = \frac{1}{16}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{5}{33} = 0{,}151 > \varepsilon.$$

para $k$=2:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}x_2^{(2)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-15}{16}\right) + \frac{5}{4} = \frac{65}{64} = 1{,}015$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{2}x_1^{(2)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{33}{32}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{65}{64} = -1{,}015$$

$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 65/64 \\ -65/64 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = \left|\frac{65}{64} - \frac{33}{32}\right| = \frac{1}{64}$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = \left|-\frac{65}{64} + \frac{15}{16}\right| = \frac{5}{64}$$

$$d_r^{(3)} = \frac{5}{65} = 0{,}07 > \varepsilon.$$

para $k$=3:

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{4}x_2^{(3)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-65}{64}\right) + \frac{5}{4} = \frac{255}{256} = 0,996$$
$$x_2^{(4)} = -\frac{1}{2}x_1^{(3)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{65}{64}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{129}{128} = -1,007$$
$$\therefore x^{(4)} = \begin{pmatrix} 255/256 \\ -129/128 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(4)}$:

$$\left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| = \left|\frac{255}{256} - \frac{65}{64}\right| = \frac{5}{256}$$
$$\left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| = \left|-\frac{129}{128} + \frac{65}{64}\right| = \frac{1}{128}$$
$$d_r^{(4)} = \frac{5}{258} = 0,019 < \varepsilon.$$

Então, a solução do sistema linear acima, com erro menor que 0,05, obtida pelo método Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ -1,007 \end{pmatrix}.$$

O valor de $x^{(0)}$ é arbitrário.

O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para a convergência do método Gauss-Jacobi.

**Teorema (Critério das Linhas):** Sejam o sistema $Ax = b$ e $\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$. Se $\alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k < 1$, então o método Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da aproximação inicial $x^{(0)}$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos analisar o sistema linear do exemplo anterior. Temos

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} = 0,25 < 1;\ \alpha_2 = \frac{1}{5} = 0,5 < 1;$$

logo, $\max_{1\leq k\leq 2} \alpha_k = 0,5 < 1$ e, portanto, pelo critério das linhas está garantida a convergência para o método Gauss-Jacobi.

Na seção seguinte, vamos tratar do método Gauss-Seidel. Este método também consiste em transformar $Ax = b$ em um sistema equivalente $x = Bx + g$, mediante separação da diagonal.

## 3.3 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(0)}$, $x^{(1)}$,..., $x^{(k)}$,... por

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Portanto, o método Gauss-Seidel utiliza os valores mais atualizados para o cálculo de $x^{(k+1)}$.

**Exemplo 2:** Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel, dados $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \tfrac{1}{5}\left(3 - 2.x_2^{(k)} - 2.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(k)} + \tfrac{3}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = \tfrac{1}{3}\left(-4 - 1.x_1^{(k+1)} - 1.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(k)} - \tfrac{4}{3}$$

$$x_3^{(k+1)} = \tfrac{1}{8}\left(-4 - 0.x_1^{(k+1)} - 6.x_2^{(k+1)}\right) = -\tfrac{3}{4}x_2^{(k+1)} - \tfrac{1}{2}$$

Para $k$=0:

$$x_1^{(1)} = -\tfrac{2}{5}x_2^{(0)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(0)} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{5} = 0{,}6$$

$$x_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3}x_1^{(1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(0)} - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{23}{15} = -1{,}533$$

$$x_3^{(1)} = -\tfrac{3}{4}x_2^{(1)} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{13}{20} = 0{,}65$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}533 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}6 - 0| = 0{,}6$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}533 - 0| = 1{,}533$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0{,}65 - 0| = 0{,}65$$

$$d_r^{(1)} = \tfrac{1{,}533}{1{,}533} = 1 > \varepsilon.$$

Para $k$=1:

$$x_1^{(2)} = -\frac{2}{5}x_2^{(1)} - \frac{2}{5}x_3^{(1)} + \frac{3}{5} = \frac{143}{150} = 0{,}953$$
$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}x_1^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} - \frac{4}{3} = -1{,}866$$
$$x_3^{(2)} = -\frac{3}{4}x_2^{(2)} - \frac{1}{2} = 0{,}899$$
$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}953 \\ -1{,}866 \\ 0{,}899 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0{,}953 - 0{,}6| = 0{,}353$$
$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1{,}866 + 1{,}533| = 0{,}333$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0{,}899 - 0{,}65| = 0{,}249$$
$$d_r^{(2)} = \frac{0{,}353}{1{,}866} = 0{,}189 > \varepsilon.$$

Para : $k$=2

$$x_1^{(3)} = -\frac{2}{5}x_2^{(2)} - \frac{2}{5}x_3^{(2)} + \frac{3}{5} = -0{,}4.(-1{,}866) - 0{,}4.0{,}899 + 0{,}6 = 0{,}986$$
$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{3}x_1^{3} - \frac{1}{3}x_3^{(2)} - \frac{4}{3} = -0{,}333.0{,}986 - 0{,}333.0{,}899 - 1{,}333 = -1{,}961$$
$$x_3^{(3)} = -\frac{3}{4}x_2^{(3)} - \frac{1}{2} = -0{,}75.(-1{,}961) - 0{,}5 = 0{,}971$$
$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}986 \\ -1{,}961 \\ 0{,}971 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0{,}986 - 0{,}953| = 0{,}033$$
$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1{,}961 + 1{,}866| = 0{,}095$$
$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0{,}971 - 0{,}899| = 0{,}072$$
$$d_r^{(3)} = \frac{0{,}095}{1{,}961} = 0{,}048 < \varepsilon.$$

Portanto, a solução $\bar{x}$ do sistema linear com erro menor que $\mathcal{E}$, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}986 \\ -1{,}961 \\ 0{,}971 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora analisar nossa solução, obtida pelo método Gauss-Seidel, a partir de um outro critério de convergência: o critério de Sassenfeld.

Critério de Sassenfeld:

Sejam $\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_2 = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j2}|\beta_2+\cdots+|a_{jj-1}|\beta_{j-1}+|a_{jj+1}|+\cdots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}$.

Se $\beta = \underset{1\leq j\leq n}{máx} \{\beta_j\} < 1$, então o método Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$.

Analisando o exemplo anterior pelo critério de Sassenfeld, temos

$\beta_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8 < 1$

$\beta_2 = \frac{1\times\frac{4}{5}+1}{3} = \frac{3}{5} = 0{,}6 < 1$

$\beta_3 = \frac{0\times\frac{4}{5}+6\times\frac{3}{5}}{8} = \frac{9}{20} = 0{,}45 < 1$

Logo, $\underset{1\leq j\leq 3}{máx}\ \beta_j = 0{,}8 < 1$ e pelo critério de Sassenfeld está garantida a convergência para o método Gauss-Seidel.

Vale observar que o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja. Também podemos permutar linhas e/ou colunas afim de obtermos uma nova disposição que satisfaça esses critérios de convergência.

Um outro critério importante de convergência é o teste para verificar se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Definição: Uma matriz  estritamente diagonalmente dominante se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Analisando por esse critério o sistema linear anterior, temos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}, \text{onde } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$|a_{12}| + |a_{13}| = |2| + |2| < |5| = |a_{11}|,$

$|a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |1| < |3| = |a_{22}|,$

$|a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |6| < |8| = |a_{33}|.$

Logo, podemos garantir que os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel são ambos convergentes para o sistema dado.

## 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para além do que é geralmente estudado no Ensino Básico, buscamos expor alternativas para resolução do problema de resolver *Ax = b*. Com intuito de oferecer uma visão mais ampliada ao professor de Matemática do ensino básico que tenha o desejo de se aprofundar no tema.

Em nossa pesquisa, propomos estudar quatro métodos diretos e dois métodos iterativos. Pretendeu-se com isso solucionar *Ax = b* e traçar um paralelo entre essas diversas formas de abordar a questão. Comparamos alguns métodos e destacamos o uso adequado de cada um deles, tendo em vista a redução de cálculos e a precisão da solução.

A necessidade de estudar tal problemática surge do fato de que diversos problemas em distintas áreas do conhecimento podem ser modelados por sistemas lineares. Deste modo, a relevância do tema nos motivou a pesquisar sobre o assunto.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa pode servir como introdução para um estudo mais aprofundado sobre a resolução de sistemas lineares.


## AGRADECIMENTOS

Ao professor Santos Demetrio, pelo apoio e pelas valiosas sugestões ao trabalho. Aos professores do curso de Mestrado em Matemática – PROFMAT/UFERSA, pela contribuição teórica. Ao coordenador do curso Ronaldo Garcia, pelo apoio e incentivo.


## REFERÊNCIAS


HEFEZ, A; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOWARD, A; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LAMIN, M. R. N. **Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares**. Monografia (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

PULINO, P. **Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula**. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/ > Acesso em: 20 jan. 2016

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

STRANG, G. Á**lgebra Linear e suas aplicações**. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

# ÍNDICE REMISSIVO

## S



## T



## U

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020