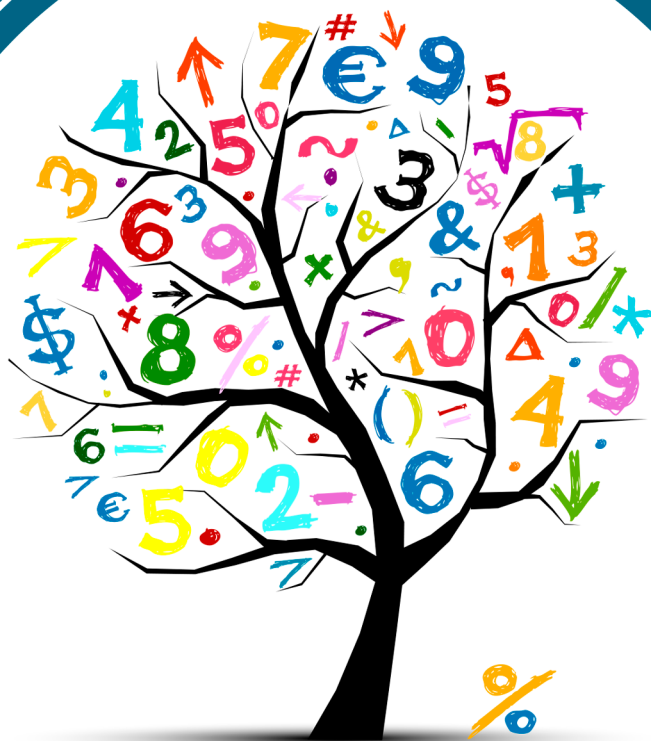


INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará
Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof^ª Dr^ª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliariari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás

Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

162 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-610-2

DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro ***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
MATHEMATICAL MODELING AND BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TURBULENT FLOW IN INCOMPRESSIBLE NEWTONIAN FLUIDS AROUND ISOTHERMAL GEOMETRIES	
Rômulo Damasclin Chaves dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.1022010121	
CAPÍTULO 2	19
MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO	
Francisco Cleuton de Araújo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010122	
CAPÍTULO 3	35
DIMENSÕES EM \mathbb{Z} AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA	
Carla Maldonado Ivankovic	
DOI 10.22533/at.ed.1022010123	
CAPÍTULO 4	50
SÉRIES INFINITAS	
Jesus Carlos da Mota	
DOI 10.22533/at.ed.1022010124	
CAPÍTULO 5	65
ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO	
Hislley Feitosa Meneses	
Valtercio de Almeida Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.1022010125	
CAPÍTULO 6	81
O PERCURSO PROFISSIONAL DE MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO E A GEOMETRIA DIFERENCIAL NO BRASIL	
Antonio José Melo de Queiroz	
DOI 10.22533/at.ed.1022010126	
CAPÍTULO 7	90
PROCESO COORDINADO DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	
María Teresa Costado Dios	
José Carlos Piñero Charlo	
DOI 10.22533/at.ed.1022010127	
CAPÍTULO 8	100
A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA DE ÁREA E PERÍMETRO	

DAS FIGURAS PLANAS

Selma de Nazaré Vilhena Machado
Alessandra Maués Quaresma
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa
Crislaine Pereira Antunes
Eldon Ricardo Souza Pereira
Eusom Passos Lima
Gilvan de Souza Marques
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Karoline de Sarges Fonseca
Mayanna Cayres Oliveira
Mauro Sérgio Santos de Oliveira
Simei Barbosa Paes

DOI 10.22533/at.ed.1022010128

CAPÍTULO 9.....113

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS DE APRENDIZAGEM POR ALUNOS DO ENSINO ELEMENTAR

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes
Maria Isabel Piteira do Vale

DOI 10.22533/at.ed.1022010129

CAPÍTULO 10..... 130

O USO DE JOGOS E DINÂMICAS EM GRUPO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES NA PRÁTICA NO PRIMEIRO ESTÁGIO

Leonardo Pospichil Lima Neto
Lisandro Bitencourt Machado

DOI 10.22533/at.ed.10220101210

CAPÍTULO 11 139

ENTENDIMENTOS DE PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O USO [OU NÃO] DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Renaura Matos de Souza
Ilvanete dos Santos de Souza
Américo Junior Nunes da Silva

DOI 10.22533/at.ed.10220101211

CAPÍTULO 12..... 154

CURRÍCULO E FORMAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DOCÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: O DESAFIO DOS ANOS INICIAIS

Julio Robson Azevedo Gambarra

DOI 10.22533/at.ed.10220101212

CAPÍTULO 13..... 167

PERFIL DE UNIÃO DAS TURMAS DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DA UFAL CAMPUS ARAPIRACA

Allanny Karla Barbosa Vasconcelos

Gilmar dos Santos Batista
Karolayne Stefanny de Farias Holanda
DOI 10.22533/at.ed.10220101213

SOBRE OS ORGANIZADORES	175
ÍNDICE REMISSIVO.....	177

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 17/11/2020

Data de submissão: 04/09/2020

Hisley Feitosa Meneses

Piripiri – Piauí

<http://lattes.cnpq.br/8388137461435933>

Valtercio de Almeida Carvalho

Instituto Federal de Educação, Ciência e

Tecnologia do Piauí - IFPI

Teresina – Piauí

<http://lattes.cnpq.br/0022863714117479>

RESUMO: Este artigo mostra a importância da Análise Combinatória no desenvolvimento cognitivo de estudantes, por ser a área da Matemática que permite, através dos métodos de contagem, analisar e interpretar problemas, assim contribuindo para o seu futuro acadêmico e/ou profissional. O tema principal deste trabalho são os métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, objetivando a demonstração, explicação, exemplificações de situações – problema, dos mesmos, que são Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica. A pesquisa é de carácter bibliográfica e documental, utilizando livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio como fonte de dados documental, monografias e artigos como fonte bibliográfica. No desenvolvimento do trabalho expõe-se questões do Enem e de Concursos, com suas respectivas resoluções. Conclui-se a importância da implementação desses conteúdos no Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos de contagem. Ensino médio. Permutação circular. Combinação com repetição. Permutação caótica.

COMBINATORY ANALYSIS: A STUDY OF THE MAIN COUNTING'S METHODS NOT CONTEMPLATED IN HIGH SCHOOL

ABSTRACT: This article shows the importance of Combinatorial Analysis in the cognitive development of students. That area of Mathematics analyzes and interprets problems through counting's methods contributing to academic and/or professional future of them. The main theme of this work is the counting's methods not contemplated in High School, aiming at the demonstration, explanation, examples and problem situations of counting's methods, which are Circular Permutation, Combination with Repetition and Chaotic Permutation. The research is bibliographical and documentary, using textbooks of the 2nd year of High School as a source of documentary data, monographs and articles as a bibliographic source. In the development of the work the issues of the National Exam of the High School (Enem) and Public Service Exam are presented, with their respective resolutions. We conclude the importance of the implementation of these contents in High School.

KEYWORDS: Counting's methods. High school. Circular permutation. Combination with repetition. Chaotic permutation.

1 | INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é a área da Matemática na qual, através de métodos de

contagem, se pode fazer a análise das possibilidades e combinações possíveis entre um conjunto de elementos, considerando as restrições. Pode-se, com a Combinatória, calcular o número de possibilidades de um evento ocorrer, contar a totalidade de anagramas de uma palavra, calcular a quantidade de senhas, números telefônicos, etc.

A Combinatória segundo Morgado (2006) “é a parte da Matemática que analisa estruturas e partes discretas”. Sendo assim, ela tem um amplo campo de investigação e inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento. Auxilia no desenvolvimento lógico e cognitivo, adequado para diversas áreas, por permitir que se escolha, arrume e conte elementos de um conjunto, sendo necessário analisar, interpretar, pensar, especular e discutir situações-problema, comumente vistos nas Olimpíadas de Matemática, em provas relevantes como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), provas de vestibulares e concursos públicos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p.45)

Como exposto, é de grande importância a abordagem dos conteúdos de contagem, dado que eles têm enorme influência no desenvolvimento das competências e habilidades. Estas são descritas nos PCN's como sendo:

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 46)

Os métodos de contagem são utilizados durante todo o Ensino Fundamental e Médio, mas, é geralmente abordado, formalmente, no segundo ano do Ensino Médio, e por diversos fatores acaba por não ser muito bem explicado. E dentre os fatores, estão os próprios livros didáticos, que, na sua maioria, não abordam todos os conteúdos que podem ser trabalhados. Assim, surgindo o questionamento de *quais são os principais conteúdos não abordados no Ensino Médio e suas aplicações*. Por efeito, analisaram-se alguns livros de Matemática adotados em turmas de Ensino Médio, para ver quais são estes conteúdos e observou-se que os assuntos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica, não são abordados. E ao analisar 15 livros didáticos, obteve-se a seguinte tabela:

Livros			Agrupamentos		
Autor	Ano	Título	Permutação Circular	Combinação com Repetição	Permutação Caótica
Angel Panadés	2005	Matemática e suas tecnologias	-	-	-
Luis Roberto Dante	2008 2011	Matemática vol. Único Matemática contexto e aplicações	- -	- -	- -
Eduardo Chavante	2016	Quadrante Matemática	-	-	-
Gelson Iezzi	2010 2016	Matemática: ciência e aplicações Matemática: ciência e aplicações vol 2.	- -	- -	- -
José Ruy Giovanni	2005 2000	Matemática completa Matemática uma nova abordagem	- -	- -	- -
Jackson Ribeiro	2010	Matemática ciência, linguagem e tecnologia	-	-	-
Joamir Souza	2013	Novo Olhar- Matemática	-	-	-
Juliane Matsbara	2010	Conexões com a Matemática	Sim	-	-
Kátia Stocco	2013	Matemática ensino médio	-	-	-
Manoel Paiva	2002	Matemática conceito, linguagem e aplicações	-	-	-

Márcio Cintra	2008	Matemática no ensino Médio	-	-	-
Xavier e Barreto	2009	Matemática aula por aula	-	-	-

Tabela 1- Livros do 2º ano analisados

Fonte- Próprio autor.

Conforme a tabela, observa-se que dentre os 15 livros analisados, um, o de título “*Conexões com a Matemática*” de Juliane Matsbara, contempla um dos três conteúdos, que é Permutação Circular.

Existe vários outros métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, ocorrendo, muitas vezes também, este fato na graduação em Matemática, seja Bacharel, Licenciatura ou Tecnólogo. Porém, este trabalho só abordará os *três modelos de agrupamentos citados na Tabela 1*, sempre com um olhar voltado para uma possível abordagem dos três no Ensino Médio, pois:

Em primeiro lugar, entre os vários tipos de “números para contagem” da Análise Combinatória eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de Problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade destes números a problemas de probabilidade finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória. (MORGADO, 2006, p.2)

Portanto, este trabalho tem como objetivo geral apresentar os principais métodos de contagem não abordados no Ensino Médio e suas aplicações. E os objetivos específicos de analisar livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio, demonstrar matematicamente os principais métodos não abordados e apresentar aplicações em situações – problema. Isto devido à importância desses assuntos, e o estudo da Análise Combinatória em sala de aula, que em vários casos não ocorre.

O desenvolvimento metodológico da pesquisa é do tipo bibliográfica e documental. Com a análise dos 15 livros do 2º ano do Ensino Médio, sendo feito o levantamento dos que abordam ou não os conteúdos, serviu como fonte de dados documental. Os principais autores utilizados são Morgado (2006) e Santos (2007), assim como artigos, dissertações e monografias de mestrados, além de provas e banco de questões como fonte de dados bibliográficos. Sendo utilizado os descritores: “Análise Combinatória”, “Permutação Circular”, “Combinação com repetição”, “Permutação Caótica” e “Situações-problema”.

2 | PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Permutação é a quantidade de maneiras de se ordenar n objetos, e disto, conclui-se que essa quantidade de maneiras é a ordenação dos n elementos em uma reta, ou seja, os elementos estão alinhados. Porém, nem sempre os elementos a serem permutados estão alinhados, eles podem ter uma disposição circular, de forma que não exista um primeiro e/ou um último elemento. E o número total de possíveis disposições circulares, dado um número finito de elementos participantes, são calculadas pela Permutação Circular. Esta pode ser definida como o número de possibilidades de se ordenar n objetos distintos em torno de um círculo.

A fim de compreender este agrupamento, vamos analisar o caso de termos três objetos distintos de forma linear e, posteriormente, em círculo, denominados a , b e c , e observar que a quantidade de maneiras de ordená-los em uma reta é dado pela fórmula $P_n = n!$, logo, $P_3 = 3!$ p $P_3 = 6$ formas de ordenação destes três elementos de forma linear. Mas, e a quantidade de maneiras de ordená-los em um círculo? Observe abaixo as seis ordenações em círculo.

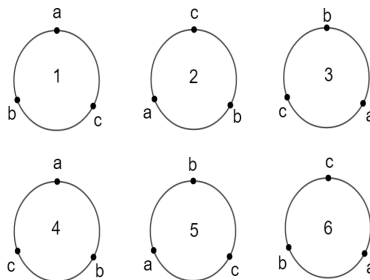


Figura 1- Permutação de três elementos em círculo

Fonte- Próprio autor

Observando as seis figuras, tem-se que ao rotacionar os círculos 2 e 3, independente do sentido, ambos coincidem com o círculo 1. E, ao se rotacionar os círculos 5 e 6, os mesmos coincidem com o círculo 4. Ou seja, o número de possibilidades de se dispor os três objetos em torno de um círculo são duas, que são a forma do círculo 1 e do círculo 4.

Da mesma forma, fazendo a ordenação de 4 elementos, estes sendo a , b , c e d , em forma linear, tem-se $P_4 = 4! = 24$. Observe abaixo estas ordenações em círculo.

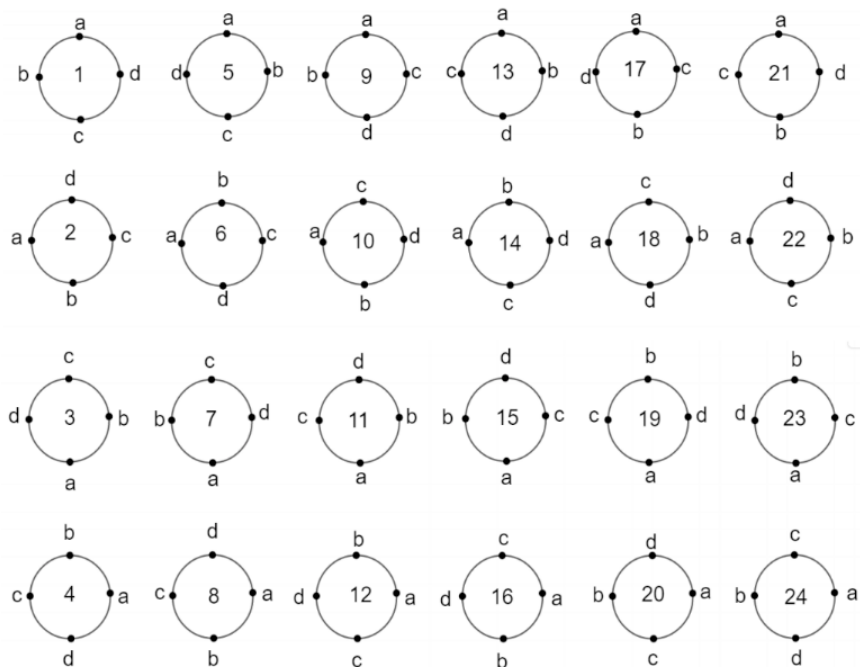


Figura 2- Permutação de quatro elementos em círculo

Fonte- Próprio autor

Ao observar os círculos acima, nota-se que os círculos 2, 3 e 4 são iguais, por rotação, ao círculo 1. Assim, também se tem os círculos 6,7 e 8 iguais ao 5, os 10, 11 e 12 ao 9, os 14, 15 e 16 iguais ao 13, os 18, 19 e 20 ao 17 e que os círculos 22, 23 e 24 são iguais ao 21. Portanto, os círculos distintos são os 1, 5, 9, 13, 17 e 21, expostos abaixo.

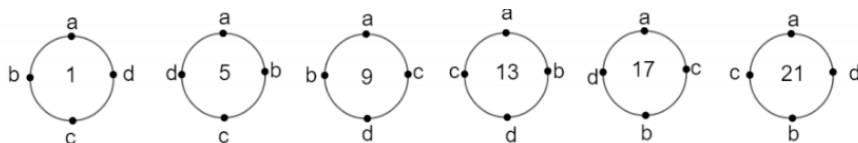


Figura 3-Permutação circular de quatro elementos

Fonte-Próprio autor

Ou seja, das 24 permutações simples de 4 elementos, tem-se 6 permutações circulares distintas. Portanto o número de permutações circulares de 4 elementos distintos é 6.

Por recorrência¹ tem-se que, como visto acima, o número de possibilidades de se ordenar 3 e 4 objetos distintos em torno de um círculo são, respectivamente, 2 e 6, e estes resultados podem ser reescritos como $2 = \frac{3!}{3}$ e $6 = \frac{4!}{4}$.

Assim, generalizando, a Permutação circular é representada por

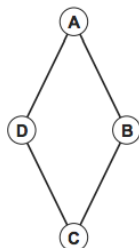
$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow (PC)_n = \frac{n(n-1)!}{n}$$

O que implica que a Permutação circular de n objetos distintos é dada por

$$(PC)_n = (n-1)! \quad (1)$$

Segue a aplicação no exemplo.

Exemplo: (ENEM 2013) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

- a)6 b)12 c)18 d)24 e)36

SOLUÇÃO: Como são 4 lugares e se tem 3 cores, aplica-se a fórmula (1) com 4 elementos, ficando um local em cada possibilidade para ser preenchido com uma das pedras, assim, tem-se $(PC)_4 = (4-1)! = 3! \Rightarrow (PC)_4 = 6$ modos. Desta forma, tem-se que destas 6 possibilidades, tem-se em cada uma, um vértice a ser preenchido. Logo, para preencher cada um desses vértices, tem-se somente uma possibilidade já que há a restrição de não poder ficar pedras adjacentes de mesma cor, totalizando 6 possibilidades. Portanto, o número de jóias diferentes que o artesão pode obter é $6+6=12$. Assim sendo a alternativa b correta.

¹ Técnica matemática que permite definir uma fórmula genérica através de casos particulares.

3 | COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Diferentemente da Combinação Simples, o agrupamento chamado de *Combinação com Repetição* ou *Combinação Completa* é o número de subconjuntos formados por elementos distintos unido com o número de subconjuntos formados por elementos não distintos. Ou seja, de acordo com Santos (2007) na Combinação Simples de n elementos tomados p a p , deve-se ter p menor que ou igual a n , enquanto que na Completa essa restrição não é necessária, podendo-se selecionar p objetos, dentre os n distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Para melhor compreensão, supõe-se que uma pessoa queira comprar 2 potes de sorvete e no local de venda há 4 sabores de sorvete. Representando a quantidade de potes do sabor um por S_1 , do sabor dois por S_2 , do três por S_3 e do quatro por S_4 . E através do exposto acima se mostra, na tabela abaixo, cada possibilidade de compra, ou seja, cada subconjunto que pode ser formado por dois diferentes ou repetidos sabores.

Possibilidades	Quantidade			
	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	1	1	0
5	0	1	0	1
6	0	0	1	1
7	2	0	0	0
8	0	2	0	0
9	0	0	2	0
10	0	0	0	2

Tabela 3-Possibilidades de agrupamentos

Fonte-Próprio autor

Observando a tabela, nota-se que há 6 possibilidades de comprar os dois potes de sorvete distintos, concordando com o resultado encontrado para Combinação Simples de 4 elementos tomados 2 a 2: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow C_4^2 = 6$.

E ainda se encontram 4 agrupamentos (4 opções distintas de compras) com os dois potes de sorvete do mesmo sabor. Portanto, pelo Princípio Aditivo, tem-se um total de 10 modos de comprar os dois potes de sorvete.

A dificuldade, nesse tipo de problema, até então, é encontrar esse total de 10 possibilidades de resultados (ou soluções) de uma forma simples e elegante.

Para isso, pode-se escrever $S_1+S_2+S_3+S_4 = 2$, ou seja, temos uma equação linear de coeficientes unitários, onde o número de possibilidades é o de soluções inteiras não negativas dessa equação. E para resolver, usa-se um sistema conhecido como “bola-traço” o qual para cada sinal de operação (+) coloca-se um traço e, o número de bolas entre esses traços representa a quantidade total de objetos desejados, neste exemplo dois. Daí temos a representação das 10 possíveis soluções neste método “bola-traço”.

S_1	+	S_2	+	S_3	+	S_4	= 2	$\xrightarrow{\text{Solução}}$	(S_1, S_2, S_3, S_4)
•		•						→	(1, 1, 0, 0)
•				•				→	(1, 0, 1, 0)
•						•		→	(1, 0, 0, 1)
		•		•				→	(0, 1, 1, 0)
		•				•		→	(0, 1, 0, 1)
				•		•		→	(0, 0, 1, 1)
••								→	(2, 0, 0, 0)
		••						→	(0, 2, 0, 0)
				••				→	(0, 0, 2, 0)
						••		→	(0, 0, 0, 2)

Figura 4-Soluções conforme o sistema “bola-traço”

Fonte-Próprio autor

Pelo exposto, nota-se que há uma bijeção entre as sequências de bola-traço e a solução, ou seja, cada sequência representa uma única solução e toda solução tem uma única sequência que a define. Dado que, todas as sequências acima são formadas por 3 traços e 2 bolas, tem-se um caso de permutação com repetição. Assim utilizando a fórmula da Permutação com Repetição, onde se tem um total de 5 elementos com a repetição de 2 objetos e 3 de outro, obtém-se $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = 10$. Além disto $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = C_5^2$. Portanto há 10 possibilidades de compra do sorvete.

De fato, de acordo com Morgado (2006) a Combinação Completa pode ser interpretada como o número de modos de se selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos ou como o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários.

Observando o exemplo acima, generalizando os termos, e analisando o método bola-traço, identifica-se que a quantidade de traços é (n-1) e que o número

de bolas é p , totalizando $(n-1 + p)$ elementos, e o número de elementos repetidos, ou seja, as bolas e traços, são p e $(n-1)$, respectivamente.

Em resumo, tendo-se uma equação linear de coeficientes unitários do tipo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = p$$

O número de soluções inteiras não negativas desta equação é dado pela fórmula da Permutação com Repetição, que se obtém

$$P_{(n+p-1)}^{p(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Relacionando à fórmula da Combinação Simples, fica da seguinte forma

$$C_{(n+p-1)}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} \Rightarrow C_{(n+p-1)}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

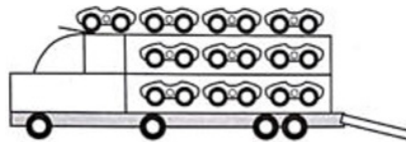
“De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos entre os n objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos *distintos ou não* entre n objetos distintos dados”. (MORGADO, 2006, p.52).

Portanto, a fórmula da Combinação com repetição é:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \quad (2)$$

Para melhor compreensão, segue um exemplo da utilização desta fórmula.

Exemplo:(ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- a) C_6^4 b) C_9^3 c) C_{10}^4 d) 6^4 e) 4^6

SOLUÇÃO: Como se deve ter pelo menos um carrinho de cada cor, e se tem 4

cores, restam 6 carrinhos. Assim, como estes 6 carrinhos podem ser da mesma cor, usa-se a fórmula (2), portanto, tem-se $CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} \Rightarrow C_9^6 = \frac{9!}{6!3!}$ que, através da combinação complementar, obtém-se $C_9^6 = C_9^3$. Portanto, a alternativa b é a correta.

4 I PERMUTAÇÃO CAÓTICA

De acordo com Silva (2016), Permutação Caótica ou Desarranjo é o conjunto das funções $f:A \rightarrow A$ tais que $f(a_i) \neq a_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ou seja uma Permutação Caótica dos elementos do conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ é o conjunto das permutações dos elementos de A nas quais nenhum deles fique na sua posição inicial. Ou seja, “uma permutação dos números (1, 2, ..., n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas, mas 1342 não é.” (MORGADO, 2006, p.73) pois o 1 está no seu lugar primitivo.

Para melhor entendimento, calcula-se o número de permutações caóticas da palavra “rua”. O número geral de permutações simples é $P_3 = 3! = 6$, que são $\{(rua), (rau), (ura), (uar), (aru), (aur)\}$, observa-se, dentre os 6 anagramas, que somente (uar) e (aru) são caóticas, pois nenhuma das três letras está na sua posição inicial. Agora contando o número de anagramas com cada letra fixa, assim chamando de A_1 o número de permutações da palavra “rua”, fixando o “r”, de A_2 as permutações fixando “u”, e de A_3 o “a”, obtém-se a seguinte tabela:

Número	Anagramas
$A_1 = 2! = 2$	(rua) , (rau)
$A_2 = 2! = 2$	(rua) , (aur)
$A_3 = 2! = 2$	(rua) , (ura)

Tabela 4-Permutações da palavra *rua* com elementos fixos

Fonte-Próprio autor

Totalizando um conjunto de 6 anagramas em que pelo menos uma letra está no seu local primitivo, porém, observa-se que se conta as ordenações repetidas, portanto, deve-se subtrair este do conjunto que contém todas as permutações gerais possíveis, logo

6-6

Mas, fazendo isso também se retira as permutações que são as interseções $\#(A_1 \cap A_2)$, onde “r” e “u” estão fixos que é (rua), $\#(A_1 \cap A_3)$, no qual “r” e “a” estão

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} : \left. \begin{array}{l} 1 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1 = (n-2)! \\ 1 \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1 = (n-2)! \\ (n-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1 = (n-2)! \\ \vdots \\ (n-2) \cdot (n-3) \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 = (n-2)! \end{array} \right\} = C_n^2 \cdot (n-2)!$$

Logo, desenvolvendo $C_n^2 \cdot (n-2)!$, obtém-se $C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot (n-2)!$

Simplificando, fica $C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$.

Portanto $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{n!}{2!}$, é o número de permutações em que há pelo menos dois elementos em seus lugares de origem.

Seguindo o mesmo raciocínio para o $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, tem-se que $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$ é igual a $(n-3)!$, C_n^3 vezes, ou seja, $C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot (n-3)!$, simplificando, tem-se $C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$.

Logo, $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \frac{n!}{3!}$ é o número de permutações com três elementos em seus lugares primitivos.

Por recorrência, conclui-se que $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \frac{n!}{n!} = 1$.

Portanto, pode-se reescrever a fórmula generalizada do PIE da seguinte forma

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 1$$

Deixando todos os termos em forma de fração

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!}$$

evidenciando $n!$ tem-se

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \right) \quad (3)$$

Sendo assim (3) o número de permutações de n elementos, com algum deles em seu lugar inicial.

Para se obter o desordenamento, ou seja, o número de permutações caóticas, de n elementos é necessário subtrair (3) do número geral de permutações simples

de n elementos que é $n!$. Logo, D_n segue da seguinte forma:

$$D_n = n! - n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

Evidenciando $n!$ tem-se

$$D_n = n! \left[1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \right) \right]$$

Logo, realizando a multiplicação

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

Portanto, conclui-se que a fórmula da Permutação Caótica é da seguinte forma

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right) \quad (4)$$

Além dessa fórmula “é interessante observar que D_n é aproximadamente igual a $\frac{n!}{e}$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$ ” (MORGADO, 2006, p.75). De tal forma observa-se a tabela abaixo:

n	D_n	$\frac{n!}{e}$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
5	44	44,1...
6	265	264,8...
\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 5-Aproximações
Fonte-Morgado, 2006, p.75

Segue um exemplo resolvido utilizando esta fórmula.

Exemplo: (FUVEST 2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A

probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é

- a) $1/4$ b) $7/24$ c) $1/3$ d) $3/8$ e) $5/12$

SOLUÇÃO: Considerando que Cláudia seja a primeira, Paulo o segundo, Rodrigo o terceiro e Ana a quarta pessoa a tirar o papel da urna. E como a questão pede a probabilidade que nenhum dos quatro retire o seu próprio nome, ou seja, nenhum dos papéis retorne ao seu local de origem, deve calcular o número total de possibilidades e o de desordenamento. Logo, o número total de possibilidades de se retirar o papel é dado pela fórmula da permutação simples, ou seja, $P_4=4! = 24$. Agora calcula-se o número de possibilidades de nenhuma das 4 pessoas tirarem seu próprio nome utilizando a fórmula (4), tem-se

$$D_4 = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \Rightarrow D_4 = 24 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right)$$
$$\Rightarrow D_4 = 24 \left(\frac{12 - 4 + 1}{24} \right) \Rightarrow D_4 = 12 - 4 + 1 \Rightarrow D_4 = 9$$

Portanto há 9 possibilidades dos papéis retirados não saírem na ordem Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana. Assim o resultado da questão é o quociente entre o estas possibilidades e o número total, logo a probabilidade é de $\frac{9}{24}$, que simplificando por 3, obtém-se $\frac{3}{8}$, que corresponde a alternativa d.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste trabalho pode-se reconhecer que há a ausência de importantes conteúdos da Análise combinatória nos livros didáticos, constatados na tabela 1. Visto que os Métodos de Contagem são ferramentas imprescindíveis para o desenvolvimento da capacidade de pensar e compreender dos alunos, ao explorar novos conteúdos permite-se a elevação do nível dos estudantes, inclusive os de nível superior.

Durante a pesquisa constatou-se a presença dos agrupamentos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica em questões de provas importantes como Enem e provas de concursos, três presentes no corpo deste artigo, utilizadas como exemplo e também para mostrar a importância desses conteúdos no Ensino Médio.

Por fim, conclui-se que esses são os principais conteúdos da Análise Combinatória que não são abordados no Ensino Médio. Portanto, enfatiza-se a importância da inserção desses conteúdos nos livros didáticos, devido à necessidade da abordagem dos mesmos no Ensino Médio e por serem necessários para um melhor desenvolvimento dos alunos, beneficiando-os em seu futuro acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Luís R. D. **Métodos de contagem**. Dissertação (Mestrado em matemática) – PROFMAT. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2013.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, 2000.

DURO, Mariana L. **Análise combinatória e construção de possibilidades: o raciocínio formal no Ensino Médio**. Dissertação (pós-graduação em educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon L. **Curso de análise**. Vol 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MOGADO, Augusto César; et al. **Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, José P. O.; MELO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução a análise combinatória**. 4 ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

SILVA, Websther. **Uma generalização para o problema do amigo secreto**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade aberta do Brasil; Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Luís Gomes. 2016.

TATAIA, Paulo E. C. O. **Análise combinatória para o ensino médio**. Monografia (especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2012.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Álgebra Linear 19, 34

Aprendizagem 20, 84, 100, 101, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 128, 131, 132, 134, 135, 139, 140, 142, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 158, 162, 163, 165

Área 35, 51, 53, 60, 65, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 90, 93, 98, 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 114, 116, 122, 123, 124, 139, 159, 164, 175, 176

B

Benefícios 115, 167, 174

C

Combinação com repetição 65, 67, 68, 72, 74, 79

Conocimiento matemático 90, 91, 92, 93, 94, 98

Contexto 67, 103, 111, 113, 115, 117, 125, 126, 127, 135, 141

Convergência 27, 30, 32, 33, 50, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63

D

Didáctica de las matemáticas 90, 91

Dimensiones en 35, 36, 37, 43, 44, 47, 48, 49

Dimensiones negativas 35, 36, 37, 39, 41, 42, 43

E

Educação matemática 101, 107, 111, 112, 115, 128, 138, 139, 153, 154, 157, 158, 159, 160, 165, 166, 175, 176

Educación primaria 90, 91, 92, 93

Ensino de matemática 130, 131, 132, 134, 135, 152, 153, 154, 160, 161, 165, 175

Ensino elementar 113, 128

Ensino médio 50, 65, 66, 67, 68, 79, 80, 161

F

Formação de professores 111, 112, 139, 153, 154, 155, 156, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 175, 176

G

Geometria 34, 35, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 101, 102, 103, 104, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 125, 176

Geometria plana 101, 108, 109, 111

H

História da matemática 81, 83, 89, 100, 101, 102, 103, 106, 107, 109, 110, 111, 112

I

Immersed boundary method 1, 2, 3, 13, 17, 18

J

Jogo 130, 132, 135, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 152, 153

L

Laminar and Turbulent Flow 1, 18

Licenciatura 34, 68, 100, 117, 130, 131, 140, 156, 159, 160, 161, 167, 168, 173, 175

M

Manfredo do Carmo 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Matemática 2, 19, 20, 33, 34, 35, 36, 50, 56, 58, 65, 66, 67, 68, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 173, 175, 176

Metodologia de ensino de matemática 130, 160

Métodos de contagem 65, 67, 68, 79, 80

Métodos diretos 19, 20, 27, 33

Métodos iterativos 19, 20, 27, 33

Mixed convection 1, 2, 4

P

Perímetro 100, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 124

Permutação caótica 65, 75

Permutação circular 65, 67, 68, 69, 70, 71, 79

Prática docente 130, 131, 132, 152, 154, 165

Primeiro estágio 130, 132

Professor que ensina matemática 139, 154, 162, 165

R

Raciocínio lógico 102, 130, 132, 137, 139, 140, 146, 147, 149, 150, 152

Resolução de problemas 34, 66, 115, 116, 117, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 153

S

Série harmônica 50, 56, 57, 58, 59

Séries especiais 50

Séries infinitas 50, 54

Sistemas lineares 19, 20, 27, 34

T

Tarefas matemáticas 113, 114, 115, 116, 117, 128

Trabajo colaborativo 90, 91

U

União 167, 168, 171, 172, 173, 174

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 