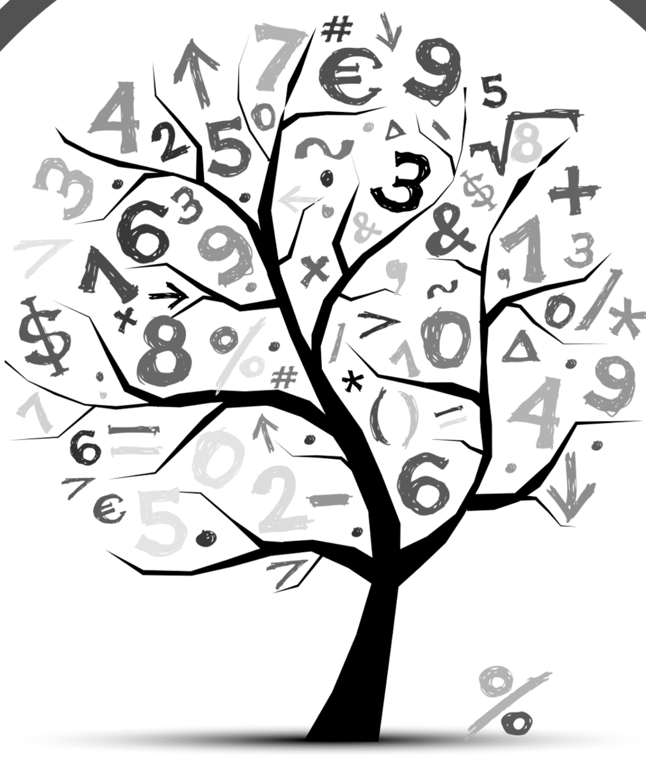
INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Lucas Vieira Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-610-2
DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o "novo" exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro "***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***", em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

DIMENSÕES EM $\mathbb{Z}$ AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 02/10/2020

Carla Maldonado Ivankovic
Universidad Mayor de San Andrés
FCPN/Carrera de Matemática
La Paz – Bolivia

RESUMEN: *Dimensiones en* $\mathbb{Z}$ es un trabajo de investigación pionero en su área, que ha generalizado los axiomas de incidencia de la geometría de Hilbert a números enteros $\mathbb{Z}$, mostrando consistencia, importancia y pertinencia para su mayor desarrollo. Podría revolucionar la geometría y todo lo que ella genera, por lo que necesita beneficiarse del fenómeno de la globalización para obtener la contribución y el aporte de la mayor cantidad de investigadores posible. Actualmente los resultados obtenidos se encuentran en un lenguaje puramente matemático muy especializado, que hace difícil su comprensión, por este motivo es necesario elaborar un documento que pueda ser asimilado por investigadores de diferentes áreas. Por tanto, el objetivo del trabajo es elaborar un documento que explique con mayor facilidad los principales conceptos de *Dimensiones en* $\mathbb{Z}$ que acompañe al conocimiento científico y capacite al lector en el entendimiento de esta geometría axiomática para futuros y mayores aportes, utilizando como principal fuente bibliográfica el documento de investigación: *Dimensiones en* $\mathbb{Z}$*. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*, escrito por Andrés Alberdi Baptista.
PALABRAS CLAVE*:* Geometría, Dimensiones Negativas, Dimensiones en $\mathbb{Z}$**.**

DIMENSIONS IN $\mathbb{Z}$ IN THE REACH OF EVERYONE: A GENERALIZATION OF GEOMETRY

ABSTRACT: *Dimensions in* $\mathbb{Z}$ is a pioneering research work in its area, which has generalized the incidence axioms of Hilbert geometry to integers $\mathbb{Z}$, showing consistency, importance and relevance for its further development. It could revolutionize geometry and everything that it generates, so it needs to benefit from the phenomenon of globalization to obtain the contribution and input of as many researchers as possible. Currently the results obtained are in a highly specialized purely mathematical language, which makes their understanding difficult, for this reason it is necessary to prepare a document that can be assimilated by researchers from different areas. Therefore, the objective of this work is to elaborate a document that more easily explains the main concepts of *Dimensions in* $\mathbb{Z}$ that accompanies scientific knowledge and enables the reader to understand this axiomatic geometry for future and greater contributions, using as the main bibliographic source the research document: *Dimensiones en* $\mathbb{Z}$*. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*, written by Andrés Alberdi Baptista.
KEYWORDS*:* Geometry, Negative Dimensions, Dimensions in $\mathbb{Z}$.

1 | INTRODUCCIÓN

Dimensiones en $\mathbb{Z}$, es una propuesta de replanteamiento y generalización de los conceptos básicos de la geometría clásica, desarrollado por Andrés Alberdi Baptista[1] en el documento de investigación *Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría.*

Esta propuesta se originó en 1990 en una charla entre Andrés Alberdi, Efraín Cruz[2] y Eduardo Palenque[3], en la que salió a la luz la posibilidad de la existencia de dimensiones negativas. En 1991, se expusieron las primeras nociones de esta geometría en el Primer Congreso Boliviano de Matemáticas, pero no fue sino hasta mayo de 2017 cuando aparecieron los primeros bosquejos de generalización y formalización de estas ideas, las cuales fueron consolidándose hasta octubre de ese mismo año, presentándose la axiomática por primera vez en el XX Congreso Boliviano de Matemática en ocasión del quincuagésimo aniversario de la fundación de la Carrera de Matemática de la UMSA. Actualmente se tiene instaurado el "Taller de Dimensiones en $\mathbb{Z}$" a la cabeza de Andrés Alberdi, con la participación de profesores y estudiantes de la Carrera de Matemáticas de la UMSA.

Dimensiones en $\mathbb{Z}$ trata de generalizar desde un punto de vista axiomático las nociones básicas de geometría conocidas hasta el momento. En la geometría clásica sólo son admitidas dimensiones no negativas en números enteros, vale decir, desde la dimensión cero hasta la dimensión n, donde n es un número natural, e incluso hasta dimensiones infinitas (positivas). Sin embargo, en Dimensiones en $\mathbb{Z}$ se propone la existencia de dimensiones negativas desde una perspectiva axiomática, una idea que no fue desarrollada hasta ahora por la comunidad matemática.

El presente artículo, busca explicar los primeros conceptos de esta geometría axiomática, exponiendo primeramente cómo puede concebirse la idea de dimensiones negativas de una manera intuitiva en una primera parte, pasando luego a una explicación formal de la construcción de los $\mathbb{Z}$ - espacios, que son el conjunto y el marco en el que se desarrolla esta nueva forma de concebir la geometría y finalizando en la explicación también formal de la construcción de un operador que permite relacionar los objetos geométricos que se encuentran en estos $\mathbb{Z}$ - espacios.

2 | DESARROLLO

Históricamente el estudio de la Geometría Axiomática Clásica, desde Euclides hasta Hilbert y Tarski, ha partido de conceptos primitivos los que, al ser intuitivos,

1 Matemático titulado de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) en La Paz, Bolivia y autor del documento de investigación Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta Inicial para Generalizar los Términos Primitivos de la Geometría.

2 Doctor en matemáticas y actual docente emérito de la Carrera de Matemática de la UMSA.

3 Doctor en física, actual docente emérito de la Carrera de Física de la UMSA y Director del laboratorio de Ciencia de Materiales.

no necesitaban de una definición formal; sin embargo, estos conceptos no definidos hacen de la geometría así estudiada un caso especial y/o particular de la geometría axiomática del estudio de Dimensiones en $\mathbb{Z}$.

En matemáticas, las principales herramientas básicas son la abstracción y la generalización. A través de Dimensiones en $\mathbb{Z}$, se generalizan los conceptos primitivos de la geometría, conceptos como *punto, recta, plano, espacio* y *yace en*, lo que permite demostrar los axiomas de Hilbert, y por otro lado, viabilizar la existencia de dimensiones negativas.

2.1 ¿A qué se refieren las dimensiones negativas?

Hay diferentes maneras de percibir las dimensiones negativas, en esta sección se expondrán tres de ellas, dos que toman como punto de partida la geometría euclidiana pero terminan expandiéndola, y la tercera que considera el álgebra lineal.

I. Primera percepción geométrica

En la geometría euclidiana solo se consideran objetos que pueden ser percibidos por el ser humano a través de sus sentidos, vale decir, solo considera objetos de hasta tres dimensiones. En este sentido, podemos pensar; por ejemplo, en una caja cuadrada de cartón. Esta caja es tridimensional, dado que presenta altura, anchura y profundidad; sin embargo, dependiendo del ángulo desde donde observemos la caja, podríamos percibirla de diferente manera, vale decir como si estuviera en una dimensión diferente, y más específicamente, como si estuviera en una dimensión menor.

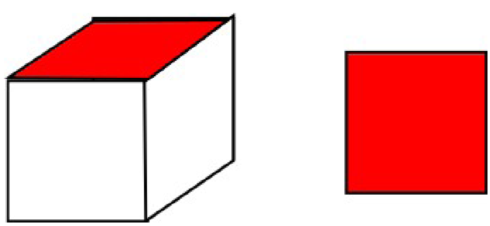


Figura 1. Caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Apelando a la imaginación del lector, si observáramos la caja desde arriba, lo que veríamos sería uno de los lados de la caja, el superior, y observaríamos un cuadrado que está en dos dimensiones. De esta manera, estaríamos percibiendo a este objeto tridimensional como si estuviera en una dimensión inferior; es decir, como si fuera un objeto bidimensional.

De la misma manera, si tomáramos un paralelogramo y lo observáramos de lado, lo que veríamos sería uno de los lados del paralelogramo; vale decir, lo que veríamos sería una línea, la cual se encuentra en dimensión uno, de forma que estaríamos percibiendo a un objeto bidimensional como si fuera un objeto unidimensional.

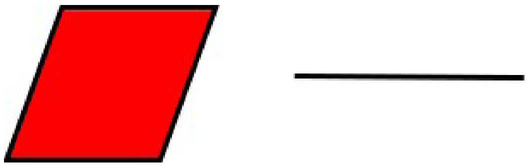


Figura 2. Lado de una caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Finalmente, podríamos tomar un pincel que represente una recta en dimensión uno. Si observáramos el pincel de tal forma que solo podamos ver su parte posterior y no sea posible ver su mango, lo que veríamos sería un punto, el cual se encuentra en dimensión cero. Así, al igual que en los ejemplos anteriores, estaríamos percibiendo un objeto de una dimensión dada, en este caso un objeto unidimensional, como si estuviera en una dimensión inferior, en el caso de este ejemplo, en dimensión cero.

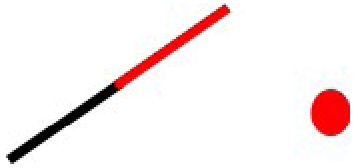


Figura 3. Recta vista en diferentes ángulos

Si pudiéramos ser capaces de agarrar un punto, y verlo desde un ángulo que nos permita apreciarlo en una dimensión menor a la dimensión en la que se encuentra, lo que observaríamos sería un objeto en una dimensión inferior a la del punto; es decir, un objeto en dimensión menor a cero, un objeto en dimensión negativa (en dimensión -1).

Nuestra capacidad visual no nos permite percibir objetos que se encuentren en dimensiones menores a la del punto; no obstante, esto no significa que tales dimensiones no podrían existir. En los ejemplos que acabamos de ver, dependiendo del ángulo desde donde lo veamos, un cubo puede verse como un cuadrado, un cuadrado puede verse como una recta, una recta puede verse como un punto, y un punto puede verse como un objeto en dimensión -1. Esta idea nos conduce a construcciones abstractas de dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, generándose de esta manera las dimensiones negativas.

II. Segunda percepción geométrica

La segunda forma de percibir la existencia de dimensiones negativas, es mediante la observación de las partes de un objeto geométrico.

En el ejemplo de la caja de cartón, este objeto tridimensional, que puede abstraerse como un cubo, está formado por seis caras, donde cada cara se encuentra en dimensión dos. Cada cara de este cubo está formada por cuatro lados o cuatro líneas, donde cada línea se encuentra en dimensión uno. Cada línea o cada recta está formada por infinitos puntos, donde cada punto se encuentra en dimensión cero. Podemos observar entonces, que las partes de cualquier objeto dado se encuentran en una dimensión inferior a este. En este sentido, las partes de un punto tendrían que encontrarse en una dimensión inferior a cero, en dimensión -1. Realizando este ejercicio de manera indefinida, nuevamente se construyen dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, donde en caso de existir las dimensiones negativas, los objetos que se encontrarían en ellas serían partes de objetos iguales o más pequeños que el punto.

III. Percepción desde el álgebra lineal

Una última forma de apreciar la existencia de dimensiones negativas, es partiendo esta vez del álgebra lineal. Para observar esto, debemos comenzar realizando algunos ejemplos de incidencia:

Ejemplos de incidencia

Previamente introduciremos la noción de *objeto geométrico*: Se entiende por objeto geométrico a los objetos completos que abarcan toda una dimensión, por ejemplo, puntos, rectas, planos, etc. Por tanto, no se refiere a objetos geométricos en el sentido clásico (triángulos, cuadrados, circunferencias, esferas, cubos, etc.) si no a objetos abstractos generales.

La notación que emplearemos para los objetos geométricos es la siguiente:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde el número de coordenadas de la *n*-ada ordenada determina donde se encuentra el objeto en cuestión, mientras que el número de variables de la *n*-ada ordenada dirá de que objeto geométrico se trata.

Por ejemplo, si fijamos un n=3, los objetos en cuestión se encontrarán en un espacio de tres dimensiones. Si esta 3-ada ordenada no contiene ninguna variable, como por ejemplo (0,0,0)[4], se tratará de un punto, si contuviera una variable, como por ejemplo (x,0,0) se tratará de una recta, si contuviera dos variables como (x,y,0) se tratará de un plano, etc.

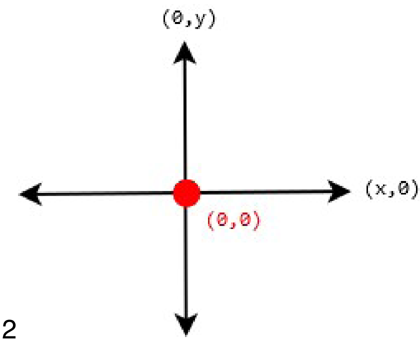
Obsérvese que esta notación sólo funciona para el caso de objetos geométricos que se encuentran en dimensiones de números enteros no negativos. Dicho lo anterior, pasemos a ver los ejemplos de incidencia:

Ejemplo 1. Dos rectas que se intersecan en un punto forman un plano.

Sean dos rectas (x,0) y (0,y) ambas en $\mathbb{R}^2$.

La intersección de estas dos rectas es un punto: $(x,0) \cap (0,y) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (0,y) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$



2

Figura 4. Intersección de dos rectas en un punto

Ejemplo 2. Dos rectas paralelas forman un plano.

Sean las rectas paralelas (x,0) y (x,1) ambas en $\mathbb{R}^2$.

La intersección de estas dos rectas no existe: $(x,0) \cap (x,1) = \emptyset$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (x,1) \in \mathbb{R}^2$

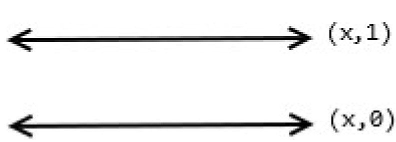


Figura 5. Rectas paralelas

Ejemplo 3. Dos rectas alabeadas[5] forman un espacio de tres dimensiones.

Sean las rectas (0,y,0) y (1,0,z) ambas en $\mathbb{R}^3$

4. Los números que se encuentren en la 3-ada ordenada no necesariamente deben ser cero, pueden ser cualquier otro número real.

5 Afirmamos que dos objetos son alabeados cuando no son paralelos y tampoco se intersecan.

La intersección de estas rectas no existe intuitivamente: $(0, y, 0) \cap (1,0, z) = \emptyset$

Por otro lado, forman el espacio de tres dimensiones: $(0, y, 0) \cup (1,0, z) \in \mathbb{R}^3$

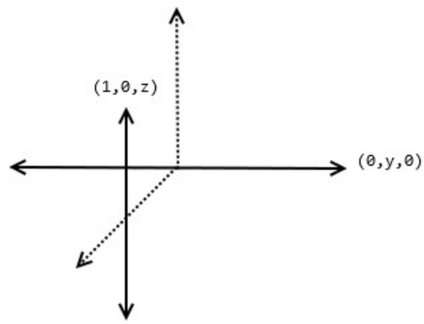


Figura 6. Rectas alabeadas

Los anteriores ejemplos contienen objetos geométricos de hasta tres dimensiones, lo cual permite una representación gráfica. Los siguientes ejemplos se encuentran en dimensiones mayores a tres, no siendo posible su visualización geométrica pero si sus patrones de comportamiento:

Ejemplo 4. Dos planos que están en un espacio de cuatro dimensiones se intersecan en un punto.

Sean los planos $(x,y,0,0)$ y $(0,0,w,z)$ ambos en $\mathbb{R}^4$.

Su intersección es un punto: $(x, y, 0,0) \cap (0,0, w, z) = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$

Por otro lado, estos dos planos forman el espacio de cuatro dimensiones:

$$(x, y, 0,0) \cup (0,0, w, z) = (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4$$

Acá podemos observar un resultado interesante, y es que en la geometría euclidiana la intersección de dos planos nunca puede ser un punto, pero si nos extendemos a un espacio de cuatro dimensiones esta situación cambia.

Ejemplo 5. Dos rectas doblemente alabeadas[6] se encuentran en un espacio de cuatro dimensiones.

Sean las rectas $(x,0,0,0)$ y $(0,1,1,z)$ ambos en $\mathbb{R}^4$

Su intersección no existe intuitivamente: $(x, 0,0,0) \cap (0,1,1, z) = \emptyset$

Ambas forman el espacio de cuatro dimensiones: $(x, 0,0,0) \cup (0,1,1, z) \in \mathbb{R}^4$

De esta manera, se puede observar tres diferentes formas de concebir las dimensiones negativas, pero esta última resulta de mayor importancia, dado que una observación detenida de la misma permite descubrir una relación que puede

6 Se dice que están doblemente alabeadas porque dos de sus coordenadas nunca se van a intersecar, en este sentido, estarán tres veces alabeadas si tres de sus coordenadas nunca se intersecan, y así sucesivamente. Notar por otro lado, que para que dos rectas estén doblemente alabeadas, estas deben estar mínimamente en $\mathbb{R}^4$.

expresarse en forma de ecuación, la cual se presenta a continuación.

Ecuación fundamental intuitiva

De los ejemplos de incidencia mostrados anteriormente pueden notarse las siguientes regularidades:

i) Cuando existe intersección entre los objetos geométricos o estos están alabeados:

$$\delta(A) + \delta(B) - \delta(C) = \delta(D)$$

ii) Cuando los objetos geométricos son paralelos, es decir, cuando

$A \cap B = \emptyset$:

$$\max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1 = \delta(D)$$

Donde:

δ (*A*): Dimensión del objeto geométrico A.

δ (*B*): Dimensión del objeto geométrico B.

δ (*C*): Dimensión de la intersección de A y B.

δ (*D*): Dimensión del objeto formado por A y B.

Una definición más formal de se hará más adelante. Nótese por otro lado, que a los objetos geométricos se los denotará por las primeras letras del abecedario en mayúsculas. Apliquemos estas ecuaciones en los ejemplos presentados anteriormente:

Ejemplo 1. Dimensión del espacio formado por dos rectas que se intersecan en un punto: 1 + 1 - 0= 2

Ejemplo 2. Dimensión del espacio formado por dos rectas paralelas:

max{1,1} + 1 = 2

Ejemplo 3. Dimensión del espacio formado por dos rectas alabeadas:

1 + 1 - (-1) = 3

Nótese que para que este ejemplo cumpla con una de las regularidades de la ecuación fundamental intuitiva, el alabeo debe representar una intersección en dimensiones negativas, lo cual no es nada intuitivo. No es que la intersección de estos objetos no exista, no existe intuitivamente como se mencionó en el ejemplo 3 de la anterior sección, si no que la intersección se encuentra en un espacio de dimensión negativa, en este caso, de dimensión –1, por tanto, en el ejemplo 3 de la anterior sección: $(x, y, 0) \cap (1, 0, z) \in [-1]$[7]

Ejemplo 4. Dimensión del espacio formado por dos planos que se intersecan en un punto: 2+2-0=4

Ejemplo 5. Dimensión del espacio formado por dos rectas doblemente

7. Se definirá formalmente [] más adelante, por el momento es suficiente entender que [-1] se refiere al espacio de dimensión -1.

alabeadas: 1+1-(-2)=4

Al igual que en el caso del ejemplo 3, el doble alabeo representa la intersección en dimensiones negativas, donde: $(x,0,0,0) \cap (0,1,1,z) \in [-2]$

De los ejemplos 3 y 5 por tanto se observa que los alabeos entre objetos son una manifestación de la noción de dimensiones negativas.

Todo lo expuesto en esta subsección tuvo un carácter más intuitivo que formal, a partir de la siguiente subsección se introducen los aspectos formales de esta nueva teoría, comenzando por la construcción del marco donde esta se desarrolla, los $\mathbb{Z}$ - espacios.

2.2 $\mathbb{Z}$ - espacios

Dimensiones en $\mathbb{Z}$, postula axiomas de una geometría nueva cuyas propiedades permiten generalizar los conceptos básicos de la geometría clásica a dimensiones enteras positivas y negativas con base en la teoría de conjuntos, por lo que los desarrollos que serán expuestos en lo que resta del documento tienen base en la axiomática de la teoría de conjuntos tradicional.

En esta subsección se plantearán los conceptos básicos de *conglomerado* y $\mathbb{Z}$ - *espacios,* conceptos sobre los cuales se construye esta nueva geometría.

Partimos entonces de la definición de Conglomerado, para esto consideramos un conjunto no vacío *C* cualquiera y la siguiente función definida sobre este conjunto:

$$\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Esta función se denomina *función de clasificación.* A cada elemento de *C* la función le asigna un número entero, negativo o no negativo, en este sentido, si llamamos *objeto geométrico* a los elementos de *C*, lo que hace la función de clasificación es asignarle a cada objeto geométrico un número entero que corresponderá a la dimensión de ese objeto geométrico.

Haciendo una analogía con la geometría euclidiana, si A es un elemento de *C*, es decir, si *A* є *C* tal que δ(*A*)=0, lo que se está diciendo es que A tiene dimensión cero, o como se diría en geometría euclidiana, A es un punto, de igual manera, si δ(*B*)=1, B es una recta, si δ(*C*)=2, C es un plano, etc. Pero en este caso, no se tendrán solo objetos que bajo la función δ tengan un valor no negativo, sino que también existirá algún objeto D tal que δ(*D*)=-1, y se dirá que D es un objeto de dimensión -1.

Nótese que es así como aparecen objetos de dimensiones negativas en esta nueva geometría, son elementos de un conjunto no vacío *C* tales que bajo la función δ toman valores negativos en los enteros.

Dicho todo lo anterior, formalmente definimos al conglomerado de la siguiente manera:

Definición 1. Supongamos un conjunto no vacío *C* junto con una función δ en los enteros:

$$\delta : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$$

Llamamos al par (*C*,δ) un conglomerado.

Nótese que δ no puede ser la función vacía, ya que como *C* es no vacío, existirá al menos un elemento A en *C* al que se le podrá aplicar la función δ, tal que δ(*A*)=*x* donde *x* será un número entero, de forma que $(A, x) \in \delta$ y $\delta \neq \emptyset$. Este hecho corresponde a la primera proposición:

Proposición 1. δ no es la función vacía.[8]

Ya definido el conglomerado, podemos definir en él una relación que denotaremos con ≡. Dos objetos se relacionarán mediante ≡ solo si ambos están en la misma dimensión, en este sentido, si A_1 y A_2 son rectas, entonces $A_1 \equiv A_2$ porque ambos están en dimensión 1. Lo que permite esta relación es agrupar todos los objetos que tienen la misma dimensión, lo que a su vez permitirá construir los $\mathbb{Z}$ - espacios, como se verá mas adelante.

Formalmente la definimos de la siguiente manera:

Definición 2. Sea un conglomerado (*C*,δ), se define una relación ≡ de *C* × *C* tal que $(\forall (A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}),\ A \equiv B \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(B)$.

Por la siguiente proposición esta es una relación de equivalencia:

Proposición 2. es una relación de equivalencia.

Una relación se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Será reflexiva cuando los objetos se relacionen con sigo mismo, veamos. Si A es un objeto geométrico, A se relaciona consigo mismo mediante ≡ porque δ(*A*) = δ(*A*) . Nótese que esta es una consecuencia de la reflexividad en los números enteros.

Una relación será simétrica siempre que dada una relación *R*, si *aRb* entonces necesariamente *bRa*. La relación ≡ es simétrica por la igualdad en los números enteros, ya que si δ(*A*) = δ(*B*) entonces δ(*B*) = δ(*A*) porque δ(*A*) *y* δ(*B*) son enteros.

Finalmente, una relación será transitiva siempre que dada una relación *R*, si *aRb* y *bRc* entonces necesariamente *aRc*. Nuevamente, por propiedades de los enteros, la relación ≡ es transitiva, dado que si δ(*A*) = δ(*B*) y δ(*B*) = δ(*C*) entonces δ(*A*) = δ(*C*).

El conglomerado por tanto puede particionarse mediante la relación de equivalencia ≡, donde si dos objetos tienen la misma dimensión, se encontrarán en la misma clase de equivalencia.

8 Para una demostración más formal de esta y el resto de las proposiciones presentadas en este documento, acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia*.

Las clases de equivalencia son lo que denominamos $\mathbb{Z}$ - espacios, y cada clase de equivalencia se denotará por [x], donde x es un número entero. Por ejemplo la clase de equivalencia que contiene a todos los puntos es [0], la clase de equivalencia que contiene a todas las rectas es [1], la que contiene a todos los planos es [2] y la clase de equivalencia que contiene a todos los objetos que están en dimensión -1 es [-1], donde [-1],[0],[1],[2] son $\mathbb{Z}$ - espacios. Será de gran utilidad poder representar estos $\mathbb{Z}$ - espacios gráficamente, lo que se desarrolla a continuación:

Representación en grilla

A través de la figura 7 podemos representar los $\mathbb{Z}$ - espacios, lo que permitirá más adelante visualizar las relaciones que se irán definiendo entre los objetos del conglomerado:

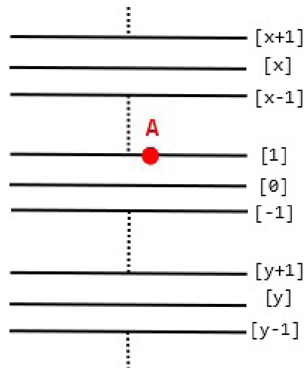


Figura 7. $\mathbb{Z}$ - espacios

Cada línea representa un $\mathbb{Z}$ - espacio, y los puntos sobre cada línea, los objetos de cada $\mathbb{Z}$ - espacio.

En la figura por ejemplo, se observa que A pertenece al $\mathbb{Z}$ - espacio [1], lo que significa que A es una recta, dado que es un objeto que tiene dimensión 1.

Dada la partición del conglomerado y sus clases de equivalencia, vale decir, sus $\mathbb{Z}$ - espacios, podemos definir el conjunto de las clases de equivalencia, es decir, su conjunto cociente, además de una función que tiene como codominio a este conjunto:

Definición 3. Definimos $\bar{C}$ como el cociente $C/\equiv$ y a la función $p{:}C \rightarrow \bar{C}$ como la proyección de C en $\bar{C}$. La clase de equivalencia de un objeto $A \in C$ se denota por $\bar{A}$.

El conjunto cociente por tanto es el conjunto de $\mathbb{Z}$ - espacios:

$$\bar{\mathcal{C}} = \{\cdots, [y-1], [y], [y+1], \cdots, [-1], [0], [1], \cdots, [x-1], [x], [x+1], \cdots\}$$

y la función *p* es la función que asigna a cada objeto del conglomerado su respectiva clase o $\mathbb{Z}$ - espacio.

Nótese que hasta el momento se ha armado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "p"'] & & \delta(\mathcal{C}) \subset \mathbb{Z} \\ & \bar{\mathcal{C}} & \end{tikzcd}$$

Podemos cerrar el diagrama conmutativo que se está formando con una función [ ] definida sobre $\mathbb{Z}$, donde a cada número entero le asigne un $\mathbb{Z}$ - espacio. La definición más formal es la siguiente:

Definición 4. Definimos al levantamiento de δ como la función denotada por [ ] conforme el siguiente diagrama conmutativo, con $[]\circ\,\delta=p$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "p"'] & & \delta(\mathcal{C}) \subset \mathbb{Z} \arrow[dl, "{[\,]}"] \\ & \bar{\mathcal{C}} & \end{tikzcd}$$

Que cierra el diagrama conmutativo.

También definimos formalmente a los $\mathbb{Z}$ - espacios:

Definición 5. Llamamos $\mathbb{Z}$ - espacios a los conjuntos no vacíos $[x] \in \bar{\mathcal{C}}$.

Con todo lo anterior, se presentó el marco en el que se desenvuelve esta nueva teoría, y se creó una relación entre elementos de un mismo $\mathbb{Z}$ - espacio. A continuación, se define una nueva relación que permite relacionar objetos que se encuentran en diferentes $\mathbb{Z}$ - espacios y que más adelante permitirá también definir un operador.

2.3 Operador *t*

La relación binaria *t*, relaciona dos objetos de $\mathbb{Z}$ - espacios consecutivos, vale decir, relaciona un objeto de una dimensión x con otro que se encuentra en la dimensión inmediata superior x + 1.

Utilizando la grilla de la figura 7, la relación t entre dos objetos A y B se representará mediante una flecha que vaya de A hacia B como se muestra a continuación:

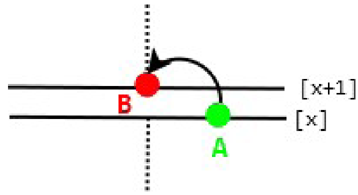


Figura 8. A t relacionado con B: *AtB*

Esta relación generaliza la relación primitiva *yace en* y formalmente se lo define de la siguiente forma:

Definición 6. Supongamos un conglomerado (C,δ) y una relación $t \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en la clase C que cumpla las siguientes condiciones:

D0) Supongamos $A,B \in C$ con $(A,B) \in t$, entonces $\delta(B) = \delta(A)+1$.

D1) Si $(A,x) \in \delta$ entonces existen $(B,x+1),(C,x\text{-}1) \in \delta$ tales que (A,B), $(C,A) \in t$.

D2) Si $(A,x) \in \delta$ entonces existen $(B',x+1),(C',x\text{-}1)$ tales que (A,B'), $(C',A) \notin t$.

Una terna de la forma (C,δ,t) con las propiedades mencionadas en la presente definición y en la definición 1 se denomina *estructura de conglomerado.*

La primera condición nos restringe a relacionar solo objetos que se encuentran en ℤ - espacios consecutivos[9]; por otro lado, la condición D1 afirma que un objeto A siempre va a t – relacionarse con otro B que se encuentre en un ℤ - espacio consecutivo superior y con otro C que se encuentre en un ℤ - espacio consecutivo inferior. Mediante el uso de la grilla, se representa D1 de la siguiente manera:

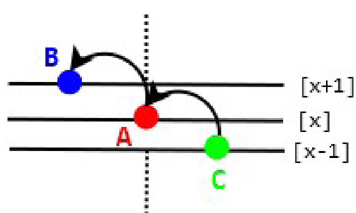


Figura 9. Condición D1

La condición D2 por su parte, afirma que dado cualquier objeto A en cualquier ℤ- espacio, siempre va a existir otro B' en una dimensión consecutiva superior y otro C' en una dimensión consecutiva inferior con los que no se va a relacionar. Gráficamente se lo representa de la siguiente manera:

9 La relación *u* permite relacionar objetos que se encuentran en cualquier ℤ - espacio, no necesariamente consecutivos, generalizando la relación *t*; sin embargo, no se desarrollará la relación *u* en este documento. Si el lector está interesado en conocer mas sobre la relación *u*, se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

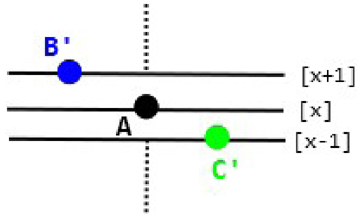


Figura 10. Condición D2

Esta última condición evita que los objetos de un ℤ - espacio se relacionen con todos los objetos de ℤ - espacios inmediatos superiores o inferiores, evitando de esta manera una situación trivial.

La relación t por tanto, en términos coloquiales se refiere a la noción de *estar totalmente en*, donde dos objetos estarán t - relacionados solamente si uno está contenido en el otro.

Relacionar mediante t por ejemplo, un punto con una recta significa que el punto se encuentra en la recta, relacionar una recta con un plano, que la recta se encuentra totalmente en el plano y relacionar un plano con un espacio de tres dimensiones, que el plano se encuentra totalmente en ese espacio.[10]

Finalmente, ahora tenemos las herramientas suficientes para definir operadores:

Operadores t^* y t_*

Definición 7. Sea $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, se definen los conjuntos:

$$t^*(A) = \{B \in [x+1]: AtB\}$$
$$t_*(A) = \{C \in [x-1]: CtA\}$$

Por tanto en $t^*(A)$ estamos fijando un objeto A que se encuentra en una dimensión x, y el operador $t^*(A)$ se refiere a todos los objetos en $[x+1]$ que se t - relacionan con A. Por ejemplo, si A es un punto, $t^*(A)$ son todas las rectas que pasan por el punto A.

Por otro lado, en $t_*(A)$ nos referimos a todos los elementos con los que A se t - relaciona. Por ejemplo, si A es un plano, $t_*(A)$ son todas las rectas que están contenidas en ese plano.[11]

10 La relación t cumple con diversas propiedades; sin embargo, las mismas no se encuentran en los alcances de este documento. Si el lector se encuentra interesado por conocer estas propiedades, se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

11 Para ver mayores detalles sobre los operadores t^* y t se invita al lector a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

3 | CONSIDERACIONES FINALES

Todo lo abarcado en este artículo corresponde al primer capítulo del documento de investigación *Dimensiones en $\mathbb{Z}$: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría* escrito por Andrés Alberdi Baptista. Si el lector se encuentra interesado en profundizar y continuar con los desarrollos expuestos hasta aquí, puede hacerlo ingresando a la página web https://dimensionesenz.blogspot.com donde encontrará el documento de investigación completo y los últimos avances. También puede contactarse a los correos carla.11.mi.cm@gmail.com de la autora de este artículo y aalberdi@gmail.com de Andrés Alberdi Baptista, desarrollador de esta nueva teoría.

Es importante también mencionar que dado que esta nueva teoría aún se encuentra en desarrollo, aún no ha sido publicada; no obstante, ya ha mostrado su relevancia al ser capaz de demostrar los axiomas de incidencia de Hilbert[12], por lo que es necesario que continúen sus desarrollos.

REFERENCIAS

Alberdi, A. **Dimensiones en $\mathbb{Z}$: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría.** La Paz, Bolivia. 2019.

12 La demostración de estos axiomas se encuentra en el documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en $\mathbb{Z}$: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

S

T

U

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020