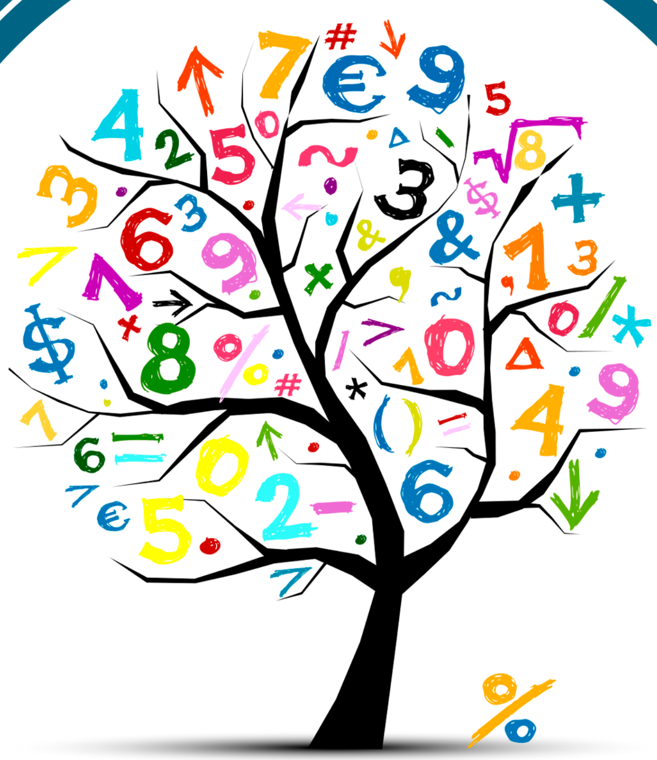
INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

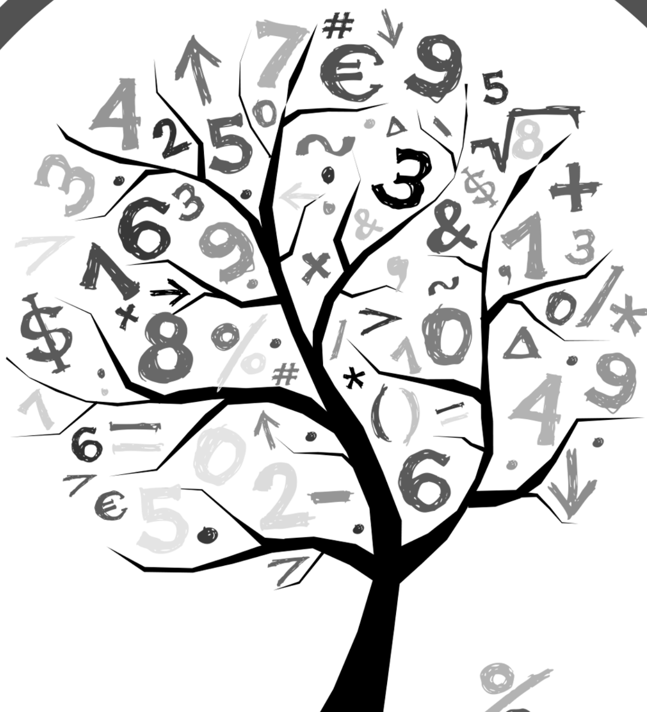
AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Lucas Vieira Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-610-2
DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o "novo" exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro "***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***", em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva
Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira
Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4

SÉRIES INFINITAS

Data de aceite: 17/11/2020

Jesus Carlos da Mota
Universidade Federal de Goiás

RESUMO: As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de gradução em matemática. Séries simples são estudadas ainda no ensino médio através das progressões aritméticas e geométricas. Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não. Neste trabalho, vamos discutir a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 sen(n)^2}$ convergem ou divergem? As respostas serão discutidas ao longo do texto.
PALAVRAS-CHAVE: Séries infinitas, Convergência, Série harmônica, Séries especiais.

ABSTRACT: Numerical series are studied in any undergraduate mathematics course. Simple series are studied in high school through arithmetic and geometric progressions. In general, it is a difficult question to calculate the sum of an infinite series. A question that could be easier is to determine whether the series converges or not, that is, whether the infinite sum is equal to a specific number or not. In this work, we will discuss the convergence of some numerical series, where we will see that convergence can also be a difficult problem. For example, the $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 sen(n)^2}$ series are convergent or not? The answers will be discussed throughout the text.
KEYWORDS: Infinite series, Convergence, Harmonic serie, Special series.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho é o resultado de um mini-curso ministrado no II Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, em Brasília-DF, em agosto de 2015.

O objetivo não é fazer um estudo formal das séries infinitas. Isto é feito em um curso regular de graduação em matemática, onde são estudadas as propriedades e os diversos métodos de convergência de uma série. O objetivo aqui é mostrar através de exemplos algumas curiosidades e dificuldades sobre a convergência das séries infinitas. Alguns destes exemplos serão mostrados através de simulações numéricas.

As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de gradução em matemática. Séries simples, como as geométricas, são estudadas ainda no ensino médio através das progressões geométricas. Mais simples ainda, são as progressões aritméticas, também estudadas no ensino médio.

Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não.

Neste trabalho, discutiremos a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as duas séries citadas no resumo, convergem ou não? Sabemos que a primeira é uma série geométrica de razão igual a 1/2 , e portanto sua soma é facilmente calculada. Já a segunda, não se enquadra em nenhum dos métodos tradicionais de convergência, como Teste da Comparação, Teste da Razão ou de D'Alambert, Teste da Integral, etc. Portanto, estudar sua convergência é um problema difícil.

2 | CONCEITOS BÁSICOS E EXEMPLOS

Os conceitos e resultados básicos serão dados de acordo com a necessidade para o estudo dos exemplo apresentados.

Exemplo 1. Calcular a soma das áreas dos quadrados em destaque da Fig. 1.

Solução: O cálculo resume-se em:

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\ldots=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^{2k}} \qquad (1)$$

A sequência (S_n), onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^{2k}}$ é a sequência das somas parciais da série envolvida.

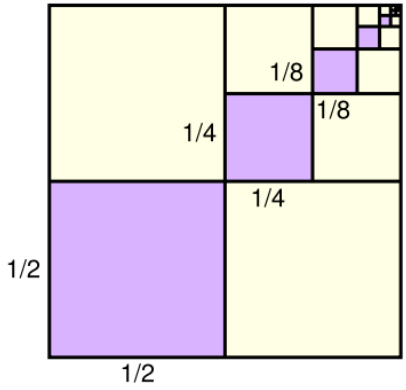


Figura 1: Quadrados com áreas em progressão geométrica

É evidente que esta sequência converge, pois é uma sequência crescente e limitada superiormente por 1 (valor da área do quadrado de lado 1). Para calcularmos o valor exato da soma infinita, devemos primeiramente achar uma fórmula fechada para a soma parcial de ordem n, e depois calcular o limite $\lim_{n\to\infty} S_n$. Neste caso, como os termos de (S_n) formam uma progressão geométrica de razão $r = 1/4$, temos que

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^n - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados é dada por,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

||

Exemplo 2. Fazendo a divisão de 1 por x + 1 obtemos,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

O matemático italiano Guido Castelnuovo (Venezia, 14 agosto 1865 – Roma, 27 abril 1952), em 1903, fez x = 1, e escreveu:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots, \tag{2}$$

se somarmos um número par de termos, $S_{2k} = 0$ *e se somarmos um numero ímpar de termos* $S_{2k-1} = 0$ *Portanto a soma correta é a média aritmética de 0 e 1, isto é,*

$$S = \frac{S_{2k} + S_{2k-1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

||

É claro que esse cálculo é um absurdo, pois 1/2 não pode ser igual a 0 (nem a 1). A conclusão é que a série (2) não converge.

Este exemplo justifica que em uma soma infinita de números reais, que não converge, a propriedade associativa não é válida.

A seguir descrevemos os principais resultados teóricos referidos na solução do Exemplo 1.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função que associa cada número natural n a um número real* a_n *Denotando a sequência por* (a_n) *diz-se que ela é convergente (ou converge) para um número real L, escreve-se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, se *para todo número real* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n > n_0$ implica que $|a_n - L| < \varepsilon$

Caso contrário diz que a sequência é divergente (ou diverge).

Definição 2.2. Se (a_n) é uma sequência, a soma

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

é chamada de série infinita com termo geral a_n. Diz que a série converge ou é convergente, se a sequência de suas somas parciais (S_n) onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$, for convergente. Caso contrário diz-se que a série diverge ou é divergente.

Exemplo 3. Calcule a soma S das áreas dos retângulos sob o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, para x≥1, conforme Fig. 2.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

A primeira peganta é se esta série converge ou diverge. Se ela for divergente, seu "valor" será infinito, pois todos os seus termos são positivos. Por definição devemos calcular o

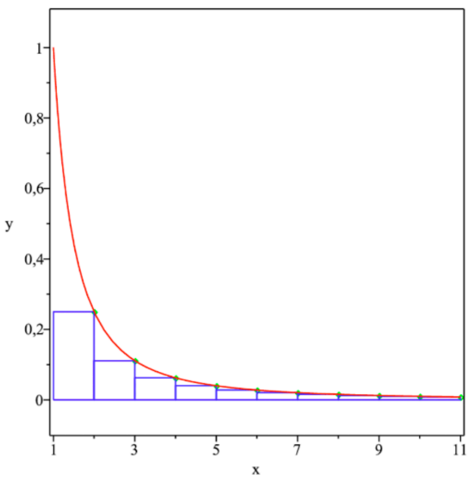


Figura 2

limite das somas parciais (S_n), onde $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

Neste caso, uma fórmula fechada para S_n não é simples. Mas é possível achar uma cota superior para esta soma, que será a área sob o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, para x≥1. Tal área é dada por,

$$A=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{B\to\infty}\int_1^{B}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{B\to\infty}\left(\frac{-1}{B}+1\right)=1.$$

Como as somas parciais é uma sequência monótona crescente e limitada por A = 1, a conclusão é que a soma S é finita, e ainda, menor do que 1, ou seja, a série é convergente.

A segunda pergunta é: qual é a soma da série? Em geral é muito difícil calcular a soma de uma série. Vamos calcular a soma da série (3) no Exemplo 4.

Exemplo 4. **(Problema de Basel)**. Calcule a soma dos inversos dos quadrados inteiros,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solução de Leonhard Euler (1735)

A idéia de Euler é brilhante, ver [2], mas não é uma prova rigorosa. A prova rigorosa veio somente em 1941.

Ele começa com a idéia de que todo polinômio em x pode ser fatorado por fatores da forma x – α, onde α é uma raiz do polinômio, e assume que o mesmo pode ser feito por séries infinitas. Euler olha para a expansão em série de Taylor do seno. (Brook Taylor, Edmonton-Ing, 18 agosto 1685 - Londres-Ing, 29 dezembro 1731)

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$$

Dividindo por *x*, tem-se que

$$\frac{sen\, x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots .$$

Os zeros de $\frac{sen\, x}{x}$ ocorrem em $x = \pm n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$. Supondo que podemos fatorar esta expansão em fatores lineares obtem-se,

$$\frac{sen\, x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

O coeficiente de x^2 na última expressão é $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Por outro lado, o coeficiente de x^2 na expansão de Taylor é -1 / 3! = - 1/6. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta é a soma da série de Basel. ||

Solução rigorosa do problema de Basel (não é necessário fatorar uma série infinita)

Temos que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx\, dy .$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^{n-1}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\,dx\,dy\,.$$

Fazendo a mudança de variáveis *x = u - v e y = u + v, obtemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; 2\int\int_Q \frac{1}{1-u^2+v^2}\,du\,dv, \tag{4}$$

onde *Q* é o losângulo de vértices (0, 0), (1/2, 1/2), (1/2, -1/2) e (1, 0), conforme Fig. 3. Usando as simetrias deste losângulo, temos

$$\int\int_Q\frac{du\,dv}{1-u^2+v^2}=2\int_0^{1/2}\int_0^{u}\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2}+2\int_{1/2}^{1}\int_0^{1-u}\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2}. \tag{5}$$

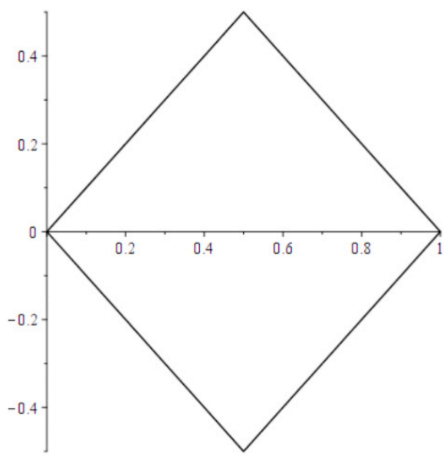


Figura 3

Integrando com relação a *v* cada integral do segundo membro de (5), temos

$$\int\int_Q\frac{du\,dv}{1-u^2+v^2}=2\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du+2\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\,. \tag{6}$$

Para o cálculo da primeira integral do segundo membro de (6) usamos que $arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \;=\; arcsen\,u$, donde

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du \;=\; \int_0^{1/2}\frac{arcsen\,u}{\sqrt{1-u^2}}du \;=\; \frac{1}{2}(arcsen\,u)^2\Big|_{u=0}^{u=1/2}=\frac{\pi^2}{72}. \tag{7}$$

Para o cálculo da segunda integral, fazemos a mudanca de variável $\theta \;=\; arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$. Segue que, $tg^2\theta \;=\; (1-u)/(1+u)$ e $sec^2\theta \;=\; 2/(1+u)$, ou seja $u = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$, donde $\theta = 1/2\, arcos\, u = \pi/4 - 1/2\, arcsen\, u$. Portanto,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{1/2}^{1} \frac{\pi/4 - 1/2\, arcsen\, u}{\sqrt{1-u^2}} du = \left(\frac{\pi\, arcsen\, u}{4} - \frac{arcsen^2 u}{4}\right)\Big|_{u=1/2}^{u=1} = \frac{\pi^2}{36}. \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (6), obtemos

$$\int\int_Q \frac{du\,dv}{1-u^2+v^2} = \frac{2\pi^2}{72} + \frac{2\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Finalmente, substituindo este resultado em (4) , concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad ||$$

Exemplo 5. Como no Exemplo 3, calcule a soma das áreas dos retângulos sob o gráfico da função f (x) = 1 / x , para x ≥ 1, conforme Fig. 4.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta série é a famosa série harmônica. Com certeza, o exemplo mais importante na

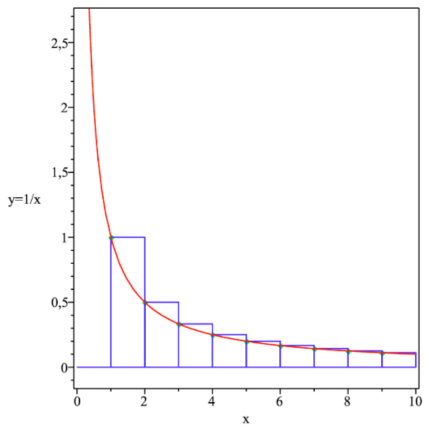


Figura 4

matemática de uma série divergente é o da série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

O nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... (Ver Fig. 5). Usando o Teste da Comparação é fácil verificar que a série harmônica diverge para infinito, pois:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty\,.$$

Voltando ao cálculo de S, a conclusão é que $S = \infty$. Ou seja, a série diverge para ∞. ||

Generalizações da série harmônica:

Exemplo 6. (Série dos inversos dos números primos):

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$$

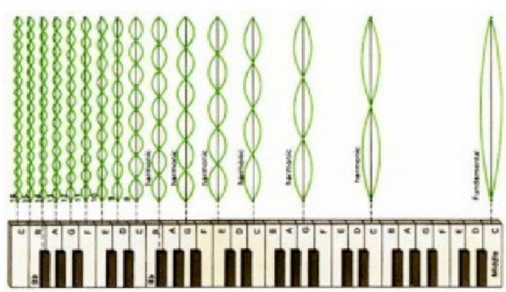


Figura 5. Ilustração do comprimento de onda de uma corda vibrante.

Usando passos de indução, soma da série geométrica, e a série de Taylor, pode-se provar que a série dos inversos dos primos diverge para infinito, ver [6].

Exemplo 7. (Série harmônica alternada):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2.$$

Solução: O resultado é uma consequência do desenvolvimento de Taylor da função $f(x)$]n(1+x) em potências de x. A demonstração completa fica como exercício para o leitor. ||

Exemplo 8. (Série-p):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real positivo. (Se p é negativo facilmente a série é divergente). Se p = 1, a série é a harmônica, e portanto divergente. Pelo Teste da Integral a série é divergente se $p<1$, e é convergente se $p>1$.

Como curiosidade, uma generalização desta série é obtida substituindo o p por um número complexo $z=x+iy$, obtendo a função Zeta de Riemann, denotada por

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}.$$

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, Hanover-Alemanha, 17 setembro 1826 -Selasca-Itália, 20 julho 1866). Em 1856, surgiu um dos problema mais famosos da matemática, ainda não resolvido até hoje, conhecido com a *Hipótese de Riemann: Todos os zeros da função Zeta de Riemann estão sobre a reta x = 1/2 do plano complexo. Quem resolver este problema, com certeza, ficará famoso e ainda ganhará um milhão de dólares do Instituto de Matemática Clay, um centro sediado em Cambridge (Massachusetts) que se dedica ao estudo avançado das ciências exatas.*

Velocidade que a série harmônica diverge

Agora vamos discutir um pouco a velocidade que a série harmônica diverge para infinito. A soma parcial de ordem n da série harmônica, denominada de n-ésimo número harmônico, é dada por

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}.$$

A sequência (S_n) cresce tão rapidamente quanto o logaritmo natural de n. Isto porque a soma é aproximada pelo valor da integral, ver Fig. 4.

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx=\ln n.$$

Pode-se provar que

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-\ln n)=\int_1^\infty\left(\frac{1}{E(x)}-\frac{1}{x}\right)dx=\gamma,$$

onde $E(x)$ é a parte inteira de x, e γ é uma constante real, denominada constante Euler-Mascheroni. (Lorenzo Mascheroni, Bergamo-Itália, 13 maio 1750 – Parigi-Itália, 14 julho 1800).

Euler calculou o valor de γ com 16 casas decimais e Mascheroni calculou com 32. Hoje tem-se esse valor com dezenas de casas decimais, por exemplo com 100 casas decimais o valor é:

$\gamma \approx 0,$ 5772156649015328606065120900824024310421593359399235988O

5767234884867726777664670936947063291 7467495.

Portanto, para n grande o valor da soma parcial S_n pode ser aproximado por

$$S_n \approx \ln n + \gamma, \quad \text{ou} \quad n \approx e^{S_n - \gamma}.$$

Por exemplo, para S_n=17 são necessários somar aproximadamente $n = e^{17-\gamma} \approx 31.557.600$ temos.

Se quesermos que a soma chegue em 100, teremos que somar aproximadamente

$$n = e^{100-\gamma} \approx \text{número muito grande de termos}.$$

Como curiosidade, ver [5, 7] sobre a série harmônica:

"Suponha que exista um computador que pode fazer uma soma em 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância igual ao diâmetro de um elétron. Tal computador seria o mais rápido do universo, pois a velocidade da luz é a máxima neste. Se tal computador fosse somar todas as partes que pudesse da série harmônica em um ano, teria somado $31{,}5576 \times 10^{26}$ termos; em mil anos $31{,}5576 \times 10^{29}$; e em um bilhão de anos $31{,}5576 \times 10^{35}$ termos! Os resultados aproximados que obteríamos, em cada um dos casos, respectivamente seria: 70,804; 77,712 e 91,527. Imagine agora que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há cerca de 15 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,235 para a soma da série harmônica. Vamos além! O número 10^{80} é maior do que todos os valores anteriores, superando até mesmo a quantidade de átomos de todo o universo conhecido. Pois bem, para essa quantidade de termos a soma de todos eles é aproximadamente 184,784 e permanece nesse mesmo valor aumentando-se drasticamente a quantidade de termos, como $10^{80}+10^{9}$ ou $10^{80}+10^{12}$. Veja que a cada passo estamos aumentando enormemente a quantidade de termos, no entanto, a soma S_n permanece a mesma. Em vista disso nada mais natural do que concluir que a série seja convergente. Mas, verificamos acima que isso é falso. Vemos então que jamais descobriríamos a divergência da série harmônica por meios puramente experimentais através de um computador."

Exemplo 9. Estudar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3 \, sen^2 n},$$

denominada de Série Flint Hills (Colinas Pederneiras do Kansas), ver Fig. 6, retirada da referência [3].

Solução: A convergência desta série ainda é um problema em aberto. Existem vários estudos relacionados com o assunto. A discussão a seguir foi retirada da referência [1], e mostra que a convergência está intimamente relacionada com a medida de irracionalidade do número π, denotada por $\mu(\pi)$. Em particular, a convergência da série Flint Hills implica que $\mu(\pi) \leq 2,5$. Mas, o menor limite superior para $\mu(\pi)$ conhecido hoje, é $\mu(\pi) \leq 7,6063...$, obtido em [4]. Portanto, os matemáticos especialistas na área de Teoria do Números, acham o problema da convergência desta série não será resolvido num futuro muito próximo.

Figura 6. Colinas Pederneiras do Kanzas.

Fonte: Google

A seguir, apresentamos mais alguns resultados relacionados a série de Flint Hills.

Definição 2.3. A medida de irracionalidade $\mu(x)$ de um número positivo x é definida como o ínfimo em m, tal que a desigualdade

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m} \tag{9}$$

é válida somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q. Se não existe uma tal m, então $\mu(x) = +\infty$.

Observamos aqui que números co-primos ou primos entre si, são os números de um conjunto onde o único divisor comum a todos eles é o número 1. Dois números a e b são co-primos se, e somente se, *mdc* $(a,b) = 1$. Exemplos de números co-primos: 7, 6 e 9; 3, 7 e 22; 11 e 27. Dois números pares nunca podem ser co-primos, pois se são pares, são divisíveis por 2.

Exercício 1. Mostre que se x é racional, então $\mu(x) = 1$.

Convergência da Série de Flint Hills

Lema 2.4. Para todo número real *x,* I*senx* I≤ I *x* I além do mais , se $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, então, $|sen\,x|\geqslant\frac{2}{\pi}|x|$.

Dem. A primeira desigualdade segue das seguintes estimativas:

$$|sen\,x|=|\int_0^x\cos y\,dy|\leqslant\int_0^{|x|}|\cos y|\,dy\leqslant\int_0^{|x|}1\,dy=|x|.$$

Para provar a segunda desigualdade, observe que *Isen xI = sen IxI* e sem perda de generalidade vamos assumir que 0 ≤ *x* ≤ *π* / 2. Se x_0= arcoos I*π* / 2I então para $x \leq x_0$ temos que cos *x* ≥ *π* / 2 e assim

$$sen\,x=\int_0^x\cos y\,dy\geqslant\int_0^x\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}x.$$

Por outro lado, para $x \geq x_0$ temos que cos *x* ≤ *π* / 2 e assim

$$sen\,x=1-\int_x^{\pi/2}\cos y\,dy\geqslant 1-\int_x^{\pi/2}\frac{2}{\pi}dy=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{2}{\pi}x.$$

O que completa a demonstração. ||

Teorema 2.5. Para quaisquer dois números positivos *u* e *v*,

$\frac{1}{n^u|sen\,n|^v}=O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right)$, para todo $\mathcal{E}>0$. Alem do mais,

1. Se $\mu(\pi)$<1 + *u/v* a sequência $\frac{1}{n^u|senn|^v}$ converge para 0.

2. Se $\mu(\pi)$>1 + *u/v* a sequência $\frac{1}{n^u|senn|^v}$ diverge.

OBS: *f(n)=O(g(n)),* significa que *If(n)I < M g(n)* para *n* suficientemente grande, onde *M* é uma constante positiva.

Dem. Seja $\mathcal{E}>0$ e $k=\mu(\pi)+\epsilon/v$. Então a desigualdade

$$|\pi-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^k}$$

vale somente para um número finito de co-primos inteiros positivos *p* e *q.* Para um inteiro positivo *n.* seja $m=\left[\frac{n}{\pi}\right]$, tal que $|\frac{n}{\pi}-m|<\frac{1}{2,}$ e assim $|n-m\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Então pelo Lema 2.4,

$$|senn|=|sen\,(n-m\pi)|\geqslant\frac{2}{\pi}|n-m\pi|=\frac{2}{\pi}m\,|\frac{n}{m}-\pi|.$$

Por outro lado, para *n* e *m* suficientemente grandes, temos que $|\frac{n}{m}-\pi|\geqslant\frac{1}{m^k}$, o que implica que

$$|sen\, n| \geqslant \frac{2}{\pi} m \left|\frac{n}{m} - \pi\right| \geqslant \frac{2}{\pi} \frac{1}{m^{k-1}} \geqslant c \frac{1}{n^{k-1}},$$

para algum $c > 0$ dependendo somente de k mas não de n (desde que $n/m \to \pi$ quando $n \to \infty$). Portanto para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} \leqslant \frac{1}{c^v n^{u-(k-1)v}} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right).$$

Se $\mu(\pi) < 1 + u/v$, considere $\epsilon = \frac{v}{2}(1 + u/v - \mu(\pi))$, e a afirmação 1 segue, pois

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right) = O\left(\frac{1}{n^\epsilon}\right).$$

Vamos provar agora a afirmação 2. $\mu(\pi) > 1 + u/v$, então, para $k=1+u/v$ a desigualdade (9) vale para um número infinito de co-primos inteiros positivos p e q. Isto é, existe uma sequência de racionais p_i/q_i tais que $|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C \frac{1}{p_i^{k-1}}$, para alguma constante $C > 0$ que depende somente de k. Portanto, para $n=p_i$ temos

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} > C^v n^{v(k-1)-u} = C^v.$$

Por outro, lado temos

$|sen(1+p_i)| = |sen(1+p_i - q_i\pi)| \to sen(1)$, quando $i \to \infty$

e assim,

$$\frac{1}{(1+p_i)^u |sen(1+p_i)|^v} \to 0.$$

Concluimos que a sequência $\frac{1}{n^u |senn|^v}$ diverge, pois ela contém duas subsequências, uma limitada inferiormente por uma constante, e a outra que tende a zero. $\|$

Corolário 2.6. Para quaisquer números reais positivos u e v,

1. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |senn|^v}\right)$ converge, então $\mu(\pi) \leq 1+u/v$.
2. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |senn|^v}\right)$ diverge, então $\mu(\pi) \geq u/v$.

Dem. A prova de cada item é dada por contradição, como consequência imediata do Teorema 2.5.

Corolário 2.7. Se a série Flint Hills $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n}$, converge, então $\mu(\pi) \leqslant \frac{5}{2}$.

Dem. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n}$, implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n} = 0$, portanto pelo Corolário 2.6 $\mu(\pi) \leqslant \frac{5}{2}$. $\|$

Teorema 2.8. Para quaisquer números reais positivos *u* e *v*, se $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v}$ converge.

Dem. A desigualdade $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$ implica que *u*-*v* ($\mu(\pi)$-1)>1.Então, existe $\epsilon > 0$, tal que $w=u-v\,(\mu(\pi)-1)-\epsilon>1$. Pelo Teorema 2.5,

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} = O\left(\frac{1}{n^w}\right).$$

Portanto,

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = \sum_1^{\infty} O\left(\frac{1}{n^w}\right) = O\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^w}\right) = 0(\zeta(w)) = O(1).$$

||

Corolário 2.9 Para quaisquer números reais positivos *u* e *v*, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |senn|^v}$ diverge, então $\mu(\pi) \geqslant \frac{u-1}{v}$.

Dem. A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 2.8.

O Corolário 2.9 implica que se a série Flint Hills diverge, então $\mu(\pi) \geqslant 1 + \frac{3-1}{2} = 2$.

Mas esta desigualdade já é conhecida como verdadeira. Portanto, como resultado deste corolário nada podemos afirmar sobre a divergência da série Flint Hills.

Exercício 2 Discutir a convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} sen\, n\right)^n}{n}.$$

Obs. Se o leitor tentar e não conseguir, não deve ficar triste, pois muitos já tentaram e também não conseguiram. Pesquisando a literatura, até hoje não vimos nenhum resultado concluindo que esta série converge ou diverge, ou seja permanece ainda como um problema em aberto.

REFERÊNCIAS

[1] ALEKSEYEV, M. A.. **On convergence of the Flint Hills series.** arXiv:1104.5100v1 [math. CA], 2011.

[2] MATHEUS, C.. **Soma dos inversos dos quadrados dos inteiros.** Disquisitiones Mathematicae (Versão Portuguesa). Outubro 2008. https://cmssmatheus.wordpress.com /tag/ soma-dos-inversos-dos-quadrados-dos-inteiros. Acessado em 12/09/2020.

[3] GOOGLE. **Flint Hills Kansas.** https://www.google.com.br/search?q=flint+hills+kansas. Acessado em 10/08/2015.

[4] SALIKHOV. V. K.. **On the irrationality measure of** π. Russ. Math. Surv. 63(3): 570–572, 2008.

[5] WEISSTEIN, E. W. . **Harmonic series.** From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html. Acessado em 10/09/2020.

[6] WIKIPEDIA. **Série dos inversos dos primos.** https://pt.wikipedia.org/wiki/Série dos inversos dos primos. Acesso em 17/09/2020.

[7] _______. **Series-mathematics.** https://en.wikipedia.org/wiki/Series-mathematics. Acessado em 10/08/2015.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

S

T

U

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020