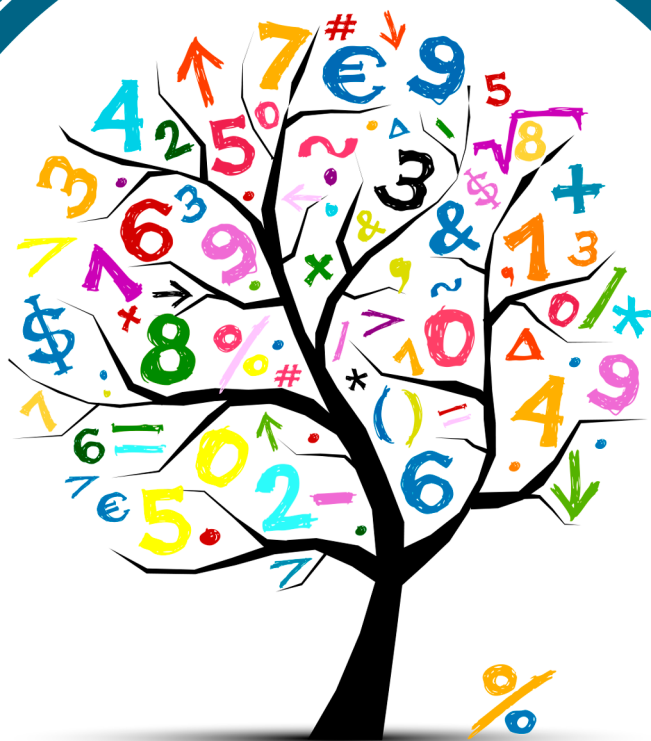


INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliariari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás

Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

162 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-610-2

DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro ***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
MATHEMATICAL MODELING AND BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TURBULENT FLOW IN INCOMPRESSIBLE NEWTONIAN FLUIDS AROUND ISOTHERMAL GEOMETRIES	
Rômulo Damasclin Chaves dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.1022010121	
CAPÍTULO 2	19
MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO	
Francisco Cleuton de Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010122	
CAPÍTULO 3	35
DIMENSÕES EM \mathbb{Z} AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA	
Carla Maldonado Ivankovic	
DOI 10.22533/at.ed.1022010123	
CAPÍTULO 4	50
SÉRIES INFINITAS	
Jesus Carlos da Mota	
DOI 10.22533/at.ed.1022010124	
CAPÍTULO 5	65
ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO	
Hislley Feitosa Meneses	
Valtercio de Almeida Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.1022010125	
CAPÍTULO 6	81
O PERCURSO PROFISSIONAL DE MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO E A GEOMETRIA DIFERENCIAL NO BRASIL	
Antonio José Melo de Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.1022010126	
CAPÍTULO 7	90
PROCESO COORDINADO DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	
María Teresa Costado Dios	
José Carlos Piñero Charlo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010127	
CAPÍTULO 8	100
A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA DE ÁREA E PERÍMETRO	

DAS FIGURAS PLANAS

Selma de Nazaré Vilhena Machado
Alessandra Maués Quaresma
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa
Crislaine Pereira Antunes
Eldon Ricardo Souza Pereira
Eusom Passos Lima
Gilvan de Souza Marques
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Karoline de Sarges Fonseca
Mayanna Cayres Oliveira
Mauro Sérgio Santos de Oliveira
Simeí Barbosa Paes

DOI 10.22533/at.ed.1022010128

CAPÍTULO 9.....113

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS DE APRENDIZAGEM POR ALUNOS DO ENSINO ELEMENTAR

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes
Maria Isabel Piteira do Vale

DOI 10.22533/at.ed.1022010129

CAPÍTULO 10..... 130

O USO DE JOGOS E DINÂMICAS EM GRUPO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES NA PRÁTICA NO PRIMEIRO ESTÁGIO

Leonardo Pospichil Lima Neto
Lisandro Bitencourt Machado

DOI 10.22533/at.ed.10220101210

CAPÍTULO 11 139

ENTENDIMENTOS DE PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O USO [OU NÃO] DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Renaura Matos de Souza
Ilvanete dos Santos de Souza
Américo Junior Nunes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.10220101211

CAPÍTULO 12..... 154

CURRÍCULO E FORMAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DOCÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: O DESAFIO DOS ANOS INICIAIS

Julio Robson Azevedo Gambarra

DOI 10.22533/at.ed.10220101212

CAPÍTULO 13..... 167

PERFIL DE UNIÃO DAS TURMAS DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DA UFAL CAMPUS ARAPIRACA

Allanny Karla Barbosa Vasconcelos

Gilmar dos Santos Batista
Karolayne Stefanny de Farias Holanda
DOI 10.22533/at.ed.10220101213

SOBRE OS ORGANIZADORES	175
ÍNDICE REMISSIVO.....	177

CAPÍTULO 4

SÉRIES INFINITAS

Data de aceite: 17/11/2020

Jesus Carlos da Mota

Universidade Federal de Goiás

RESUMO: As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de graduação em matemática. Séries simples são estudadas ainda no ensino médio através das progressões aritméticas e geométricas. Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não. Neste trabalho, vamos discutir a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen} |n|^2}$ convergem ou divergem?

As respostas serão discutidas ao longo do texto.

PALAVRAS-CHAVE: Séries infinitas, Convergência, Série harmônica, Séries especiais.

ABSTRACT: Numerical series are studied in any undergraduate mathematics course. Simple series are studied in high school through arithmetic and geometric progressions. In general, it is a difficult question to calculate the sum of an infinite series. A question that could be easier is to determine whether the series converges or not, that is, whether the infinite sum is equal to a specific number or not. In this work, we will discuss the convergence of some numerical series, where we will see that convergence can also be a difficult

problem. For example, the $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen} |n|^2}$ series are convergent or not? The answers will be discussed throughout the text.

KEYWORDS: Infinite series, Convergence, Harmonic serie, Special series.

1 | INTRODUÇÃO

Este trabalho é o resultado de um mini-curso ministrado no II Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, em Brasília-DF, em agosto de 2015.

O objetivo não é fazer um estudo formal das séries infinitas. Isto é feito em um curso regular de graduação em matemática, onde são estudadas as propriedades e os diversos métodos de convergência de uma série. O objetivo aqui é mostrar através de exemplos algumas curiosidades e dificuldades sobre a convergência das séries infinitas. Alguns destes exemplos serão mostrados através de simulações numéricas.

As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de graduação em matemática. Séries simples, como as geométricas, são estudadas ainda no ensino médio através das progressões geométricas. Mais simples ainda, são as progressões aritméticas, também estudadas no ensino médio.

Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a

série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não.

Neste trabalho, discutiremos a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as duas séries citadas no resumo, convergem ou não? Sabemos que a primeira é uma série geométrica de razão igual a $1/2$, e portanto sua soma é facilmente calculada. Já a segunda, não se enquadra em nenhum dos métodos tradicionais de convergência, como Teste da Comparação, Teste da Razão ou de D’Alambert, Teste da Integral, etc. Portanto, estudar sua convergência é um problema difícil.

2 | CONCEITOS BÁSICOS E EXEMPLOS

Os conceitos e resultados básicos serão dados de acordo com a necessidade para o estudo dos exemplo apresentados.

Exemplo 1. Calcular a soma das áreas dos quadrados em destaque da Fig. 1.

Solução: O cálculo resume-se em:

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \dots = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^{2k}} \quad (1)$$

A sequência (S_n) , onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^{2k}}$ é a sequência das somas parciais da série envolvida.

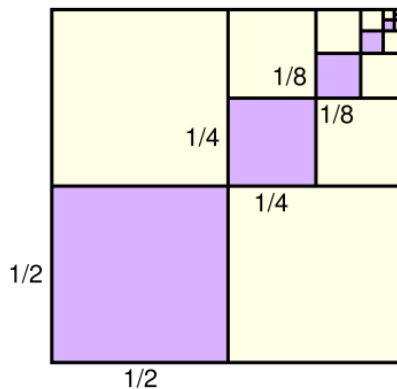


Figura 1: Quadrados com áreas em progressão geométrica

É evidente que esta sequência converge, pois é uma sequência crescente e limitada superiormente por 1 (valor da área do quadrado de lado 1). Para calcularmos o valor exato da soma infinita, devemos primeiramente achar uma fórmula fechada

para a soma parcial de ordem n , e depois calcular o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Neste caso, como os termos de (S_n) formam uma progressão geométrica de razão $r = 1/4$, temos que

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados é dada por,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \quad \parallel$$

Exemplo 2. Fazendo a divisão de 1 por $x + 1$ obtemos,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

O matemático italiano Guido Castelnuovo (Veneza, 14 agosto 1865 – Roma, 27 abril 1952), em 1903, fez $x = 1$, e escreveu:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad (2)$$

se somarmos um número par de termos, $S_{2k} = 0$ e se somarmos um número ímpar de termos $S_{2k-1} = 1$. Portanto a soma correta é a média aritmética de 0 e 1, isto é,

$$S = \frac{S_{2k} + S_{2k-1}}{2} = \frac{1}{2}. \quad \parallel$$

É claro que esse cálculo é um absurdo, pois $1/2$ não pode ser igual a 0 (nem a 1). A conclusão é que a série (2) não converge.

Este exemplo justifica que em uma soma infinita de números reais, que não converge, a propriedade associativa não é válida.

A seguir descrevemos os principais resultados teóricos referidos na solução do Exemplo 1.

Definição 2.1. Uma sequência de números reais é uma função que associa cada número natural n a um número real a_n . Denotando a sequência por (a_n) diz-se que ela é convergente (ou converge) para um número real L , escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, se para todo número real $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ implica que $|a_n - L| < \varepsilon$. Caso contrário diz-se que a sequência é divergente (ou diverge).

Definição 2.2. Se (a_n) é uma sequência, a soma

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

é chamada de série infinita com termo geral a_n . Diz-se que a série converge ou é convergente, se a sequência de suas somas parciais (S_n) onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$, for convergente. Caso contrário diz-se que a série diverge ou é divergente.

Exemplo 3. Calcule a soma S das áreas dos retângulos sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x \geq 1$, conforme Fig. 2.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum \frac{1}{n^2} \quad (3)$$

A primeira pergunta é se esta série converge ou diverge. Se ela for divergente, seu “valor” será infinito, pois todos os seus termos são positivos. Por definição devemos calcular o

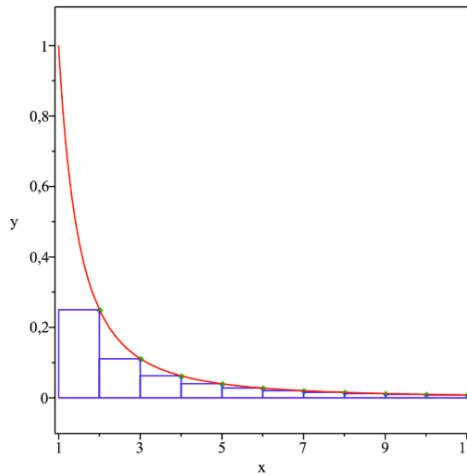


Figura 2

limite das somas parciais (S_n), onde $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

Neste caso, uma fórmula fechada para S_n não é simples. Mas é possível achar uma cota superior para esta soma, que será a área sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x \geq 1$. Tal área é dada por,

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{B} + 1 \right) = 1.$$

Como as somas parciais é uma sequência monótona crescente e limitada por $A = 1$, a conclusão é que a soma S é finita, e ainda, menor do que 1, ou seja, a série é convergente.

A segunda pergunta é: qual é a soma da série? Em geral é muito difícil calcular a soma de uma série. Vamos calcular a soma da série (3) no Exemplo 4.

Exemplo 4. (Problema de Basel). Calcule a soma dos inversos dos quadrados inteiros,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solução de Leonhard Euler (1735)

A idéia de Euler é brilhante, ver [2], mas não é uma prova rigorosa. A prova rigorosa veio somente em 1941.

Ele começa com a idéia de que todo polinômio em x pode ser fatorado por fatores da forma $x - \alpha$, onde α é uma raiz do polinômio, e assume que o mesmo pode ser feito por séries infinitas. Euler olha para a expansão em série de Taylor do seno. (Brook Taylor, Edmonton-Ing, 18 agosto 1685 - Londres-Ing, 29 dezembro 1731)

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Dividindo por x , tem-se que

$$\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Os zeros de $\frac{\text{sen } x}{x}$ ocorrem em $x = \pm n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Supondo que podemos fatorar esta expansão em fatores lineares obtém-se,

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

O coeficiente de x^2 na última expressão é $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Por outro lado, o coeficiente de x^2 na expansão de Taylor é $-1/3! = -1/6$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta é a soma da série de Basel. ||

Solução rigorosa do problema de Basel (não é necessário fatorar uma série infinita)

Temos que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx dy.$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^{n-1} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = u - v$ e $y = u + v$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \int \int_Q \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv, \quad (4)$$

onde Q é o losângulo de vértices $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$ e $(1, 0)$, conforme Fig. 3. Usando as simetrias deste losângulo, temos

$$\int \int_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2} = 2 \int_0^{1/2} \int_0^u \frac{dv du}{1-u^2+v^2} + 2 \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv du}{1-u^2+v^2}. \quad (5)$$

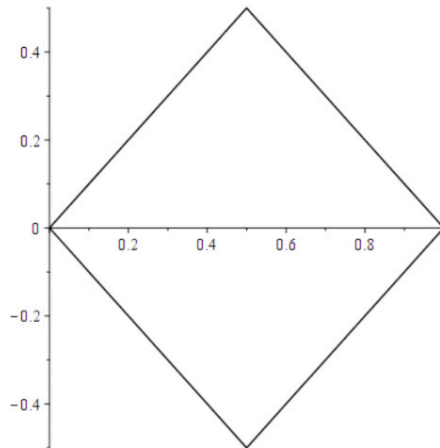


Figura 3

Integrando com relação a v cada integral do segundo membro de (5), temos

$$\int \int_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2} = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du. \quad (6)$$

Para o cálculo da primeira integral do segundo membro de (6) usamos que $\arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsenu$, donde

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du = \int_0^{1/2} \frac{\arcsenu}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} (\arcsenu)^2 \Big|_{u=0}^{u=1/2} = \frac{\pi^2}{72}. \quad (7)$$

Para o cálculo da segunda integral, fazemos a mudança de variável $\theta = \arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$. Segue que, $tg^2 \theta = (1-u)/(1+u)$ e $sec^2 \theta = 2/(1+u)$,

ou seja $u = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos(2\theta)$, donde $\theta = 1/2 \arccos u = \pi/4 - 1/2 \arcsen u$.
 Portanto,

$$\int_{1/2}^1 \frac{\arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{1/2}^1 \frac{\pi/4 - 1/2 \arcsen u}{\sqrt{1-u^2}} du = \left(\frac{\pi \arcsen u}{4} - \frac{\arcsen^2 u}{4} \right) \Big|_{u=1/2}^{u=1} = \frac{\pi^2}{36}. \quad (8)$$

Substituindo (7) e (8) em (6), obtemos

$$\iint_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2} = \frac{2\pi^2}{72} + \frac{2\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Finalmente, substituindo este resultado em (4), concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad ||$$

Exemplo 5. Como no Exemplo 3, calcule a soma das áreas dos retângulos sob o gráfico da função $f(x) = 1/x$, para $x \geq 1$, conforme Fig. 4.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta série é a famosa série harmônica. Com certeza, o exemplo mais importante na

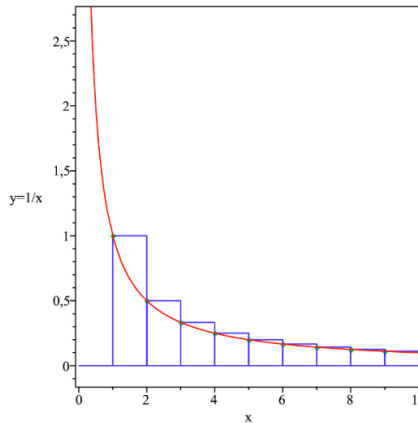


Figura 4

matemática de uma série divergente é o da série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

O nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... (Ver Fig. 5). Usando o Teste da Comparação é fácil verificar que a série harmônica diverge para infinito, pois:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.$$

Voltando ao cálculo de S , a conclusão é que $S = \infty$. Ou seja, a série diverge para ∞ . II

Generalizações da série harmônica:

Exemplo 6. (Série dos inversos dos números primos):

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

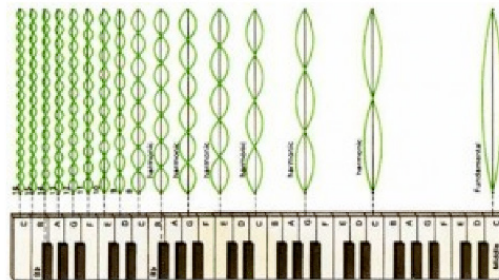


Figura 5. Ilustração do comprimento de onda de uma corda vibrante.

Usando passos de indução, soma da série geométrica, e a série de Taylor, pode-se provar que a série dos inversos dos primos diverge para infinito, ver [6].

Exemplo 7. (Série harmônica alternada):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Solução: O resultado é uma consequência do desenvolvimento de Taylor da função $f(x) = \ln(1+x)$ em potências de x . A demonstração completa fica como exercício para o leitor. ||

Exemplo 8. (Série-p):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real positivo. (Se p é negativo facilmente a série é

divergente). Se $p = 1$, a série é a harmônica, e portanto divergente. Pelo Teste da Integral a série é divergente se $p < 1$, e é convergente se $p > 1$.

Como curiosidade, uma generalização desta série é obtida substituindo o p por um número complexo $z = x + iy$, obtendo a função Zeta de Riemann, denotada por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z}.$$

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, Hanover-Alemanha, 17 setembro 1826 -Selasca-Itália, 20 julho 1866). Em 1856, surgiu um dos problemas mais famosos da matemática, ainda não resolvido até hoje, conhecido com a *Hipótese de Riemann*: *Todos os zeros da função Zeta de Riemann estão sobre a reta $x = 1/2$ do plano complexo. Quem resolver este problema, com certeza, ficará famoso e ainda ganhará um milhão de dólares do Instituto de Matemática Clay, um centro sediado em Cambridge (Massachusetts) que se dedica ao estudo avançado das ciências exatas.*

Velocidade que a série harmônica diverge

Agora vamos discutir um pouco a velocidade que a série harmônica diverge para infinito. A soma parcial de ordem n da série harmônica, denominada de n -ésimo número harmônico, é dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}.$$

A sequência (S_n) cresce tão rapidamente quanto o logaritmo natural de n . Isto porque a soma é aproximada pelo valor da integral, ver Fig. 4.

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Pode-se provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \ln n) = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma,$$

onde $E(x)$ é a parte inteira de x , e γ é uma constante real, denominada constante Euler-Mascheroni. (Lorenzo Mascheroni, Bergamo-Itália, 13 maio 1750 – Parigi-Itália, 14 julho 1800).

Euler calculou o valor de γ com 16 casas decimais e Mascheroni calculou com 32. Hoje tem-se esse valor com dezenas de casas decimais, por exemplo com 100 casas decimais o valor é:

$$\gamma \approx 0, 57721566490153286060651209008240243104215933593992359880$$

57672348848677267776646709369470632917467495.

Portanto, para n grande o valor da soma parcial S_n pode ser aproximado por

$$S_n \approx \ln n + \gamma, \quad \text{OU} \quad n \approx e^{S_n - \gamma}.$$

Por exemplo, para $S_n = 17$ são necessários somar aproximadamente $n = e^{17 - \gamma} \approx 31.557.600$ termos.

Se quisermos que a soma chegue em 100, teremos que somar aproximadamente

$$n = e^{100 - \gamma} \approx \text{número muito grande de termos}.$$

Como curiosidade, ver [5, 7] sobre a série harmônica:

“Suponha que exista um computador que pode fazer uma soma em 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância igual ao diâmetro de um elétron. Tal computador seria o mais rápido do universo, pois a velocidade da luz é a máxima neste. Se tal computador fosse somar todas as partes que pudesse da série harmônica em um ano, teria somado $31,5576 \times 10^{26}$ termos; em mil anos $31,5576 \times 10^{29}$; e em um bilhão de anos $31,5576 \times 10^{35}$ termos! Os resultados aproximados que obteríamos, em cada um dos casos, respectivamente seria: 70,804; 77,712 e 91,527. Imagine agora que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há cerca de 15 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,235 para a soma da série harmônica. Vamos além! O número 10^{80} é maior do que todos os valores anteriores, superando até mesmo a quantidade de átomos de todo o universo conhecido. Pois bem, para essa quantidade de termos a soma de todos eles é aproximadamente 184,784 e permanece nesse mesmo valor aumentando-se drasticamente a quantidade de termos, como $10^{80} + 10^9$ ou $10^{80} + 10^{12}$. Veja que a cada passo estamos aumentando enormemente a quantidade de termos, no entanto, a soma S_n permanece a mesma. Em vista disso nada mais natural do que concluir que a série seja convergente. Mas, verificamos acima que isso é falso. Vemos então que jamais descobriríamos a divergência da série harmônica por meios puramente experimentais através de um computador.”

Exemplo 9. Estudar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n},$$

denominada de Série Flint Hills (Colinas Pederneiras do Kansas), ver Fig. 6, retirada da referência [3].

Solução: A convergência desta série ainda é um problema em aberto. Existem vários estudos relacionados com o assunto. A discussão a seguir foi retirada da referência [1], e mostra que a convergência está intimamente relacionada com

a medida de irracionalidade do número π , denotada por $\mu(\pi)$. Em particular, a convergência da série Flint Hills implica que $\mu(\pi) \leq 2,5$. Mas, o menor limite superior para $\mu(\pi)$ conhecido hoje, é $\mu(\pi) \leq 7,6063\dots$, obtido em [4]. Portanto, os matemáticos especialistas na área de Teoria dos Números, acham o problema da convergência desta série não será resolvido num futuro muito próximo.



Figura 6. Colinas Pederneiras do Kansas.

Fonte: Google

A seguir, apresentamos mais alguns resultados relacionados a série de Flint Hills.

Definição 2.3. A medida de irracionalidade $\mu(x)$ de um número positivo x é definida como o ínfimo em m , tal que a desigualdade

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m} \tag{9}$$

é válida somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q . Se não existe uma tal m , então $\mu(x) = +\infty$.

Observamos aqui que números co-primos ou primos entre si, são os números de um conjunto onde o único divisor comum a todos eles é o número 1. Dois números a e b são co-primos se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) = 1$. Exemplos de números co-primos: 7, 6 e 9; 3, 7 e 22; 11 e 27. Dois números pares nunca podem ser co-primos, pois se são pares, são divisíveis por 2.

Exercício 1. Mostre que se x é racional, então $\mu(x) = 1$.

Convergência da Série de Flint Hills

Lema 2.4. Para todo número real x , $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ além do mais, se $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, então, $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$.

Dem. A primeira desigualdade segue das seguintes estimativas:

$$|\operatorname{sen} x| = \left| \int_0^x \cos y \, dy \right| \leq \int_0^{|x|} |\cos y| \, dy \leq \int_0^{|x|} 1 \, dy = |x|.$$

Para provar a segunda desigualdade, observe que $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} |x|$ e sem perda de generalidade vamos assumir que $0 \leq x \leq \pi/2$. Se $x_0 = \arccos |1/\pi|$ então para $x \leq x_0$ temos que $\cos x \geq \pi/2$ e assim

$$\operatorname{sen} x = \int_0^x \cos y \, dy \geq \int_0^x \frac{2}{\pi} \, dy = \frac{2}{\pi} x.$$

Por outro lado, para $x \geq x_0$ temos que $\cos x \leq \pi/2$ e assim

$$\operatorname{sen} x = 1 - \int_x^{\pi/2} \cos y \, dy \geq 1 - \int_x^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \, dy = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{2}{\pi} x.$$

O que completa a demonstração. ||

Teorema 2.5. Para quaisquer dois números positivos u e v ,

$$\frac{1}{n^u |\operatorname{sen} n|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u - (\mu(\pi) - 1)v - \epsilon}}\right), \text{ para todo } \epsilon > 0. \text{ Além do mais,}$$

1. Se $\mu(\pi) < 1 + u/v$ a sequência $\frac{1}{n^u |\operatorname{sen} n|^v}$ converge para 0.

2. Se $\mu(\pi) > 1 + u/v$ a sequência $\frac{1}{n^u |\operatorname{sen} n|^v}$ diverge.

OBS: $f(n) = O(g(n))$, significa que $|f(n)| < M g(n)$ para n suficientemente grande, onde M é uma constante positiva.

Dem. Seja $\epsilon > 0$ e $k = \mu(\pi) + \epsilon/v$. Então a desigualdade

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$$

vale somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q . Para um inteiro positivo n , seja $m = \left[\frac{n}{\pi} \right]$, tal que $\left| \frac{n}{\pi} - m \right| < \frac{1}{2}$, e assim $|n - m\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. Então pelo Lema 2.4,

$$|\operatorname{sen} n| = |\operatorname{sen}(n - m\pi)| \geq \frac{2}{\pi} |n - m\pi| = \frac{2}{\pi} m \left| \frac{n}{m} - \pi \right|.$$

Por outro lado, para n e m suficientemente grandes, temos que $\left| \frac{n}{m} - \pi \right| \geq \frac{1}{m^k}$, o que implica que

$$|\text{sen } n| \geq \frac{2}{\pi} m \left| \frac{n}{m} - \pi \right| \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{m^{k-1}} \geq c \frac{1}{n^{k-1}},$$

para algum $c > 0$ dependendo somente de k mas não de n (desde que $n/m \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$). Portanto para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v} \leq \frac{1}{c^v n^{u-(k-1)v}} = O\left(\frac{1}{n^{u-|\mu(\pi)-1|v-\epsilon}}\right).$$

Se $\mu(\pi) < 1 + u/v$, considere $\epsilon = \frac{v}{2}(1 + u/v - \mu(\pi))$, e a afirmação 1 segue, pois

$$\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u-|\mu(\pi)-1|v-\epsilon}}\right) = O\left(\frac{1}{n^\epsilon}\right).$$

Vamos provar agora a afirmação 2. $\mu(\pi) > 1 + u/v$, então, para $k=1+u/v$ a desigualdade (9) vale para um número infinito de co-primos inteiros positivos p e q .

Isto é, existe uma sequência de racionais p_i/q_i tais que $|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C \frac{1}{p_i^{k-1}}$, para alguma constante $C > 0$ que depende somente de k . Portanto, para $n=p_i$ temos

$$\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v} > C^v n^{v(k-1)-u} = C^v.$$

Por outro lado temos

$$|\text{sen}(1+p_i)| = |\text{sen}(1+p_i - q_i \pi)| \rightarrow \text{sen}(1), \text{ quando } i \rightarrow \infty$$

e assim,

$$\frac{1}{(1+p_i)^u |\text{sen}(1+p_i)|^v} \rightarrow 0.$$

Concluimos que a sequência $\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v}$ diverge, pois ela contém duas subsequências, uma limitada inferiormente por uma constante, e a outra que tende a zero. \parallel

Corolário 2.6. Para quaisquer números reais positivos u e v ,

1. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v}\right)$ converge, então $\mu(\pi) \leq 1 + u/v$.
2. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |\text{sen } n|^v}\right)$ diverge, então $\mu(\pi) \geq u/v$.

Dem. A prova de cada item é dada por contradição, como consequência imediata do Teorema 2.5.

Corolário 2.7. Se a série Flint Hills $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \text{sen}^2 n}$, converge, então $\mu(\pi) \leq \frac{5}{2}$.

Dem. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \text{sen}^2 n}$, implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 \text{sen}^2 n} = 0$, portanto pelo Corolário 2.6 $\mu(\pi) \leq \frac{5}{2}$. \parallel

Teorema 2.8. Para quaisquer números reais positivos u e v , se $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v}$ converge.

Dem. A desigualdade $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$ implica que $u-v(\mu(\pi)-1) > 1$. Então, existe $\epsilon > 0$, tal que $w = u-v(\mu(\pi)-1) - \epsilon > 1$. Pelo Teorema 2.5,

$$\frac{1}{n^u |sen n|^v} = O\left(\frac{1}{n^w}\right).$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v} = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^w}\right) = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^w}\right) = O(\zeta(w)) = O(1). \quad ||$$

Corolário 2.9 Para quaisquer números reais positivos u e v , se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v}$ diverge, então $\mu(\pi) \geq \frac{u-1}{v}$.

Dem. A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 2.8.

O Corolário 2.9 implica que se a série Flint Hills diverge, então $\mu(\pi) \geq 1 + \frac{3-1}{2} = 2$.

Mas esta desigualdade já é conhecida como verdadeira. Portanto, como resultado deste corolário nada podemos afirmar sobre a divergência da série Flint Hills.

Exercício 2 Discutir a convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} sen n\right)^n}{n}.$$

Obs. Se o leitor tentar e não conseguir, não deve ficar triste, pois muitos já tentaram e também não conseguiram. Pesquisando a literatura, até hoje não vimos nenhum resultado concluindo que esta série converge ou diverge, ou seja permanece ainda como um problema em aberto.

REFERÊNCIAS

[1] ALEKSEYEV, M. A.. **On convergence of the Flint Hills series.** arXiv:1104.5100v1 [math. CA], 2011.

[2] MATHEUS, C.. **Soma dos inversos dos quadrados dos inteiros.** Disquisitiones Mathematicae (Versão Portuguesa). Outubro 2008. <https://cmssmatheus.wordpress.com/tag/soma-dos-inversos-dos-quadrados-dos-inteiros>. Acessado em 12/09/2020.

[3] GOOGLE. **Flint Hills Kansas.** <https://www.google.com.br/search?q=flint+hills+kansas>. Acessado em 10/08/2015.

[4] SALIKHOV, V. K.. **On the irrationality measure of π** . Russ. Math. Surv. 63(3): 570–572, 2008.

[5] WEISSTEIN, E. W. . **Harmonic series**. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html>. Acessado em 10/09/2020.

[6] WIKIPEDIA. **Série dos inversos dos primos**. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Série dos inversos dos primos](https://pt.wikipedia.org/wiki/Série_dos_inversos_dos_primos). Acesso em 17/09/2020.

[7] _____. **Series-mathematics**. <https://en.wikipedia.org/wiki/Series-mathematics>. Acessado em 10/08/2015.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra Linear 19, 34

Aprendizagem 20, 84, 100, 101, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 128, 131, 132, 134, 135, 139, 140, 142, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 158, 162, 163, 165

Área 35, 51, 53, 60, 65, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 90, 93, 98, 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 114, 116, 122, 123, 124, 139, 159, 164, 175, 176

B

Benefícios 115, 167, 174

C

Combinação com repetição 65, 67, 68, 72, 74, 79

Conocimiento matemático 90, 91, 92, 93, 94, 98

Contexto 67, 103, 111, 113, 115, 117, 125, 126, 127, 135, 141

Convergência 27, 30, 32, 33, 50, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63

D

Didáctica de las matemáticas 90, 91

Dimensiones en 35, 36, 37, 43, 44, 47, 48, 49

Dimensiones negativas 35, 36, 37, 39, 41, 42, 43

E

Educação matemática 101, 107, 111, 112, 115, 128, 138, 139, 153, 154, 157, 158, 159, 160, 165, 166, 175, 176

Educación primaria 90, 91, 92, 93

Ensino de matemática 130, 131, 132, 134, 135, 152, 153, 154, 160, 161, 165, 175

Ensino elementar 113, 128

Ensino médio 50, 65, 66, 67, 68, 79, 80, 161

F

Formação de professores 111, 112, 139, 153, 154, 155, 156, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 175, 176

G

Geometria 34, 35, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 101, 102, 103, 104, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 125, 176

Geometria plana 101, 108, 109, 111

H

História da matemática 81, 83, 89, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 109, 110, 111, 112

I

Immersed boundary method 1, 2, 3, 13, 17, 18

J

Jogo 130, 132, 135, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 152, 153

L

Laminar and Turbulent Flow 1, 18

Licenciatura 34, 68, 100, 117, 130, 131, 140, 156, 159, 160, 161, 167, 168, 173, 175

M

Manfredo do Carmo 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Matemática 2, 19, 20, 33, 34, 35, 36, 50, 56, 58, 65, 66, 67, 68, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 173, 175, 176

Metodologia de ensino de matemática 130, 160

Métodos de contagem 65, 67, 68, 79, 80

Métodos diretos 19, 20, 27, 33

Métodos iterativos 19, 20, 27, 33

Mixed convection 1, 2, 4

P

Perímetro 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 124

Permutação caótica 65, 75

Permutação circular 65, 67, 68, 69, 70, 71, 79

Prática docente 130, 131, 132, 152, 154, 165

Primeiro estágio 130, 132

Professor que ensina matemática 139, 154, 162, 165

R

Raciocínio lógico 102, 130, 132, 137, 139, 140, 146, 147, 149, 150, 152

Resolução de problemas 34, 66, 115, 116, 117, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 153

S

Série harmônica 50, 56, 57, 58, 59

Séries especiais 50

Séries infinitas 50, 54

Sistemas lineares 19, 20, 27, 34

T

Tarefas matemáticas 113, 114, 115, 116, 117, 128

Trabajo colaborativo 90, 91

U

União 167, 168, 171, 172, 173, 174

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 