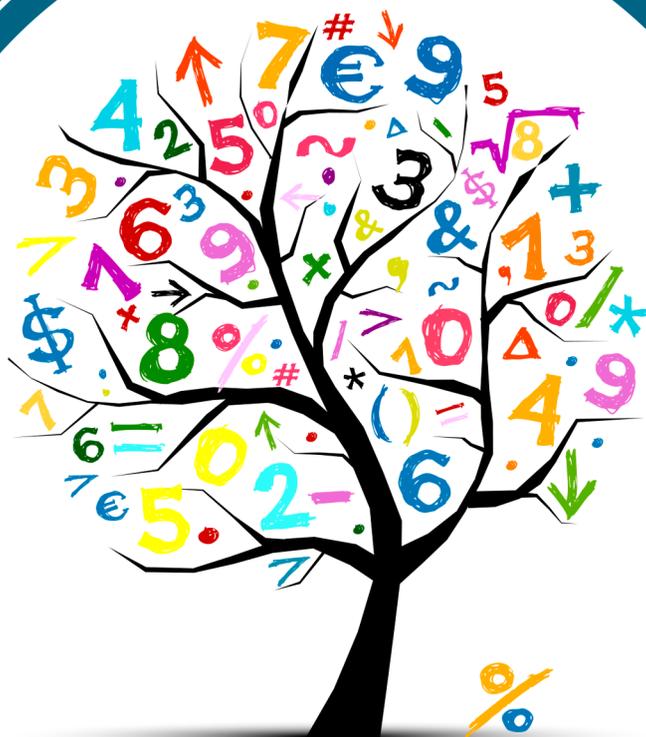


# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

## 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA  
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA  
MIRIAN FERREIRA DE BRITO  
(ORGANIZADORES)



# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

## 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA  
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA  
MIRIAN FERREIRA DE BRITO  
(ORGANIZADORES)



Atena  
Editora

Ano 2020

**Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

**Bibliotecária**

Janaina Ramos

**Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

**Imagens da Capa**

Shutterstock

**Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

**Revisão**

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

**Conselho Editorial**

**Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Dr. Adailson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliariari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás

Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecária:** Janaina Ramos  
**Diagramação:** Camila Alves de Cremo  
**Correção:** Vanessa Mottin de Oliveira Batista  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizadores:** Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Lucas Vieira  
Mirian Ferreira de Brito

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

162      Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-610-2

DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

**Atena Editora**

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

## APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro ***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
MATHEMATICAL MODELING AND BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TURBULENT FLOW IN INCOMPRESSIBLE NEWTONIAN FLUIDS AROUND ISOTHERMAL GEOMETRIES	
Rômulo Damasclin Chaves dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010121</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>19</b>
MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$ : UM ESTUDO INTRODUTÓRIO	
Francisco Cleuton de Araújo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010122</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>35</b>
DIMENSÕES EM $\mathbb{Z}$ AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA	
Carla Maldonado Ivankovic	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010123</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>50</b>
SÉRIES INFINITAS	
Jesus Carlos da Mota	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010124</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>65</b>
ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO	
Hislley Feitosa Meneses	
Valtercio de Almeida Carvalho	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010125</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>81</b>
O PERCURSO PROFISSIONAL DE MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO E A GEOMETRIA DIFERENCIAL NO BRASIL	
Antonio José Melo de Queiroz	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010126</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>90</b>
PROCESO COORDINADO DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	
María Teresa Costado Dios	
José Carlos Piñero Charlo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.1022010127</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>100</b>
A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA DE ÁREA E PERÍMETRO	

## **DAS FIGURAS PLANAS**

Selma de Nazaré Vilhena Machado  
Alessandra Maués Quaresma  
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa  
Crislaine Pereira Antunes  
Eldon Ricardo Souza Pereira  
Eusom Passos Lima  
Gilvan de Souza Marques  
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro  
Karoline de Sarges Fonseca  
Mayanna Cayres Oliveira  
Mauro Sérgio Santos de Oliveira  
Simeí Barbosa Paes

**DOI 10.22533/at.ed.1022010128**

## **CAPÍTULO 9.....113**

### **A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS DE APRENDIZAGEM POR ALUNOS DO ENSINO ELEMENTAR**

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes  
Maria Isabel Piteira do Vale

**DOI 10.22533/at.ed.1022010129**

## **CAPÍTULO 10..... 130**

### **O USO DE JOGOS E DINÂMICAS EM GRUPO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES NA PRÁTICA NO PRIMEIRO ESTÁGIO**

Leonardo Pospichil Lima Neto  
Lisandro Bitencourt Machado

**DOI 10.22533/at.ed.10220101210**

## **CAPÍTULO 11 ..... 139**

### **ENTENDIMENTOS DE PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O USO [OU NÃO] DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**

Renaura Matos de Souza  
Ilvanete dos Santos de Souza  
Américo Junior Nunes da Silva

**DOI 10.22533/at.ed.10220101211**

## **CAPÍTULO 12..... 154**

### **CURRÍCULO E FORMAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DOCÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: O DESAFIO DOS ANOS INICIAIS**

Julio Robson Azevedo Gambarra

**DOI 10.22533/at.ed.10220101212**

## **CAPÍTULO 13..... 167**

### **PERFIL DE UNIÃO DAS TURMAS DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DA UFAL CAMPUS ARAPIRACA**

Allanny Karla Barbosa Vasconcelos

Gilmar dos Santos Batista  
Karollayne Stefanny de Farias Holanda  
DOI 10.22533/at.ed.10220101213

<b>SOBRE OS ORGANIZADORES .....</b>	<b>175</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO.....</b>	<b>177</b>

# CAPÍTULO 2

## MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$ : UM ESTUDO INTRODUTÓRIO

Data de aceite: 17/11/2020

Data de submissão: 05/10/2020

**Francisco Cleuton de Araújo**

Mestre em Matemática pela Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA Mossoró – RN  
<http://lattes.cnpq.br/9157474657085589>

O presente artigo toma como base a dissertação apresentada por este autor ao Departamento de Ciências Exatas e Naturais no Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA.

**RESUMO:** O presente trabalho tem como principal objetivo estudar alguns métodos diretos e iterativos para obter uma solução exata ou aproximada do sistema linear  $Ax=b$ , assim como investigar o desempenho destes métodos e o uso adequado de cada um deles. A investigação deste trabalho traz à luz métodos de solução de sistemas lineares não convencionais para o Ensino Básico. Acredito que este material irá contribuir com o estudo complementar dos professores e público em geral que tenham interesse pelo tema em estudo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas Lineares, Métodos Diretos, Métodos Iterativos, Álgebra Linear.

### DIRECT AND ITERATIVE METHODS FOR SOLUTION OF THE LINEAR EQUATION SYSTEM $AX = B$ : AN INTRODUCTORY STUDY

**ABSTRACT:** This work aims to study some direct and iterative methods for to obtain an exact or approximate solution of the linear system  $Ax=b$ , and investigate the performance of these methods and the proper use of each of these. The investigation of this work brings to light methods of solution of non-conventional linear systems for basic education. I believe that this will work to contribute to the further study of teachers and the general public with an interest in the subject under study.

**KEYWORDS:** Linear Systems, Direct methods, Iterative methods, Linear Algebra.

## 1 | INTRODUÇÃO

De modo geral, no Ensino Básico, os procedimentos para resolução de sistemas de equações lineares são apresentados da seguinte maneira: métodos da adição, da substituição e regra de Cramer. Deste modo, podemos incorrer no erro de pensar que só existem esses métodos, ou ainda que estes métodos sejam os melhores, mais práticos e precisos.

No presente trabalho, pretendemos expandir esses conhecimentos apresentando para isso alguns métodos diretos e iterativos para resolução destes sistemas.

Os cálculos para determinar as soluções de sistemas lineares de pequeno porte (número

pequeno de equações e variáveis) são simples, manualmente encontramos os resultados desejados sem muitas dificuldades. Em contrapartida, a solução de sistemas de grande porte envolve um número muito elevado de operações. Tornando-se inviável a solução manual. Outro ponto que devemos levar em consideração é que, em sistemas de grande porte, existe uma tendência maior a erros de arredondamento e truncamento.

Podemos nos perguntar então qual a importância em estudarmos métodos para solucionar  $Ax=b$ . Essa necessidade se concentra no fato de que diversos fenômenos podem ser modelados por  $Ax=b$ .

Segundo Lamin,

Provavelmente um dos problemas mais importantes em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa. (LAMIN, 2000, p. 29)

Ademais, as aplicações de sistemas lineares são inúmeras, abrangendo inclusive diversas áreas do conhecimento, como Economia, Engenharia, Estatística, Física, Ciências Sociais, Biologia, entre outras.

Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam contribuir com ensino-aprendizagem de Matemática, em particular de Sistemas Lineares.

O objetivo geral deste trabalho é estudar alguns métodos diretos e numéricos para obter a solução do sistema linear  $Ax=b$ . Especificamente, nos propomos a: 1) estudar quatro métodos diretos na solução de  $Ax=b$ ; 2) estudar dois métodos iterativos na solução de  $Ax=b$ ; 3) resolver sistemas lineares do tipo  $Ax=b$ .

## 2 | MÉTODOS DIRETOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

### 2.1 Introdução

As soluções do sistema  $Ax=b$  de ordem  $n$ , dividem-se em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

Na presente seção, vamos estudar métodos diretos, que são aqueles que nos fornecem uma solução exata após um número finito de operações aritméticas. A desvantagem desses métodos são os possíveis erros de arredondamento, que em sistemas de grande porte tornam a solução sem significado.

Em geral, nos ensinamentos Fundamental e Médio são estudados os métodos de adição, substituição e regra de Cramer. Os dois primeiros são eficientes em sistemas de pequeno porte (duas equações e duas variáveis).

A regra de Cramer, que recebe grande destaque, já se mostra um pouco impraticável em sistemas de ordem superior a 3. Neste método faz-se necessário

para resolução de um sistema de ordem  $n$ , o cálculo de  $n+1$  determinantes de mesma ordem e um número elevado de multiplicações e adições.

Vale lembrar que em sistemas de equações lineares de ordem  $n$ , com única solução, a solução de  $Ax=b$  é dada por  $x = A^{-1}b$ , onde  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ . Todavia os cálculos de  $A^{-1}$  e  $A^{-1}b$  envolvem um número grande de operações, tornando esse processo inviável e pouco competitivo em relação a outros métodos.

## 2.2 Método de eliminação de Gauss

O processo de eliminação gaussiana consiste na transformação do sistema linear dado em um sistema triangular equivalente, após uma série de operações elementares.

**Teorema:** Seja  $Ax=b$  um sistema linear. Sobre as linhas do sistema aplicamos uma série de operações que podem ser escolhidas entre:

- I. trocar duas equações;
- II. multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- III. adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Ao final, obtemos um novo sistema  $A'x=b'$ , equivalente ao sistema  $Ax=b$ .

O método de eliminação gaussiana utiliza o teorema acima para triangularizar a matriz  $A$  supondo  $\det(A) \neq 0$ .

**Exemplo 1:** Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12. \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2L2-L1 \\ L3-3/2L1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3+1/18L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_2 + 3x_3 = 21 \\ -\frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

É imediato que  $x_3 = -2$ ,  $x_2 = 3$  e  $x_1 = 1$

**Exemplo 2:** Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L2-2L1 \\ L3-1/2L1}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 13/2 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_3 = 3 \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

De onde vem que  $x_3 = -1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_1 = 1$

### 2.3 Método de Eliminação Gauss-Jordan

A eliminação gaussiana irá produzir uma matriz na forma escalonada e o método de eliminação Gauss-Jordan produzirá uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas.

**Exemplo 3:** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

A matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L2+L1 \\ L3-3L1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-10L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por -1 para introduzirmos um líder na linha 2 coluna 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

Agora multiplicando a terceira linha por -1/52 para introduzirmos um líder na linha 3 coluna 3, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada. Para obtermos a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo. Iniciando pela última linha não nula e operando para cima, somaremos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores com intuito de introduzir zeros acima dos líderes.

$$\xrightarrow{L2+5L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1-L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas. Imediatamente, temos  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_1 = 3$ .

A eliminação Gauss-Jordan envolve escrever menos e, em sistemas pequenos, pode-se argumentar ser mais eficiente que a eliminação gaussiana. Porém, para sistemas grandes o método Gauss-Jordan precisa de cerca de 50% mais operações que a eliminação gaussiana. Na próxima seção, estudaremos um outro método: a decomposição LU.

## 2.4 Método da Decomposição ou Fatoração LU

Esse método de resolução de sistemas consiste em decompor a matriz  $A$  em um produto da matriz triangular inferior com diagonal unitária  $L$  pela matriz triangular superior  $U$ .

Teorema: Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $A_k$  a matriz formada das primeiras  $k$  linhas e  $k$  colunas de  $A$ . Supondo  $\det(A_k) \neq 0$ , onde  $k=1,2,\dots,n-1$ . Então existe única matriz triangular inferior  $L = l_{ij}$ , com  $l_{ii}=1, 1 \leq i \leq n$  e uma única matriz triangular superior  $U = u_{ij}$  tais que  $LU = A$ . Ademais,  $\det(A_k) = u_{11} u_{22} \dots u_{kk}$ .

A demonstração deste teorema pode ser feita por indução sobre  $n$ . Para saber mais ver (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos usar a decomposição  $LU$  para resolver  $Ax = b$ . Desta forma, sejam o sistema linear  $Ax = b$  e a decomposição  $LU$  da matriz  $A$ . Temos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Seja  $y = Ux$ . A solução do sistema pode ser obtida através da resolução dos seguintes sistemas:

i)  $Ly = b$

ii)  $Ux = y$

Vale lembrar ainda que  $y$  é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da eliminação de Gauss.

Sejam  $A$ ,  $L$  e  $U$  matrizes  $n \times n$ . Fazendo  $LU = A$ , temos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Existem várias formas de decompor a matriz  $A$  na forma  $LU$ . Uma dessas formas é dada pelo método de eliminação de Gauss, pois ao final deste método obtemos a matriz  $U$ . A matriz  $L$  é obtida de forma implícita, e os elementos  $m_{ij}$  da matriz  $L$  são os números usados na eliminação por linhas  $(l_i - m_{ij} l_j) \rightarrow l_i$ .

Para obtermos os elementos das matrizes  $L$  e  $U$ , podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}, i > j \end{cases}$$

Por convenção,  $\sum_{j=1}^k \equiv 0$  se  $k < 1$ .

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

- a) Verificar se  $A$  satisfaz as condições da decomposição  $LU$ , isto é,  $\det(A_k) \neq 0$ ; b) decompor  $A$  em  $LU$ ; c) resolver o sistema  $Ax = b$ , onde  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ .

**Exemplo 4:** Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição  $LU$ .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

É fácil verificar que  $\det(A_k) \neq 0$  onde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ . Agora vamos decompor a matriz  $A$  na forma  $LU$ . Aplicando o método de redução por linhas na matriz  $A$  temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ onde } m_{21} = -1$$

$$\xrightarrow{L3-3L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}, \text{ onde } m_{31} = 3$$

$$\xrightarrow{L3-10L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}, \text{ onde } m_{32} = 10$$

Logo a matriz  $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}$  e a matriz  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$ , isto é,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode ser verificado  $A = LU$ .

O seguinte passo é resolver o sistema  $Ax = b$  isto é feito em dois passos.

Primeiro passo: considere  $Ly = b$ , então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ de onde vem:}$$

$$y_1 = 8$$

$$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 9$$

$$3y_1 + 10y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = -104.$$

Segundo passo: como  $Ux = y$ , temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -104 \end{pmatrix}, \text{ de onde segue:}$$

$$-52x_3 = -104 \Rightarrow x_3 = 2.$$

$$-x_2 + 5x_3 = 9 \Rightarrow x_2 = 1.$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Assim, a solução do sistema é  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Na seção seguinte, trataremos do método de Cholesky. Através desse método podemos simplificar os cálculos da decomposição  $LU$ , para os casos em que a matriz relacionada ao sistema linear seja simétrica.

## 2.5 Método de Cholesky

A decomposição de Cholesky requer aproximadamente a metade do número de operações efetuadas na fase da eliminação da decomposição  $LU$ .

**Definição:** Uma matriz real simétrica  $A$  de ordem  $n$  é positiva definida quando para  $A_k$ , matriz formada pelas primeiras  $k$  linhas e  $k$  colunas de  $A$  valer:  $\det(A_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema:** Se  $A$  é simétrica, positiva definida, então  $A$  pode ser decomposta de forma única no produto  $GG^t$ , onde  $G$  é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos.

Se  $A$ ,  $G$  e  $G^t$  matrizes  $n \times n$ . Então

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \dots & g_{n2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos os elementos da matriz  $G$ , podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

a) Para elementos diagonais de  $G$ :

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

b) Para elementos não diagonais de  $G$ :

$$\begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \dots, n. \\ g_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}) / g_{jj}, i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Vale observar que na decomposição  $LU$  tínhamos  $\det(A) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$ , já no método Cholesky temos que:  $\det(A) = \det(G)^2 = (g_{11} g_{22} \dots g_{nn})^2$ , onde  $A = GG^t$ .

A resolução do sistema linear  $Ax = b$  segue o seguinte esquema:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^t)x = b \Rightarrow \begin{cases} i) Gy = b \\ ii) G^t x = y \end{cases}$$

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

- a) Verificar se  $A$  satisfaz as condições do método de Cholesky, isto é,  $\det(A_k) > 0$ ; b) decompor  $A$  em  $GG^t$ ; c) resolver o sistema  $Ax = b$ , onde  $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^t$

**Exemplo 5:** Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 19 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

- a) Temos que:  $\det(A_1) = 1 > 0$ ,  $\det(A_2) = 2 > 0$ ,  $\det(A_3) = \det(A) = 8 > 0$ .

- b) Usando as fórmulas, obtemos:

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{1} \Rightarrow g_{11} = 1,$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow g_{21} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow g_{31} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$g_{22} = (a_{22} - g_{21}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = (3 - 1^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{2},$$

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = \frac{-1 - 1 \cdot 1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$g_{33} = (a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = (7 - 1^2 - (-\sqrt{2})^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = 2.$$

Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- c) Para  $Gy = b$ , temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 5$$

$$y_1 + \sqrt{2}y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3\sqrt{2}$$

$$y_1 - \sqrt{2}y_2 + 2y_3 = 19 \Rightarrow y_3 = 4.$$

Para  $G^t x = y$ , temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2.$$

$$\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -1.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 4.$$

Assim, a solução de  $Ax = b$  é  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

### 3 | MÉTODOS ITERATIVOS

#### 3.1 Introdução

Em paralelo aos métodos diretos para resolução de sistemas lineares, existem os métodos iterativos. A grande vantagem desses métodos é a autocorreção, diminuindo assim erros de arredondamento nas soluções oriundas de métodos diretos.

Seja o sistema linear  $Ax = b$ . Este sistema será transformado em um outro sistema do tipo  $x = Bx + g$ , onde  $B$  é a matriz  $n \times n$  e  $g$  vetor  $n \times 1$ . A solução desse novo sistema é também solução de  $Ax = b$ , por se tratarem de sistemas equivalentes. Vale notar que se  $\varphi(x) = Bx + g$ , então o sistema  $x = Bx + g$  é reescrito na forma  $x = \varphi(x)$ . Onde  $\varphi$  é chamada função de iteração.

O processo de iteração segue o seguinte esquema:

- I. Começamos com uma aproximação inicial  $x^{(0)}$  para solução;
- II. Em seguida, construímos aproximações sucessivas:

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)}), \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)}), \\ \vdots \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g = \varphi(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

De modo que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$ , onde  $\alpha$  é solução do sistema  $Ax = b$ .

Contudo é importante sabermos se a sequência que estamos construindo está convergindo ou não para a solução almejada. Surge, portanto, a necessidade de se trabalhar com critérios de convergência.

Repetimos o processo iterativo até o vetor  $x^{(k)}$  está suficientemente próximo do vetor  $x^{(k-1)}$ .

Ademais, dados uma precisão  $\mathcal{E}$  e uma distância  $d^{(k)}$ , com  $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ , o vetor  $x^{(k)}$  é escolhido como solução aproximada se  $d^{(k)} < \mathcal{E}$ . O teste de erro relativo pode ser realizado pelo seguinte cálculo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

### 3.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

A ideia central desse método é transformar o sistema linear  $Ax = b$  no sistema equivalente  $x = Bx + g$ . Para isso, tendo como base o sistema original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Assumindo  $a_{jj} \neq 0$ , operamos da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}.$$

Assim,  $x = Bx + g$ , onde

$$B = \begin{bmatrix} a & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} e g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dado uma aproximação inicial  $x^{(0)}$ , calculamos  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  recursivamente, pela relação  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}.$$

**Exemplo 1:** Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$  e  $\varepsilon = 0,05$ .

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(5 + x_2^{(k)}) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-1 - x_1^{(k)}) = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}$$

De maneira que  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ , onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} e g = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Para  $k=0$ , temos

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8} = -0,875$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(1)}$ :

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = \left| \frac{7}{8} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{8}$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = \left| -\frac{7}{8} + \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{8}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{5}{7} = 0,714 > \varepsilon.$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para  $k=1$ :

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-7}{8}\right) + \frac{5}{4} = \frac{33}{32} = 1,031$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{15}{16} = -0,937$$

$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 33/32 \\ -15/16 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(2)}$ :

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = \left| \frac{33}{32} - \frac{7}{8} \right| = \frac{5}{32}$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = \left| -\frac{15}{16} + \frac{7}{8} \right| = \frac{1}{16}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{5}{33} = 0,151 > \varepsilon.$$

para  $k=2$ :

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}x_2^{(2)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-15}{16}\right) + \frac{5}{4} = \frac{65}{64} = 1,015$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{2}x_1^{(2)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{33}{32}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{65}{64} = -1,015$$

$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 65/64 \\ -65/64 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(3)}$ :

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = \left| \frac{65}{64} - \frac{33}{32} \right| = \frac{1}{64}$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = \left| -\frac{65}{64} + \frac{15}{16} \right| = \frac{5}{64}$$

$$d_r^{(3)} = \frac{5}{65} = 0,07 > \varepsilon.$$

para  $k=3$ :

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{4}x_2^{(3)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-65}{64}\right) + \frac{5}{4} = \frac{255}{256} = 0,996$$

$$x_2^{(4)} = -\frac{1}{2}x_1^{(3)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{65}{64}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{129}{128} = -1,007$$

$$\therefore x^{(4)} = \begin{pmatrix} 255/256 \\ -129/128 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(4)}$ :

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = \left| \frac{255}{256} - \frac{65}{64} \right| = \frac{5}{256}$$

$$|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = \left| -\frac{129}{128} + \frac{65}{64} \right| = \frac{1}{128}$$

$$d_r^{(4)} = \frac{5}{258} = 0,019 < \varepsilon.$$

Então, a solução do sistema linear acima, com erro menor que 0,05, obtida pelo método Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ -1,007 \end{pmatrix}.$$

O valor de  $x^{(0)}$  é arbitrário.

O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para a convergência do método Gauss-Jacobi.

**Teorema (Critério das Linhas):** Sejam o sistema  $Ax = b$  e  $\alpha_k = \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$ .

Se  $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$ , então o método Gauss-Jacobi gera uma sequência  $\{x^{(k)}\}$  convergente para a solução do sistema dado, independentemente da aproximação inicial  $x^{(0)}$ .

A demonstração desse teorema pode ser vista em (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos analisar o sistema linear do exemplo anterior. Temos

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} = 0,25 < 1; \alpha_2 = \frac{1}{5} = 0,5 < 1;$$

logo,  $\max_{1 \leq k \leq 2} \alpha_k = 0,5 < 1$  e, portanto, pelo critério das linhas está garantida a convergência para o método Gauss-Jacobi.

Na seção seguinte, vamos tratar do método Gauss-Seidel. Este método também consiste em transformar  $Ax = b$  em um sistema equivalente  $x = Bx + g$ , mediante separação da diagonal.

### 3.3 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial  $x^{(0)}$ , calculamos  $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$ , ...,  $x^{(k)}$ , ... por

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Portanto, o método Gauss-Seidel utiliza os valores mais atualizados para o cálculo de  $x^{(k+1)}$ .

**Exemplo 2:** Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

pele método de Gauss-Seidel, dados  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\varepsilon = 0,05$ .

O processo iterativo é

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(3 - 2x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{3}{5} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(-4 - 1x_1^{(k+1)} - 1x_3^{(k)}) = -\frac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{4}{3} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{8}(-4 - 0x_1^{(k+1)} - 6x_2^{(k+1)}) = -\frac{3}{4}x_2^{(k+1)} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para  $k=0$ :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{2}{5}x_2^{(0)} - \frac{2}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0,6 \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} - \frac{4}{3} = -\frac{23}{15} = -1,533 \\ x_3^{(1)} &= -\frac{3}{4}x_2^{(1)} - \frac{1}{2} = \frac{13}{20} = 0,65 \\ \therefore x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0,6 \\ -1,533 \\ 0,65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculando  $d_r^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| &= |0,6 - 0| = 0,6 \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| &= |-1,533 - 0| = 1,533 \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| &= |0,65 - 0| = 0,65 \\ d_r^{(1)} &= \frac{1,533}{1,533} = 1 > \varepsilon. \end{aligned}$$

Para  $k=1$ :

$$x_1^{(2)} = -\frac{2}{5}x_2^{(1)} - \frac{2}{5}x_3^{(1)} + \frac{3}{5} = \frac{143}{150} = 0,953$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}x_1^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} - \frac{4}{3} = -1,866$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{3}{4}x_2^{(2)} - \frac{1}{2} = 0,899$$

$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,953 \\ -1,866 \\ 0,899 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(2)}$ :

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |0,953 - 0,6| = 0,353$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |-1,866 + 1,533| = 0,333$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |0,899 - 0,65| = 0,249$$

$$d_r^{(2)} = \frac{0,353}{1,866} = 0,189 > \varepsilon.$$

Para  $k=2$

$$x_1^{(3)} = -\frac{2}{5}x_2^{(2)} - \frac{2}{5}x_3^{(2)} + \frac{3}{5} = -0,4 \cdot (-1,866) - 0,4 \cdot 0,899 + 0,6 = 0,986$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{3}x_1^{(3)} - \frac{1}{3}x_3^{(2)} - \frac{4}{3} = -0,333 \cdot 0,986 - 0,333 \cdot 0,899 - 1,333 = -1,961$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{3}{4}x_2^{(3)} - \frac{1}{2} = -0,75 \cdot (-1,961) - 0,5 = 0,971$$

$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,986 \\ -1,961 \\ 0,971 \end{pmatrix}$$

Calculando  $d_r^{(3)}$ :

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |0,986 - 0,953| = 0,033$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1,961 + 1,866| = 0,095$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |0,971 - 0,899| = 0,072$$

$$d_r^{(3)} = \frac{0,095}{1,961} = 0,048 < \varepsilon.$$

Portanto, a solução  $\bar{x}$  do sistema linear com erro menor que  $\varepsilon$ , é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,986 \\ -1,961 \\ 0,971 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora analisar nossa solução, obtida pelo método Gauss-Seidel, a partir de um outro critério de convergência: o critério de Sassenfeld.

Critério de Sassenfeld:

$$\text{Sejam } \beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \text{ e } \beta_2 = \frac{|a_{j1}| \beta_1 + |a_{j2}| \beta_2 + \dots + |a_{j,j-1}| \beta_{j-1} + |a_{j,j+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}.$$

Se  $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\} < 1$ , então o método Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja  $x^{(0)}$ .

Analisando o exemplo anterior pelo critério de Sassenfeld, temos

$$\beta_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{1 \times \frac{4}{5} + 1}{3} = \frac{3}{5} = 0,6 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{0 \times \frac{4}{5} + 6 \times \frac{3}{5}}{8} = \frac{9}{20} = 0,45 < 1$$

Logo,  $\max_{1 \leq j \leq 3} \beta_j = 0,8 < 1$  e pelo critério de Sassenfeld está garantida a convergência para o método Gauss-Seidel.

Vale observar que o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja. Também podemos permutar linhas e/ou colunas afim de obtermos uma nova disposição que satisfaça esses critérios de convergência.

Um outro critério importante de convergência é o teste para verificar se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Definição: Uma matriz estritamente diagonalmente dominante se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Analisando por esse critério o sistema linear anterior, temos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$|a_{12}| + |a_{13}| = |2| + |2| < |5| = |a_{11}|,$$

$$|a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |1| < |3| = |a_{22}|,$$

$$|a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |6| < |8| = |a_{33}|.$$

Logo, podemos garantir que os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel são ambos convergentes para o sistema dado.

## 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para além do que é geralmente estudado no Ensino Básico, buscamos expor alternativas para resolução do problema de resolver  $Ax = b$ . Com intuito de oferecer uma visão mais ampliada ao professor de Matemática do ensino básico que tenha o desejo de se aprofundar no tema.

Em nossa pesquisa, propomos estudar quatro métodos diretos e dois métodos iterativos. Pretendeu-se com isso solucionar  $Ax = b$  e traçar um paralelo entre essas diversas formas de abordar a questão. Comparamos alguns métodos e destacamos o uso adequado de cada um deles, tendo em vista a redução de cálculos e a precisão da solução.

A necessidade de estudar tal problemática surge do fato de que diversos problemas em distintas áreas do conhecimento podem ser modelados por sistemas lineares. Deste modo, a relevância do tema nos motivou a pesquisar sobre o assunto.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa pode servir como introdução para um estudo mais aprofundado sobre a resolução de sistemas lineares.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Santos Demetrio, pelo apoio e pelas valiosas sugestões ao trabalho. Aos professores do curso de Mestrado em Matemática – PROFMAT/UFERSA, pela contribuição teórica. Ao coordenador do curso Ronaldo Garcia, pelo apoio e incentivo.

## REFERÊNCIAS

HEFEZ, A; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOWARD, A; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LAMIN, M. R. N. **Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares**. Monografia (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

PULINO, P. **Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula**. Disponível em: < <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/> > Acesso em: 20 jan. 2016

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

STRANG, G. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Álgebra Linear 19, 34

Aprendizagem 20, 84, 100, 101, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 128, 131, 132, 134, 135, 139, 140, 142, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 158, 162, 163, 165

Área 35, 51, 53, 60, 65, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 90, 93, 98, 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 114, 116, 122, 123, 124, 139, 159, 164, 175, 176

### B

Benefícios 115, 167, 174

### C

Combinação com repetição 65, 67, 68, 72, 74, 79

Conocimiento matemático 90, 91, 92, 93, 94, 98

Contexto 67, 103, 111, 113, 115, 117, 125, 126, 127, 135, 141

Convergência 27, 30, 32, 33, 50, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63

### D

Didáctica de las matemáticas 90, 91

Dimensiones en 35, 36, 37, 43, 44, 47, 48, 49

Dimensiones negativas 35, 36, 37, 39, 41, 42, 43

### E

Educação matemática 101, 107, 111, 112, 115, 128, 138, 139, 153, 154, 157, 158, 159, 160, 165, 166, 175, 176

Educación primaria 90, 91, 92, 93

Ensino de matemática 130, 131, 132, 134, 135, 152, 153, 154, 160, 161, 165, 175

Ensino elementar 113, 128

Ensino médio 50, 65, 66, 67, 68, 79, 80, 161

### F

Formação de professores 111, 112, 139, 153, 154, 155, 156, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 175, 176

### G

Geometria 34, 35, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 101, 102, 103, 104, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 125, 176

Geometria plana 101, 108, 109, 111

## H

História da matemática 81, 83, 89, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 109, 110, 111, 112

## I

Immersed boundary method 1, 2, 3, 13, 17, 18

## J

Jogo 130, 132, 135, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 152, 153

## L

Laminar and Turbulent Flow 1, 18

Licenciatura 34, 68, 100, 117, 130, 131, 140, 156, 159, 160, 161, 167, 168, 173, 175

## M

Manfredo do Carmo 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Matemática 2, 19, 20, 33, 34, 35, 36, 50, 56, 58, 65, 66, 67, 68, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 173, 175, 176

Metodologia de ensino de matemática 130, 160

Métodos de contagem 65, 67, 68, 79, 80

Métodos diretos 19, 20, 27, 33

Métodos iterativos 19, 20, 27, 33

Mixed convection 1, 2, 4

## P

Perímetro 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 124

Permutação caótica 65, 75

Permutação circular 65, 67, 68, 69, 70, 71, 79

Prática docente 130, 131, 132, 152, 154, 165

Primeiro estágio 130, 132

Professor que ensina matemática 139, 154, 162, 165

## R

Raciocínio lógico 102, 130, 132, 137, 139, 140, 146, 147, 149, 150, 152

Resolução de problemas 34, 66, 115, 116, 117, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 153

## **S**

Série harmônica 50, 56, 57, 58, 59

Séries especiais 50

Séries infinitas 50, 54

Sistemas lineares 19, 20, 27, 34

## **T**

Tarefas matemáticas 113, 114, 115, 116, 117, 128

Trabajo colaborativo 90, 91

## **U**

União 167, 168, 171, 172, 173, 174

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

## 2

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

## 2

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 