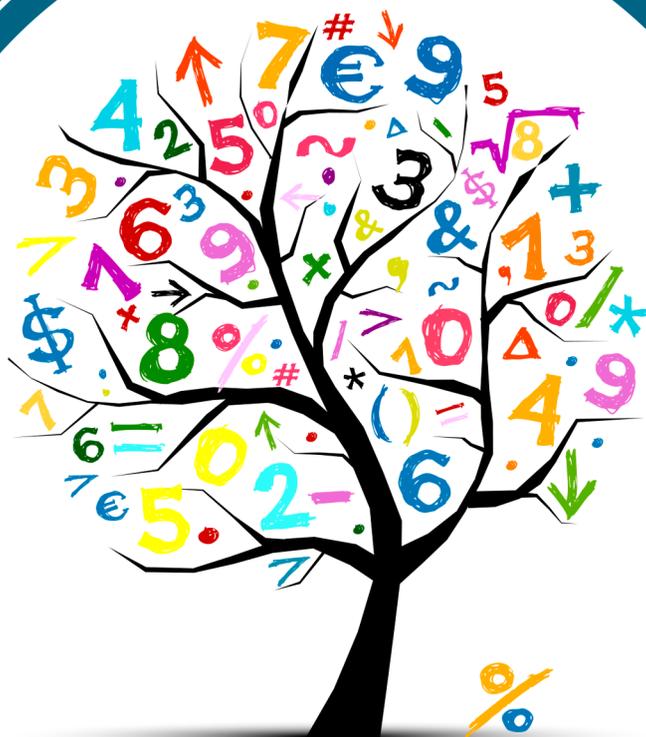


INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adailson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliariari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás

Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

162 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-610-2

DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro ***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
MATHEMATICAL MODELING AND BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TURBULENT FLOW IN INCOMPRESSIBLE NEWTONIAN FLUIDS AROUND ISOTHERMAL GEOMETRIES	
Rômulo Damasclin Chaves dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.1022010121	
CAPÍTULO 2	19
MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO	
Francisco Cleuton de Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010122	
CAPÍTULO 3	35
DIMENSÕES EM \mathbb{Z} AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA	
Carla Maldonado Ivankovic	
DOI 10.22533/at.ed.1022010123	
CAPÍTULO 4	50
SÉRIES INFINITAS	
Jesus Carlos da Mota	
DOI 10.22533/at.ed.1022010124	
CAPÍTULO 5	65
ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO	
Hislley Feitosa Meneses	
Valtercio de Almeida Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.1022010125	
CAPÍTULO 6	81
O PERCURSO PROFISSIONAL DE MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO E A GEOMETRIA DIFERENCIAL NO BRASIL	
Antonio José Melo de Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.1022010126	
CAPÍTULO 7	90
PROCESO COORDINADO DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	
María Teresa Costado Dios	
José Carlos Piñero Charlo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010127	
CAPÍTULO 8	100
A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA DE ÁREA E PERÍMETRO	

DAS FIGURAS PLANAS

Selma de Nazaré Vilhena Machado
Alessandra Maués Quaresma
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa
Crislaine Pereira Antunes
Eldon Ricardo Souza Pereira
Eusom Passos Lima
Gilvan de Souza Marques
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Karoline de Sarges Fonseca
Mayanna Cayres Oliveira
Mauro Sérgio Santos de Oliveira
Simeí Barbosa Paes

DOI 10.22533/at.ed.1022010128

CAPÍTULO 9.....113

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS DE APRENDIZAGEM POR ALUNOS DO ENSINO ELEMENTAR

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes
Maria Isabel Piteira do Vale

DOI 10.22533/at.ed.1022010129

CAPÍTULO 10..... 130

O USO DE JOGOS E DINÂMICAS EM GRUPO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES NA PRÁTICA NO PRIMEIRO ESTÁGIO

Leonardo Pospichil Lima Neto
Lisandro Bitencourt Machado

DOI 10.22533/at.ed.10220101210

CAPÍTULO 11 139

ENTENDIMENTOS DE PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O USO [OU NÃO] DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Renaura Matos de Souza
Ilvanete dos Santos de Souza
Américo Junior Nunes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.10220101211

CAPÍTULO 12..... 154

CURRÍCULO E FORMAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DOCÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: O DESAFIO DOS ANOS INICIAIS

Julio Robson Azevedo Gambarra

DOI 10.22533/at.ed.10220101212

CAPÍTULO 13..... 167

PERFIL DE UNIÃO DAS TURMAS DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DA UFAL CAMPUS ARAPIRACA

Allanny Karla Barbosa Vasconcelos

Gilmar dos Santos Batista
Karolayne Stefanny de Farias Holanda
DOI 10.22533/at.ed.10220101213

SOBRE OS ORGANIZADORES	175
ÍNDICE REMISSIVO.....	177

DIMENSÕES EM \mathbb{Z} AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Data de aceite: 17/11/2020

Data de submissão: 02/10/2020

Carla Maldonado Ivankovic

Universidad Mayor de San Andrés
FCPN/Carrera de Matemática
La Paz – Bolivia

RESUMEN: *Dimensiones en \mathbb{Z}* es un trabajo de investigación pionero en su área, que ha generalizado los axiomas de incidencia de la geometría de Hilbert a números enteros \mathbb{Z} , mostrando consistencia, importancia y pertinencia para su mayor desarrollo. Podría revolucionar la geometría y todo lo que ella genera, por lo que necesita beneficiarse del fenómeno de la globalización para obtener la contribución y el aporte de la mayor cantidad de investigadores posible. Actualmente los resultados obtenidos se encuentran en un lenguaje puramente matemático muy especializado, que hace difícil su comprensión, por este motivo es necesario elaborar un documento que pueda ser asimilado por investigadores de diferentes áreas. Por tanto, el objetivo del trabajo es elaborar un documento que explique con mayor facilidad los principales conceptos de *Dimensiones en \mathbb{Z}* que acompañe al conocimiento científico y capacite al lector en el entendimiento de esta geometría axiomática para futuros y mayores aportes, utilizando como principal fuente bibliográfica el documento de investigación: *Dimensiones en \mathbb{Z} . Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de*

la geometría, escrito por Andrés Alberdi Baptista.

PALABRAS CLAVE: Geometría, Dimensiones Negativas, Dimensiones en \mathbb{Z} .

DIMENSIONS IN \mathbb{Z} IN THE REACH OF EVERYONE: A GENERALIZATION OF GEOMETRY

ABSTRACT: *Dimensions in \mathbb{Z}* is a pioneering research work in its area, which has generalized the incidence axioms of Hilbert geometry to integers \mathbb{Z} , showing consistency, importance and relevance for its further development. It could revolutionize geometry and everything that it generates, so it needs to benefit from the phenomenon of globalization to obtain the contribution and input of as many researchers as possible. Currently the results obtained are in a highly specialized purely mathematical language, which makes their understanding difficult, for this reason it is necessary to prepare a document that can be assimilated by researchers from different areas. Therefore, the objective of this work is to elaborate a document that more easily explains the main concepts of *Dimensions in \mathbb{Z}* that accompanies scientific knowledge and enables the reader to understand this axiomatic geometry for future and greater contributions, using as the main bibliographic source the research document: *Dimensiones en \mathbb{Z} . Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*, written by Andrés Alberdi Baptista.

KEYWORDS: Geometry, Negative Dimensions, Dimensions in \mathbb{Z} .

1 | INTRODUCCIÓN

Dimensiones en \mathbb{Z} , es una propuesta de replanteamiento y generalización de los conceptos básicos de la geometría clásica, desarrollado por Andrés Alberdi Baptista¹ en el documento de investigación *Dimensiones en \mathbb{Z} . Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*.

Esta propuesta se originó en 1990 en una charla entre Andrés Alberdi, Efraín Cruz² y Eduardo Palenque³, en la que salió a la luz la posibilidad de la existencia de dimensiones negativas. En 1991, se expusieron las primeras nociones de esta geometría en el Primer Congreso Boliviano de Matemáticas, pero no fue sino hasta mayo de 2017 cuando aparecieron los primeros bosquejos de generalización y formalización de estas ideas, las cuales fueron consolidándose hasta octubre de ese mismo año, presentándose la axiomática por primera vez en el XX Congreso Boliviano de Matemática en ocasión del quincuagésimo aniversario de la fundación de la Carrera de Matemática de la UMSA. Actualmente se tiene instaurado el “Taller de Dimensiones en \mathbb{Z} ” a la cabeza de Andrés Alberdi, con la participación de profesores y estudiantes de la Carrera de Matemáticas de la UMSA.

Dimensiones en \mathbb{Z} trata de generalizar desde un punto de vista axiomático las nociones básicas de geometría conocidas hasta el momento. En la geometría clásica sólo son admitidas dimensiones no negativas en números enteros, vale decir, desde la dimensión cero hasta la dimensión n , donde n es un número natural, e incluso hasta dimensiones infinitas (positivas). Sin embargo, en Dimensiones en \mathbb{Z} se propone la existencia de dimensiones negativas desde una perspectiva axiomática, una idea que no fue desarrollada hasta ahora por la comunidad matemática.

El presente artículo, busca explicar los primeros conceptos de esta geometría axiomática, exponiendo primeramente cómo puede concebirse la idea de dimensiones negativas de una manera intuitiva en una primera parte, pasando luego a una explicación formal de la construcción de los \mathbb{Z} - espacios, que son el conjunto y el marco en el que se desarrolla esta nueva forma de concebir la geometría y finalizando en la explicación también formal de la construcción de un operador que permite relacionar los objetos geométricos que se encuentran en estos \mathbb{Z} - espacios.

2 | DESARROLLO

Históricamente el estudio de la Geometría Axiomática Clásica, desde Euclides hasta Hilbert y Tarski, ha partido de conceptos primitivos los que, al ser intuitivos,

1 Matemático titulado de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) en La Paz, Bolivia y autor del documento de investigación Dimensiones en \mathbb{Z} . Propuesta Inicial para Generalizar los Términos Primitivos de la Geometría.

2 Doctor en matemáticas y actual docente emérito de la Carrera de Matemática de la UMSA.

3 Doctor en física, actual docente emérito de la Carrera de Física de la UMSA y Director del laboratorio de Ciencia de Materiales.

no necesitaban de una definición formal; sin embargo, estos conceptos no definidos hacen de la geometría así estudiada un caso especial y/o particular de la geometría axiomática del estudio de Dimensiones en \mathbb{Z} .

En matemáticas, las principales herramientas básicas son la abstracción y la generalización. A través de Dimensiones en \mathbb{Z} , se generalizan los conceptos primitivos de la geometría, conceptos como *punto*, *recta*, *plano*, *espacio* y *yace en*, lo que permite demostrar los axiomas de Hilbert, y por otro lado, viabilizar la existencia de dimensiones negativas.

2.1 ¿A qué se refieren las dimensiones negativas?

Hay diferentes maneras de percibir las dimensiones negativas, en esta sección se expondrán tres de ellas, dos que toman como punto de partida la geometría euclidiana pero terminan expandiéndola, y la tercera que considera el álgebra lineal.

I. Primera percepción geométrica

En la geometría euclidiana solo se consideran objetos que pueden ser percibidos por el ser humano a través de sus sentidos, vale decir, solo considera objetos de hasta tres dimensiones. En este sentido, podemos pensar; por ejemplo, en una caja cuadrada de cartón. Esta caja es tridimensional, dado que presenta altura, anchura y profundidad; sin embargo, dependiendo del ángulo desde donde observemos la caja, podríamos percibirla de diferente manera, vale decir como si estuviera en una dimensión diferente, y más específicamente, como si estuviera en una dimensión menor.

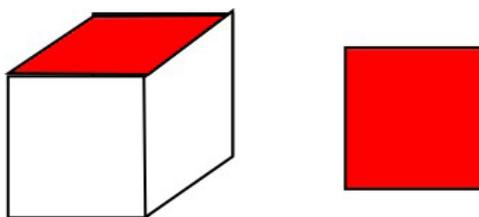


Figura 1. Caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Apelando a la imaginación del lector, si observáramos la caja desde arriba, lo que veríamos sería uno de los lados de la caja, el superior, y observaríamos un cuadrado que está en dos dimensiones. De esta manera, estaríamos percibiendo a este objeto tridimensional como si estuviera en una dimensión inferior; es decir, como si fuera un objeto bidimensional.

De la misma manera, si tomáramos un paralelogramo y lo observáramos de lado, lo que veríamos sería uno de los lados del paralelogramo; vale decir, lo que veríamos sería una línea, la cual se encuentra en dimensión uno, de forma que estaríamos percibiendo a un objeto bidimensional como si fuera un objeto unidimensional.

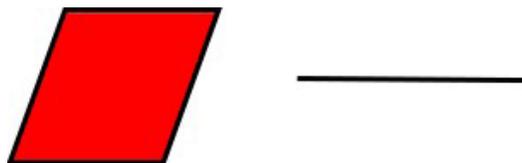


Figura 2. Lado de una caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Finalmente, podríamos tomar un pincel que represente una recta en dimensión uno. Si observáramos el pincel de tal forma que solo podamos ver su parte posterior y no sea posible ver su mango, lo que veríamos sería un punto, el cual se encuentra en dimensión cero. Así, al igual que en los ejemplos anteriores, estaríamos percibiendo un objeto de una dimensión dada, en este caso un objeto unidimensional, como si estuviera en una dimensión inferior, en el caso de este ejemplo, en dimensión cero.



Figura 3. Recta vista en diferentes ángulos

Si pudiéramos ser capaces de agarrar un punto, y verlo desde un ángulo que nos permita apreciarlo en una dimensión menor a la dimensión en la que se encuentra, lo que observaríamos sería un objeto en una dimensión inferior a la del punto; es decir, un objeto en dimensión menor a cero, un objeto en dimensión negativa (en dimensión -1).

Nuestra capacidad visual no nos permite percibir objetos que se encuentren en dimensiones menores a la del punto; no obstante, esto no significa que tales dimensiones no podrían existir. En los ejemplos que acabamos de ver, dependiendo del ángulo desde donde lo veamos, un cubo puede verse como un cuadrado, un cuadrado puede verse como una recta, una recta puede verse como un punto, y

un punto puede verse como un objeto en dimensión -1. Esta idea nos conduce a construcciones abstractas de dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, generándose de esta manera las dimensiones negativas.

II. Segunda percepción geométrica

La segunda forma de percibir la existencia de dimensiones negativas, es mediante la observación de las partes de un objeto geométrico.

En el ejemplo de la caja de cartón, este objeto tridimensional, que puede abstraerse como un cubo, está formado por seis caras, donde cada cara se encuentra en dimensión dos. Cada cara de este cubo está formada por cuatro lados o cuatro líneas, donde cada línea se encuentra en dimensión uno. Cada línea o cada recta está formada por infinitos puntos, donde cada punto se encuentra en dimensión cero. Podemos observar entonces, que las partes de cualquier objeto dado se encuentran en una dimensión inferior a este. En este sentido, las partes de un punto tendrían que encontrarse en una dimensión inferior a cero, en dimensión -1. Realizando este ejercicio de manera indefinida, nuevamente se construyen dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, donde en caso de existir las dimensiones negativas, los objetos que se encontrarían en ellas serían partes de objetos iguales o más pequeños que el punto.

III. Percepción desde el álgebra lineal

Una última forma de apreciar la existencia de dimensiones negativas, es partiendo esta vez del álgebra lineal. Para observar esto, debemos comenzar realizando algunos ejemplos de incidencia:

Ejemplos de incidencia

Previamente introduciremos la noción de *objeto geométrico*: Se entiende por objeto geométrico a los objetos completos que abarcan toda una dimensión, por ejemplo, puntos, rectas, planos, etc. Por tanto, no se refiere a objetos geométricos en el sentido clásico (triángulos, cuadrados, circunferencias, esferas, cubos, etc.) si no a objetos abstractos generales.

La notación que emplearemos para los objetos geométricos es la siguiente:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde el número de coordenadas de la n -ada ordenada determina donde se encuentra el objeto en cuestión, mientras que el número de variables de la n -ada ordenada dirá de que objeto geométrico se trata.

Por ejemplo, si fijamos un $n=3$, los objetos en cuestión se encontrarán en un

espacio de tres dimensiones. Si esta 3-ada ordenada no contiene ninguna variable, como por ejemplo $(0,0,0)$ ⁴, se tratará de un punto, si contuviera una variable, como por ejemplo $(x,0,0)$ se tratará de una recta, si contuviera dos variables como $(x,y,0)$ se tratará de un plano, etc.

Obsérvese que esta notación sólo funciona para el caso de objetos geométricos que se encuentran en dimensiones de números enteros no negativos. Dicho lo anterior, pasemos a ver los ejemplos de incidencia:

Ejemplo 1. Dos rectas que se intersecan en un punto forman un plano.

Sean dos rectas $(x,0)$ y $(0,y)$ ambas en \mathbb{R}^2 .

La intersección de estas dos rectas es un punto: $(x,0) \cap (0,y) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (0,y) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

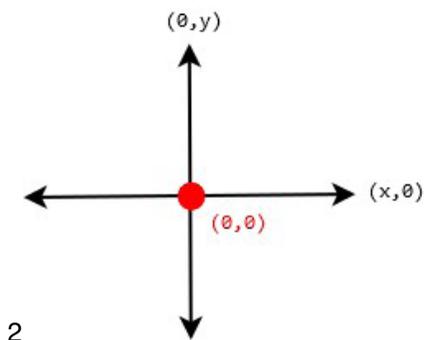


Figura 4. Intersección de dos rectas en un punto

Ejemplo 2. Dos rectas paralelas forman un plano.

Sean las rectas paralelas $(x,0)$ y $(x,1)$ ambas en \mathbb{R}^2 .

La intersección de estas dos rectas no existe: $(x,0) \cap (x,1) = \emptyset$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (x,1) \in \mathbb{R}^2$

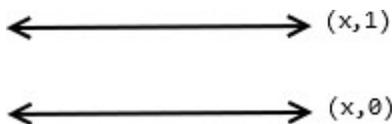


Figura 5. Rectas paralelas

Ejemplo 3. Dos rectas alabeadas⁵ forman un espacio de tres dimensiones.

Sean las rectas $(0,y,0)$ y $(1,0,z)$ ambas en \mathbb{R}^3

4. Los números que se encuentren en la 3-ada ordenada no necesariamente deben ser cero, pueden ser cualquier otro número real.

5. Afirmamos que dos objetos son alabeados cuando no son paralelos y tampoco se intersecan.

La intersección de estas rectas no existe intuitivamente: $(0, y, 0) \cap (1, 0, z) = \emptyset$
 Por otro lado, forman el espacio de tres dimensiones: $(0, y, 0) \cup (1, 0, z) \in \mathbb{R}^3$

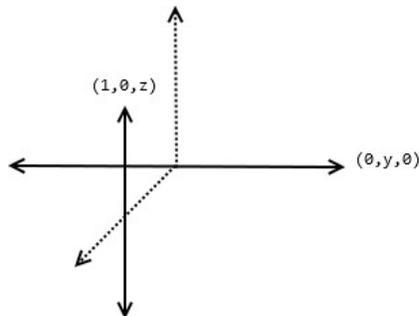


Figura 6. Rectas alabeadas

Los anteriores ejemplos contienen objetos geométricos de hasta tres dimensiones, lo cual permite una representación gráfica. Los siguientes ejemplos se encuentran en dimensiones mayores a tres, no siendo posible su visualización geométrica pero si sus patrones de comportamiento:

Ejemplo 4. Dos planos que están en un espacio de cuatro dimensiones se intersecan en un punto.

Sean los planos $(x, y, 0, 0)$ y $(0, 0, w, z)$ ambos en \mathbb{R}^4 .

Su intersección es un punto: $(x, y, 0, 0) \cap (0, 0, w, z) = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$

Por otro lado, estos dos planos forman el espacio de cuatro dimensiones:

$$(x, y, 0, 0) \cup (0, 0, w, z) = (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4$$

Acá podemos observar un resultado interesante, y es que en la geometría euclidiana la intersección de dos planos nunca puede ser un punto, pero si nos extendemos a un espacio de cuatro dimensiones esta situación cambia.

Ejemplo 5. Dos rectas doblemente alabeadas⁶ se encuentran en un espacio de cuatro dimensiones.

Sean las rectas $(x, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 1, z)$ ambos en \mathbb{R}^4

Su intersección no existe intuitivamente: $(x, 0, 0, 0) \cap (0, 1, 1, z) = \emptyset$

Ambas forman el espacio de cuatro dimensiones: $(x, 0, 0, 0) \cup (0, 1, 1, z) \in \mathbb{R}^4$

De esta manera, se puede observar tres diferentes formas de concebir las dimensiones negativas, pero esta última resulta de mayor importancia, dado que una observación detenida de la misma permite descubrir una relación que puede

⁶ Se dice que están doblemente alabeadas porque dos de sus coordenadas nunca se van a intersectar, en este sentido, estarán tres veces alabeadas si tres de sus coordenadas nunca se intersectan, y así sucesivamente. Notar por otro lado, que para que dos rectas estén doblemente alabeadas, estas deben estar mínimamente en \mathbb{R}^4 .

expresarse en forma de ecuación, la cual se presenta a continuación.

Ecuación fundamental intuitiva

De los ejemplos de incidencia mostrados anteriormente pueden notarse las siguientes regularidades:

- i) Cuando existe intersección entre los objetos geométricos o estos están alabeados:

$$\delta(A) + \delta(B) - \delta(C) = \delta(D)$$

- ii) Cuando los objetos geométricos son paralelos, es decir, cuando

$$A \cap B = \emptyset:$$

$$\max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1 = \delta(D)$$

Donde:

$\delta(A)$: Dimensión del objeto geométrico A.

$\delta(B)$: Dimensión del objeto geométrico B.

$\delta(C)$: Dimensión de la intersección de A y B.

$\delta(D)$: Dimensión del objeto formado por A y B.

Una definición más formal de se hará más adelante. Nótese por otro lado, que a los objetos geométricos se los denotará por las primeras letras del abecedario en mayúsculas. Apliquemos estas ecuaciones en los ejemplos presentados anteriormente:

Ejemplo 1. Dimensión del espacio formado por dos rectas que se intersecan en un punto: $1 + 1 - 0 = 2$

Ejemplo 2. Dimensión del espacio formado por dos rectas paralelas:

$$\max\{1, 1\} + 1 = 2$$

Ejemplo 3. Dimensión del espacio formado por dos rectas alabeadas:

$$1 + 1 - (-1) = 3$$

Nótese que para que este ejemplo cumpla con una de las regularidades de la ecuación fundamental intuitiva, el alabeo debe representar una intersección en dimensiones negativas, lo cual no es nada intuitivo. No es que la intersección de estos objetos no exista, no existe intuitivamente como se mencionó en el ejemplo 3 de la anterior sección, si no que la intersección se encuentra en un espacio de dimensión negativa, en este caso, de dimensión -1 , por tanto, en el ejemplo 3 de la anterior sección: $(x, y, 0) \cap (1, 0, z) \in [-1]^7$

Ejemplo 4. Dimensión del espacio formado por dos planos que se intersecan en un punto: $2+2-0=4$

Ejemplo 5. Dimensión del espacio formado por dos rectas doblemente

7. Se definirá formalmente $[-1]$ más adelante, por el momento es suficiente entender que $[-1]$ se refiere al espacio de dimensión -1 .

alabeadas: $1+1-(-2)=4$

Al igual que en el caso del ejemplo 3, el doble alabeo representa la intersección en dimensiones negativas, donde: $(x, 0, 0, 0) \cap (0, 1, 1, z) \in [-2]$

De los ejemplos 3 y 5 por tanto se observa que los alabeos entre objetos son una manifestación de la noción de dimensiones negativas.

Todo lo expuesto en esta subsección tuvo un carácter más intuitivo que formal, a partir de la siguiente subsección se introducen los aspectos formales de esta nueva teoría, comenzando por la construcción del marco donde esta se desarrolla, los \mathbb{Z} - espacios.

2.2 \mathbb{Z} - espacios

Dimensiones en \mathbb{Z} , postula axiomas de una geometría nueva cuyas propiedades permiten generalizar los conceptos básicos de la geometría clásica a dimensiones enteras positivas y negativas con base en la teoría de conjuntos, por lo que los desarrollos que serán expuestos en lo que resta del documento tienen base en la axiomática de la teoría de conjuntos tradicional.

En esta subsección se plantearán los conceptos básicos de *conglomerado* y *\mathbb{Z} - espacios*, conceptos sobre los cuales se construye esta nueva geometría.

Partimos entonces de la definición de Conglomerado, para esto consideramos un conjunto no vacío C cualquiera y la siguiente función definida sobre este conjunto:

$$\delta: C \rightarrow \mathbb{Z}$$

Esta función se denomina *función de clasificación*. A cada elemento de C la función le asigna un número entero, negativo o no negativo, en este sentido, si llamamos *objeto geométrico* a los elementos de C , lo que hace la función de clasificación es asignarle a cada objeto geométrico un número entero que corresponderá a la dimensión de ese objeto geométrico.

Haciendo una analogía con la geometría euclidiana, si A es un elemento de C , es decir, si $A \in C$ tal que $\delta(A)=0$, lo que se está diciendo es que A tiene dimensión cero, o como se diría en geometría euclidiana, A es un punto, de igual manera, si $\delta(B)=1$, B es una recta, si $\delta(C)=2$, C es un plano, etc. Pero en este caso, no se tendrán solo objetos que bajo la función δ tengan un valor no negativo, sino que también existirá algún objeto D tal que $\delta(D)=-1$, y se dirá que D es un objeto de dimensión -1.

Nótese que es así como aparecen objetos de dimensiones negativas en esta nueva geometría, son elementos de un conjunto no vacío C tales que bajo la función δ toman valores negativos en los enteros.

Dicho todo lo anterior, formalmente definimos al conglomerado de la siguiente manera:

Definición 1. Supongamos un conjunto no vacío C junto con una función δ en los enteros:

$$\delta: C \rightarrow \mathbb{Z}$$

Llamamos al par (C, δ) un conglomerado.

Nótese que δ no puede ser la función vacía, ya que como C es no vacío, existirá al menos un elemento A en C al que se le podrá aplicar la función δ , tal que $\delta(A)=x$ donde x será un número entero, de forma que $(A, x) \in \delta$ y $\delta \neq \emptyset$. Este hecho corresponde a la primera proposición:

Proposición 1. δ no es la función vacía.⁸

Ya definido el conglomerado, podemos definir en él una relación que denotaremos con \equiv . Dos objetos se relacionarán mediante \equiv solo si ambos están en la misma dimensión, en este sentido, si A_1 y A_2 son rectas, entonces $A_1 \equiv A_2$ porque ambos están en dimensión 1. Lo que permite esta relación es agrupar todos los objetos que tienen la misma dimensión, lo que a su vez permitirá construir los \mathbb{Z} - espacios, como se verá mas adelante.

Formalmente la definimos de la siguiente manera:

Definición 2. Sea un conglomerado (C, δ) , se define una relación \equiv de $C \times C$ tal que $(\forall(A, B) \in C \times C)$, $A \equiv B \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(B)$.

Por la siguiente proposición esta es una relación de equivalencia:

Proposición 2. es una relación de equivalencia.

Una relación se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Será reflexiva cuando los objetos se relacionen con sigo mismo, veamos. Si A es un objeto geométrico, A se relaciona consigo mismo mediante \equiv porque $\delta(A) = \delta(A)$. Nótese que esta es una consecuencia de la reflexividad en los números enteros.

Una relación será simétrica siempre que dada una relación R , si aRb entonces necesariamente bRa . La relación \equiv es simétrica por la igualdad en los números enteros, ya que si $\delta(A) = \delta(B)$ entonces $\delta(B) = \delta(A)$ porque $\delta(A)$ y $\delta(B)$ son enteros.

Finalmente, una relación será transitiva siempre que dada una relación R , si aRb y bRc entonces necesariamente aRc . Nuevamente, por propiedades de los enteros, la relación \equiv es transitiva, dado que si $\delta(A) = \delta(B)$ y $\delta(B) = \delta(C)$ entonces $\delta(A) = \delta(C)$.

El conglomerado por tanto puede particionarse mediante la relación de equivalencia \equiv , donde si dos objetos tienen la misma dimensión, se encontrarán en la misma clase de equivalencia.

⁸ Para una demostración más formal de esta y el resto de las proposiciones presentadas en este documento, acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*. La Paz, Bolivia.

Las clases de equivalencia son lo que denominamos \mathbb{Z} - espacios, y cada clase de equivalencia se denotará por $[x]$, donde x es un número entero. Por ejemplo la clase de equivalencia que contiene a todos los puntos es $[0]$, la clase de equivalencia que contiene a todas las rectas es $[1]$, la que contiene a todos los planos es $[2]$ y la clase de equivalencia que contiene a todos los objetos que están en dimensión -1 es $[-1]$, donde $[-1],[0],[1],[2]$ son \mathbb{Z} - espacios. Será de gran utilidad poder representar estos \mathbb{Z} - espacios gráficamente, lo que se desarrolla a continuación:

Representación en grilla

A través de la figura 7 podemos representar los \mathbb{Z} - espacios, lo que permitirá más adelante visualizar las relaciones que se irán definiendo entre los objetos del conglomerado:

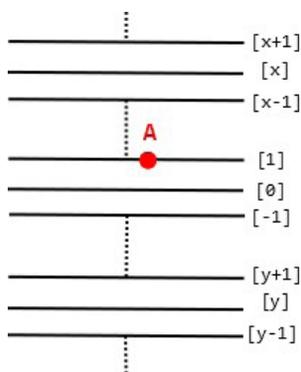


Figura 7. \mathbb{Z} - espacios

Cada línea representa un \mathbb{Z} - espacio, y los puntos sobre cada línea, los objetos de cada \mathbb{Z} - espacio.

En la figura por ejemplo, se observa que A pertenece al \mathbb{Z} - espacio $[1]$, lo que significa que A es una recta, dado que es un objeto que tiene dimensión 1.

Dada la partición del conglomerado y sus clases de equivalencia, vale decir, sus \mathbb{Z} - espacios, podemos definir el conjunto de las clases de equivalencia, es decir, su conjunto cociente, además de una función que tiene como codominio a este conjunto:

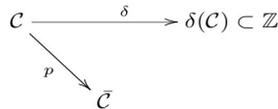
Definición 3. Definimos \bar{C} como el cociente C/\equiv y a la función $p: C \rightarrow \bar{C}$ como la proyección de C en \bar{C} . La clase de equivalencia de un objeto $A \in C$ se denota por \bar{A} .

El conjunto cociente por tanto es el conjunto de \mathbb{Z} - espacios:

$$\bar{C} = \{\dots, [y - 1], [y], [y + 1], \dots, [-1], [0], [1], \dots, [x - 1], [x], [x + 1], \dots\}$$

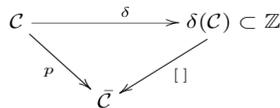
y la función p es la función que asigna a cada objeto del conglomerado su respectiva clase o \mathbb{Z} - espacio.

Nótese que hasta el momento se ha armado el siguiente diagrama:



Podemos cerrar el diagrama conmutativo que se está formando con una función $[\]$ definida sobre \mathbb{Z} , donde a cada número entero le asigne un \mathbb{Z} - espacio. La definición más formal es la siguiente:

Definición 4. Definimos al levantamiento de δ como la función denotada por $[\]$ conforme el siguiente diagrama conmutativo, con $[\] \circ \delta = p$:



Que cierra el diagrama conmutativo.

También definimos formalmente a los \mathbb{Z} - espacios:

Definición 5. Llamamos \mathbb{Z} - espacios a los conjuntos no vacíos $[x] \in \bar{C}$.

Con todo lo anterior, se presentó el marco en el que se desenvuelve esta nueva teoría, y se creó una relación entre elementos de un mismo \mathbb{Z} - espacio. A continuación, se define una nueva relación que permite relacionar objetos que se encuentran en diferentes \mathbb{Z} - espacios y que más adelante permitirá también definir un operador.

2.3 Operador t

La relación binaria t , relaciona dos objetos de \mathbb{Z} - espacios consecutivos, vale decir, relaciona un objeto de una dimensión x con otro que se encuentra en la dimensión inmediata superior $x + 1$.

Utilizando la grilla de la figura 7, la relación t entre dos objetos A y B se representará mediante una flecha que vaya de A hacia B como se muestra a continuación:

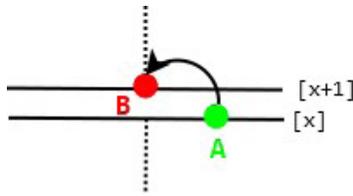


Figura 8. A t relacionado con B: AtB

Esta relación generaliza la relación primitiva *yace en* y formalmente se lo define de la siguiente forma:

Definición 6. Supongamos un conglomerado (C, δ) y una relación $t \subset C \times C$ en la clase C que cumpla las siguientes condiciones:

D0) Supongamos $A, B \in C$ con $(A, B) \in t$, entonces $\delta(B) = \delta(A) + 1$.

D1) Si $(A, x) \in \delta$ entonces existen $(B, x+1), (C, x-1) \in \delta$ tales que $(A, B), (C, A) \in t$.

D2) Si $(A, x) \in \delta$ entonces existen $(B', x+1), (C', x-1)$ tales que $(A, B'), (C', A) \notin t$.

Una terna de la forma (C, δ, t) con las propiedades mencionadas en la presente definición y en la definición 1 se denomina *estructura de conglomerado*.

La primera condición nos restringe a relacionar solo objetos que se encuentran en \mathbb{Z} - espacios consecutivos⁹; por otro lado, la condición D1 afirma que un objeto A siempre va a t – relacionarse con otro B que se encuentre en un \mathbb{Z} - espacio consecutivo superior y con otro C que se encuentre en un \mathbb{Z} - espacio consecutivo inferior. Mediante el uso de la grilla, se representa D1 de la siguiente manera:

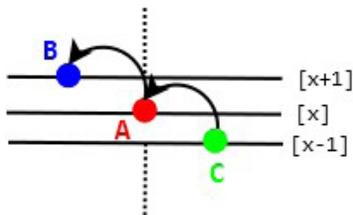


Figura 9. Condición D1

La condición D2 por su parte, afirma que dado cualquier objeto A en cualquier \mathbb{Z} - espacio, siempre va a existir otro B' en una dimensión consecutiva superior y otro C' en una dimensión consecutiva inferior con los que no se va a relacionar. Gráficamente se lo representa de la siguiente manera:

9 La relación u permite relacionar objetos que se encuentran en cualquier \mathbb{Z} - espacio, no necesariamente consecutivos, generalizando la relación t ; sin embargo, no se desarrollará la relación u en este documento. Si el lector está interesado en conocer mas sobre la relación u , se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*. La Paz, Bolivia.

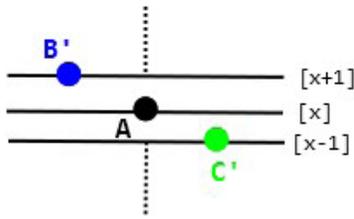


Figura 10. Condición D2

Esta última condición evita que los objetos de un \mathbb{Z} - espacio se relacionen con todos los objetos de \mathbb{Z} - espacios inmediatos superiores o inferiores, evitando de esta manera una situación trivial.

La relación t por tanto, en términos coloquiales se refiere a la noción de *estar totalmente en*, donde dos objetos estarán t - relacionados solamente si uno está contenido en el otro.

Relacionar mediante t por ejemplo, un punto con una recta significa que el punto se encuentra en la recta, relacionar una recta con un plano, que la recta se encuentra totalmente en el plano y relacionar un plano con un espacio de tres dimensiones, que el plano se encuentra totalmente en ese espacio.¹⁰

Finalmente, ahora tenemos las herramientas suficientes para definir operadores:

Operadores t^* y t_* .

Definición 7. Sea $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, se definen los conjuntos:

$$t^*(A) = \{B \in [x + 1] : AtB\}$$

$$t_*(A) = \{C \in [x - 1] : CtA\}$$

Por tanto en $t^*(A)$ estamos fijando un objeto A que se encuentra en una dimensión x , y el operador $t^*(A)$ se refiere a todos los objetos en $[x+1]$ que se t - relacionan con A . Por ejemplo, si A es un punto, $t^*(A)$ son todas las rectas que pasan por el punto A .

Por otro lado, en $t_*(A)$ nos referimos a todos los elementos con los que A se t - relaciona. Por ejemplo, si A es un plano, $t_*(A)$ son todas las rectas que están contenidas en ese plano.¹¹

¹⁰ La relación t cumple con diversas propiedades; sin embargo, las mismas no se encuentran en los alcances de este documento. Si el lector se encuentra interesado por conocer estas propiedades, se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*. La Paz, Bolivia.

¹¹ Para ver mayores detalles sobre los operadores t^* y t_* se invita al lector a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*. La Paz, Bolivia.

3 | CONSIDERACIONES FINALES

Todo lo abarcado en este artículo corresponde al primer capítulo del documento de investigación *Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría* escrito por Andrés Alberdi Baptista. Si el lector se encuentra interesado en profundizar y continuar con los desarrollos expuestos hasta aquí, puede hacerlo ingresando a la página web <https://dimensionesenmathbbz.blogspot.com> donde encontrará el documento de investigación completo y los últimos avances. También puede contactarse a los correos carla.11.mi.cm@gmail.com de la autora de este artículo y aalberdi@gmail.com de Andrés Alberdi Baptista, desarrollador de esta nueva teoría.

Es importante también mencionar que dado que esta nueva teoría aún se encuentra en desarrollo, aún no ha sido publicada; no obstante, ya ha mostrado su relevancia al ser capaz de demostrar los axiomas de incidencia de Hilbert¹², por lo que es necesario que continúen sus desarrollos.

REFERENCIAS

Alberdi, A. **Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría**. La Paz, Bolivia. 2019.

¹² La demostración de estos axiomas se encuentra en el documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en \mathbb{Z} : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*. La Paz, Bolivia.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra Linear 19, 34

Aprendizagem 20, 84, 100, 101, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 128, 131, 132, 134, 135, 139, 140, 142, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 158, 162, 163, 165

Área 35, 51, 53, 60, 65, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 90, 93, 98, 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 114, 116, 122, 123, 124, 139, 159, 164, 175, 176

B

Benefícios 115, 167, 174

C

Combinação com repetição 65, 67, 68, 72, 74, 79

Conocimiento matemático 90, 91, 92, 93, 94, 98

Contexto 67, 103, 111, 113, 115, 117, 125, 126, 127, 135, 141

Convergência 27, 30, 32, 33, 50, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63

D

Didáctica de las matemáticas 90, 91

Dimensiones en 35, 36, 37, 43, 44, 47, 48, 49

Dimensiones negativas 35, 36, 37, 39, 41, 42, 43

E

Educação matemática 101, 107, 111, 112, 115, 128, 138, 139, 153, 154, 157, 158, 159, 160, 165, 166, 175, 176

Educación primaria 90, 91, 92, 93

Ensino de matemática 130, 131, 132, 134, 135, 152, 153, 154, 160, 161, 165, 175

Ensino elementar 113, 128

Ensino médio 50, 65, 66, 67, 68, 79, 80, 161

F

Formação de professores 111, 112, 139, 153, 154, 155, 156, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 175, 176

G

Geometria 34, 35, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 101, 102, 103, 104, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 125, 176

Geometria plana 101, 108, 109, 111

H

História da matemática 81, 83, 89, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 109, 110, 111, 112

I

Immersed boundary method 1, 2, 3, 13, 17, 18

J

Jogo 130, 132, 135, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 152, 153

L

Laminar and Turbulent Flow 1, 18

Licenciatura 34, 68, 100, 117, 130, 131, 140, 156, 159, 160, 161, 167, 168, 173, 175

M

Manfredo do Carmo 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Matemática 2, 19, 20, 33, 34, 35, 36, 50, 56, 58, 65, 66, 67, 68, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 173, 175, 176

Metodologia de ensino de matemática 130, 160

Métodos de contagem 65, 67, 68, 79, 80

Métodos diretos 19, 20, 27, 33

Métodos iterativos 19, 20, 27, 33

Mixed convection 1, 2, 4

P

Perímetro 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 124

Permutação caótica 65, 75

Permutação circular 65, 67, 68, 69, 70, 71, 79

Prática docente 130, 131, 132, 152, 154, 165

Primeiro estágio 130, 132

Professor que ensina matemática 139, 154, 162, 165

R

Raciocínio lógico 102, 130, 132, 137, 139, 140, 146, 147, 149, 150, 152

Resolução de problemas 34, 66, 115, 116, 117, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 153

S

Série harmônica 50, 56, 57, 58, 59

Séries especiais 50

Séries infinitas 50, 54

Sistemas lineares 19, 20, 27, 34

T

Tarefas matemáticas 113, 114, 115, 116, 117, 128

Trabajo colaborativo 90, 91

U

União 167, 168, 171, 172, 173, 174

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 