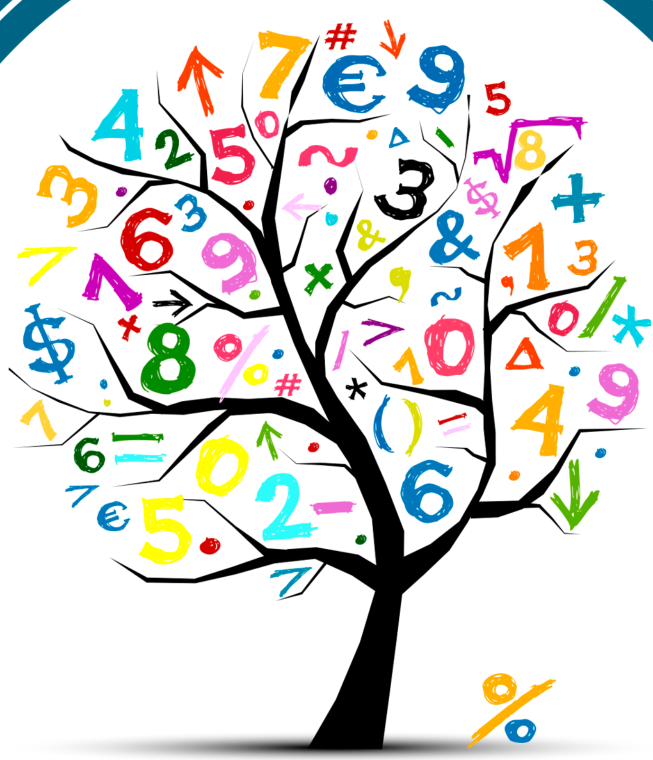
INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

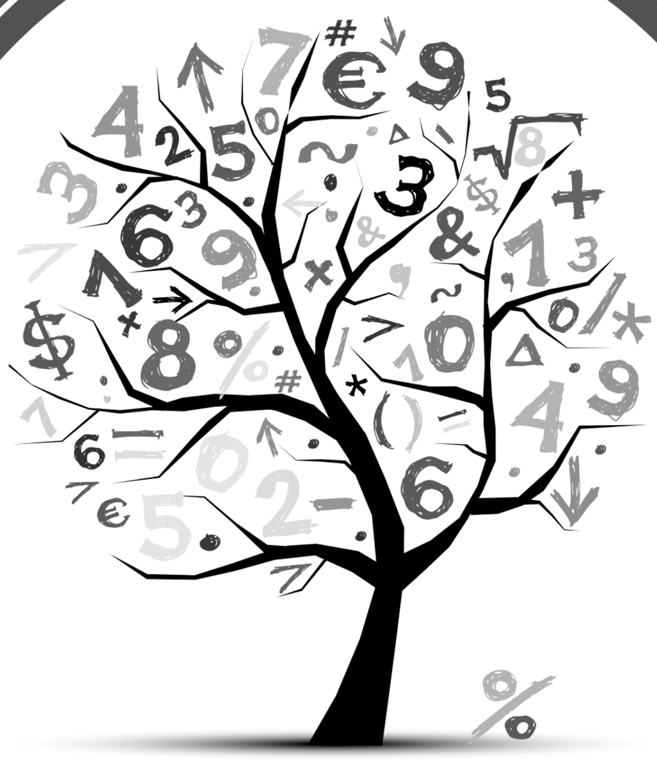
AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-610-2
DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o "novo" exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro "***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***", em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva
Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira
Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 5

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 04/09/2020

Hislley Feitosa Meneses
Piripiri – Piauí
http://lattes.cnpq.br/8388137461435933

Valtercio de Almeida Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Teresina – Piauí
http://lattes.cnpq.br/0022863714117479

RESUMO: Este artigo mostra a importância da Análise Combinatória no desenvolvimento cognitivo de estudantes, por ser a área da Matemática que permite, através dos métodos de contagem, analisar e interpretar problemas, assim contribuindo para o seu futuro acadêmico e/ou profissional. O tema principal deste trabalho são os métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, objetivando a demonstração, explicação, exemplificações de situações – problema, dos mesmos, que são Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica. A pesquisa é de carácter bibliográfica e documental, utilizando livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio como fonte de dados documental, monografias e artigos como fonte bibliográfica. No desenvolvimento do trabalho expõe-se questões do Enem e de Concursos, com suas respectivas resoluções. Conclui-se a importância da implementação desses conteúdos no Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos de contagem. Ensino médio. Permutação circular. Combinação com repetição. Permutação caótica.

COMBINATORY ANALYSIS: A STUDY OF THE MAIN COUNTING'S METHODS NOT CONTEMPLATED IN HIGH SCHOOL

ABSTRACT: This article shows the importance of Combinatorial Analysis in the cognitive development of students. That area of Mathematics analyzes and interprets problems through counting's methods contributing to academic and/or professional future of them. The main theme of this work is the counting's methods not contemplated in High School, aiming at the demonstration, explanation, examples and problem situations of counting's methods, which are Circular Permutation, Combination with Repetition and Chaotic Permutation. The research is bibliographical and documentary, using textbooks of the 2nd year of High School as a source of documentary data, monographs and articles as a bibliographic source. In the development of the work the issues of the National Exam of the High School (Enem) and Public Service Exam are presented, with their respective resolutions. We conclude the importance of the implementation of these contents in High School.

KEYWORDS: Counting's methods. High school. Circular permutation. Combination with repetition. Chaotic permutation.

1 I INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é a área da Matemática na qual, através de métodos de contagem, se pode fazer a análise das possibilidades e combinações possíveis entre um conjunto de elementos, considerando as restrições. Pode-se, com a Combinatória, calcular o número de possibilidades de um evento ocorrer, contar a totalidade de anagramas de uma palavra, calcular a quantidade de senhas, números telefônicos, etc.

A Combinatória segundo Morgado (2006) "é a parte da Matemática que analisa estruturas e partes discretas". Sendo assim, ela tem um amplo campo de investigação e inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento. Auxilia no desenvolvimento lógico e cognitivo, adequado para diversas áreas, por permitir que se escolha, arrume e conte elementos de um conjunto, sendo necessário analisar, interpretar, pensar, especular e discutir situações-problema, comumente vistos nas Olimpíadas de Matemática, em provas relevantes como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), provas de vestibulares e concursos públicos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p.45)

Como exposto, é de grande importância a abordagem dos conteúdos de contagem, dado que eles têm enorme influência no desenvolvimento das competências e habilidades. Estas são descritas nos PCN's como sendo:

> • Ler e interpretar textos de Matemática.
>
> • Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
>
> • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
>
> • Formular hipóteses e prever resultados.
>
> • Selecionar estratégias de resolução de problemas.
>
> • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 46)

Os métodos de contagem são utilizados durante todo o Ensino Fundamental e Médio, mas, é geralmente abordado, formalmente, no segundo ano do Ensino Médio, e por diversos fatores acaba por não ser muito bem explanado. E dentre os fatores, estão os próprios livros didáticos, que, na sua maioria, não abordam todos os conteúdos que podem ser trabalhados. Assim, surgindo o questionamento de *quais são os principais conteúdos não abordados no Ensino Médio e suas aplicações*. Por efeito, analisaram-se alguns livros de Matemática adotados em turmas de Ensino Médio, para ver quais são estes conteúdos e observou-se que os assuntos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica, não são abordados. E ao analisar 15 livros didáticos, obteve-se a seguinte tabela:

Livros			*Agrupamentos*		
Autor	*Ano*	*Título*	*Permutação Circular*	*Combinação com Repetição*	*Permutação Caótica*
Angel Panadés	2005	Matemática e suas tecnologias	-	-	-
Luis Roberto Dante	2008	Matemática vol. Único	-	-	-
	2011	Matemática contexto e aplicações	-	-	-
Eduardo Chavante	2016	Quadrante Matemática	-	-	-
Gelson Iezzi	2010	Matemática: ciência e aplicações	-	-	-
	2016	Matemática: ciência e aplicações vol 2.	-	-	-
José Ruy Giovanni	2005	Matemática completa	-	-	-
	2000	Matemática uma nova abordagem	-	-	-
Jackson Ribeiro	2010	Matemática ciência, linguagem e tecnologia	-	-	-
Joamir Souza	2013	Novo Olhar- Matemática	-	-	-
Juliane Matsbara	2010	Conexões com a Matemática	Sim	-	-
Kátia Stocco	2013	Matemática ensino médio	-	-	-
Manoel Paiva	2002	Matemática conceito, linguagem e aplicações	-	-	-

Márcio Cintra	2008	Matemática no ensino Médio	-	-	-
Xavier e Barreto	2009	Matemática aula por aula	-	-	-

Tabela 1- Livros do 2º ano analisados

Fonte- Próprio autor.

Conforme a tabela, observa-se que dentre os 15 livros analisados, um, o de título "*Conexões com a Matemática*" de Juliane Matsbara, contempla um dos três conteúdos, que é Permutação Circular.

Existe vários outros métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, ocorrendo, muitas vezes também, este fato na graduação em Matemática, seja Bacharel, Licenciatura ou Tecnólogo. Porém, este trabalho só abordará os *três modelos de agrupamentos citados na Tabela 1*, sempre com um olhar voltado para uma possível abordagem dos três no Ensino Médio, pois:

> Em primeiro lugar, entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de Problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade destes números a problemas de probabilidade finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória. (MORGADO, 2006, p.2)

Portanto, este trabalho tem como objetivo geral apresentar os principais métodos de contagem não abordados no Ensino Médio e suas aplicações. E os objetivos específicos de analisar livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio, demonstrar matematicamente os principais métodos não abordados e apresentar aplicações em situações – problema. Isto devido à importância desses assuntos, e o estudo da Análise Combinatória em sala de aula, que em vários casos não ocorre.

O desenvolvimento metodológico da pesquisa é do tipo bibliográfica e documental. Com a análise dos 15 livros do 2º ano do Ensino Médio, sendo feito o levantamento dos que abordam ou não os conteúdos, serviu como fonte de dados documental. Os principais autores utilizados são Morgado (2006) e Santos (2007), assim como artigos, dissertações e monografias de mestrados, além de provas e banco de questões como fonte de dados bibliográficos. Sendo utilizado os descritores: "Análise Combinatória", "Permutação Circular", "Combinação com repetição", "Permutação Caótica" e "Situações-problema".

2 | PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Permutação é a quantidade de maneiras de se ordenar n objetos, e disto, conclui-se que essa quantidade de maneiras é a ordenação dos n elementos em uma reta, ou seja, os elementos estão alinhados. Porém, nem sempre os elementos a serem permutados estão alinhados, eles podem ter uma disposição circular, de forma que não exista um primeiro e/ou um último elemento. E o número total de possíveis disposições circulares, dado um número finito de elementos participantes, são calculadas pela Permutação Circular. Esta pode ser definida como o número de possibilidades de se ordenar n objetos distintos em torno de um círculo.

A fim de compreender este agrupamento, vamos analisar o caso de termos três objetos distintos de forma linear e, posteriormente, em círculo, denominados *a*, *b* e *c*, e observar que a quantidade de maneiras de ordena-los em uma reta é dado pela fórmula $P_n=n!$, logo, $P_3=3!$ þ $P_3=6$ formas de ordenação destes três elementos de forma linear. Mas, e a quantidade de maneiras de ordena-los em um círculo? Observe abaixo as seis ordenações em círculo.

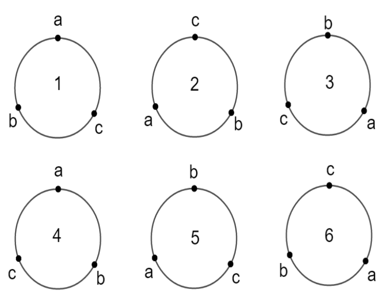


Figura 1- Permutação de três elementos em círculo

Fonte- Próprio autor

Observando as seis figuras, tem-se que ao rotacionar os círculos 2 e 3, independente do sentido, ambos coincidem com o círculo 1. E, ao se rotacionar os círculos 5 e 6, os mesmos coincidem com o círculo 4. Ou seja, o número de possibilidades de se dispor os três objetos em torno de um círculo são duas, que são a forma do círculo 1 e do círculo 4.

Da mesma forma, fazendo a ordenação de 4 elementos, estes sendo *a, b, c* e *d*, em forma linear, tem-se $P_4=4! = 24$. Observe abaixo estas ordenações em círculo.

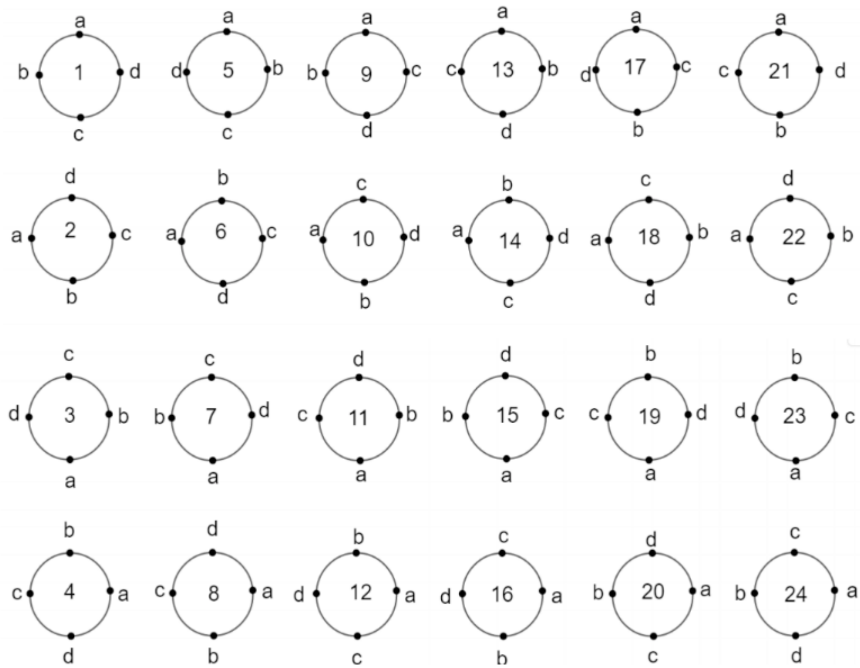


Figura 2- Permutação de quatro elementos em circulo

Fonte- Próprio autor

Ao observar os círculos acima, nota-se que os círculos 2, 3 e 4 são iguais, por rotação, ao círculo 1. Assim, também se tem os círculos 6,7 e 8 iguais ao 5, os 10, 11 e 12 ao 9, os 14, 15 e 16 iguais ao 13, os 18, 19 e 20 ao 17 e que os círculos 22, 23 e 24 são iguais ao 21. Portanto, os círculos distintos são os 1, 5, 9, 13, 17 e 21, expostos abaixo.

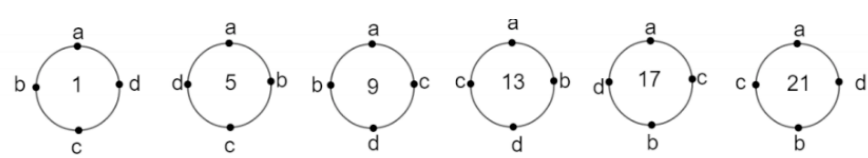


Figura 3-Permutação circular de quatro elementos

Fonte-Próprio autor

Ou seja, das 24 permutações simples de 4 elementos, tem-se 6 permutações circulares distintas. Portanto o número de permutações circulares de 4 elementos distintos é 6.

Por recorrência[1] tem-se que, como visto acima, o número de possibilidades de se ordenar 3 e 4 objetos distintos em torno de um círculo são, respectivamente, 2 e 6, e estes resultados podem ser reescritos como $2 = \frac{3!}{3}$ e $6 = \frac{4!}{4}$.

Assim, generalizando, a Permutação circular é representada por

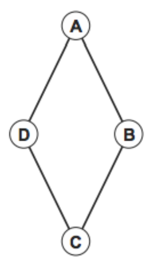
$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow (PC)_n = \frac{n(n-1)!}{n}$$

O que implica que a Permutação circular de n objetos distintos é dada por

$$(PC)_n = (n-1)! \qquad (1)$$

Segue a aplicação no exemplo.

Exemplo: (ENEM 2013) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas. azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a)6 b)12 c)18 d)24 e)36

SOLUÇÃO: Como são 4 lugares e se tem 3 cores, aplica-se a fórmula (1) com 4 elementos, ficando um local em cada possibilidade para ser preenchido com uma das pedras, assim, tem-se $(PC)_4 = (4-1)! = 3! \Rightarrow (PC)_4 = 6$ *modos. Desta forma, tem-se que destas 6 possibilidades, tem-se em cada uma, um vértice a ser preenchido. Logo, para preencher cada um desses vértices, tem-se somente uma possibilidade já que há a restrição de não poder ficar pedras adjacentes de mesma cor, totalizando 6 possibilidades. Portanto, o número de jóias diferentes que o artesão pode obter é* 6+6=12. *Assim sendo a alternativa b correta.*

1 Técnica matemática que permite definir uma fórmula genérica através de casos particulares.

3 I COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Diferentemente da Combinação Simples, o agrupamento chamado de *Combinação com Repetição* ou *Combinação Completa* é o número de subconjuntos formados por elementos distintos unido com o número de subconjuntos formados por elementos não distintos. Ou seja, de acordo com Santos (2007) na Combinação Simples de n elementos tomados p a p, deve-se ter p menor que ou igual a n, enquanto que na Completa essa restrição não é necessária, podendo-se selecionar p objetos, dentre os n distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Para melhor compreensão, supõe-se que uma pessoa queira comprar 2 potes de sorvete e no local de venda há 4 sabores de sorvete. Representando a quantidade de potes do sabor um por S_1, do sabor dois por S_2, do três por S_3 e do quatro por S_4. E através do exposto acima se mostra, na tabela abaixo, cada possibilidade de compra, ou seja, cada subconjunto que pode ser formado por dois diferentes ou repetidos sabores.

Possibilidades	*Quantidade*			
	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	1	1	0
5	0	1	0	1
6	0	0	1	1
7	2	0	0	0
8	0	2	0	0
9	0	0	2	0
10	0	0	0	2

Tabela 3-Possibilidades de agrupamentos

Fonte-Próprio autor

Observando a tabela, nota-se que há 6 possibilidades de comprar os dois potes de sorvete distintos, concordando com o resultado encontrado para Combinação Simples de 4 elementos tomados 2 a 2: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow C_4^2 = 6$.

E ainda se encontram 4 agrupamentos (4 opções distintas de compras) com os dois potes de sorvete do mesmo sabor. Portanto, pelo Princípio Aditivo, tem-se um total de 10 modos de comprar os dois potes de sorvete.

A dificuldade, nesse tipo de problema, até então, é encontrar esse total de 10 possibilidades de resultados (ou soluções) de uma forma simples e elegante.

Para isso, pode-se escrever $S_1+S_2+S_3+S_4 = 2$, ou seja, temos uma equação linear de coeficientes unitários, onde o número de possiblidades é o de soluções inteiras não negativas dessa equação. E para resolver, usa-se um sistema conhecido como “bola-traço” o qual para cada sinal de operação (+) coloca-se um traço e, o número de bolas entre esses traços representa a quantidade total de objetos desejados, neste exemplo dois. Daí temos a representação das 10 possíveis soluções neste método “bola-traço”.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
S_1 & + & S_2 & + & S_3 & + & S_4 & = 2 & \xrightarrow{\text{Solução}} & (S_1,S_2,S_3,S_4) \\
\bullet & | & \bullet & | & & | & & & \rightarrow & (1,1,0,0) \\
\bullet & | & & | & \bullet & | & & & \rightarrow & (1,0,1,0) \\
\bullet & | & & | & & | & \bullet & & \rightarrow & (1,0,0,1) \\
 & | & \bullet & | & \bullet & | & & & \rightarrow & (0,1,1,0) \\
 & | & \bullet & | & & | & \bullet & & \rightarrow & (0,1,0,1) \\
 & | & & | & \bullet & | & \bullet & & \rightarrow & (0,0,1,1) \\
\bullet\bullet & | & & | & & | & & & \rightarrow & (2,0,0,0) \\
 & | & \bullet\bullet & | & & | & & & \rightarrow & (0,2,0,0) \\
 & | & & | & \bullet\bullet & | & & & \rightarrow & (0,0,2,0) \\
 & | & & | & & | & \bullet\bullet & & \rightarrow & (0,0,0,2)
\end{array}
$$

Figura 4-Soluções conforme o sistema “bola-traço”

Fonte-Próprio autor

Pelo exposto, nota-se que há uma bijeção entre as sequencias de bola-traço e a solução, ou seja, cada sequência representa uma única solução e toda solução tem uma única sequência que a define. Dado que, todas as sequências acima são formadas por 3 traços e 2 bolas, tem-se um caso de permutação com repetição. Assim utilizando a fórmula da Permutação com Repetição, onde se tem um total de 5 elementos com a repetição de 2 objetos e 3 de outro, obtém-se $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = 10$. Além disto $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = C_5^2$. Portanto há 10 possibilidades de compra do sorvete.

De fato, de acordo com Morgado (2006) a Combinação Completa pode ser interpretada como o número de modos de se selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos ou como o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários.

Observando o exemplo acima, generalizando os termos, e analisando o método bola-traço, identifica-se que a quantidade de traços é (n-1) e que o número de bolas é p, totalizando (n-1 + p) elementos, e o número de elementos repetidos, ou seja, as bolas e traços, são p e (n-1), respectivamente.

Em resumo, tendo-se uma equação linear de coeficientes unitários do tipo

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$$

O número de soluções inteiras não negativas desta equação é dado pela fórmula da Permutação com Repetição, que se obtém

$$P_{(n+p-1)}^{p,(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Relacionando à fórmula da Combinação Simples, fica da seguinte forma

$$C_{(n+p-1)}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} \Rightarrow C_{(n+p-1)}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

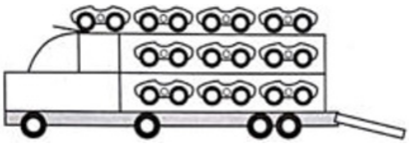
“De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher *p* objetos distintos entre os *n* objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher *p* objetos *distintos ou não* entre *n* objetos distintos dados”. (MORGADO, 2006, p.52).

Portanto, a fórmula da Combinação com repetição é:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \qquad (2)$$

Para melhor compreensão, segue um exemplo da utilização desta fórmula.

Exemplo:(ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro corres disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) C_6^4 b) C_9^3 c) C_{10}^4 d) 6^4 e) 4^6

SOLUÇÃO: Como se deve ter pelo menos um carrinho de cada cor, e se tem 4 *cores, restam 6 carrinhos. Assim, como estes 6 carrinhos podem ser da mesma cor, usa-se a fórmula (2), portanto, tem-se* $CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} \Rightarrow C_9^6 = \frac{9!}{6!3!}$ *que, através da combinação complementar , obtém-se* $C_9^6 = C_9^3$. *Portanto, a alternativa b é a correta.*

4 I PERMUTAÇÃO CAÓTICA

De acordo com Silva (2016), Permutação Caótica ou Desarranjo é o conjunto das funções f:A→ A tais que $f(a_i) \neq a$ para todo i∈{1,2,3,...,n}, ou seja uma Permutação Caótica dos elementos do conjunto $A=\{a_1,...,a_n\}$ é o conjunto das permutações dos elementos de A nas quais nenhum deles fique na sua posição inicial. Ou seja, "uma permutação dos números (1, 2, ..., n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas, mas 1342 não é." (MORGADO, 2006, p.73) pois o 1 está no seu lugar primitivo.

Para melhor entendimento, calcula-se o número de permutações caóticas da palavra "rua". O número geral de permutações simples é $P_3 = 3! = 6$, que são *{(rua), (rau), (ura), (uar), (aru), (aur)}*, observa-se, dentre os 6 anagramas, que somente (uar) e (aru) são caóticas, pois nenhuma das três letras está na sua posição inicial. Agora contando o número de anagramas com cada letra fixa, assim chamando de A_1 o número de permutações da palavra "rua", fixando o "r", de A_2 as permutações fixando "u", e de A_3 o "a", obtém-se a seguinte tabela:

Número	*Anagramas*
$A_1 = 2! = 2$	(rua) , (rau)
$A_2 = 2! = 2$	(rua) , (aur)
$A_3 = 2! = 2$	(rua) , (ura)

Tabela 4-Permutações da palavra *rua* com elementos fixos

Fonte-Próprio autor

Totalizando um conjunto de 6 anagramas em que pelo menos uma letra está no seu local primitivo, porém, observa-se que se conta as ordenações repetidas, portanto, deve-se subtrair este do conjunto que contém todas as permutações gerais possíveis, logo

$$6-6$$

Mas, fazendo isso também se retira as permutações que são as interseções $\#(A_1 \cap A_2)$, onde "r" e "u" estão fixos que é (rua), $\#(A_1 \cap A_3)$, no qual "r" e "a" estão fixos que é (rua), e $\#(A_2 \cap A_3)$, que "u" e "a" estão fixados sendo (rua). Ou seja, deve-se adicionar as interseções. Logo,

$$6-6+3$$

Por efeito, acaba-se adicionando também a interseção $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ onde todas as letras estão em seu lugar original, que é (rua), portanto subtrai-se essa interseção. Assim tem-se

$$6-6+3-1=2$$

que é o desordenamento da palavra "rua". Observa-se que este resultado é dado por n! menos o PIE[2] com três conjuntos. O número de Permutações caóticas de n elementos é representado por D_n, portanto o número de desarranjos da palavra "rua" é D_3=2.

Generalizando os fatos, o número geral de permutações de n elementos distintos é dado por n!. Já o número de permutações onde cada elemento está fixo em sua posição de origem (posição primitiva), isto é, o 1º elemento está no seu local primitivo ou 2º no seu lugar inicial, assim por diante até o enésimo elemento fixado na posição inicial, será definido a seguir. Chamando de A_i para i=(1,2,3,...,n) o número de permutações com cada elemento fixo tem-se a seguinte quantidade:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1: & 1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ A_2: & (n-1)\cdot 1\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ A_3: & (n-1)\cdot(n-2)\cdot 1\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ A_n: & (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1=(n-1)! \end{array}\right\} = n\cdot(n-1)!=n!$$

Evidentemente, no cálculo acima, há permutações repetidas nas sequências onde cada elemento está fixo, ou seja, há alguma permutação do A_1 em que o segundo elemento está no seu lugar primitivo e isso ocorre também com A_2, até o A_n, tendo desta forma várias interseções. Logo, precisa-se calcular o número dessas permutações observando as diversas interseções, e para isso utiliza-se a fórmula generalizada do PIE:

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\#(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)+\ldots+\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)+\ldots+$$
$$(-1)^{n-1}\#(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

Onde $\sum_{i=1}^{n}\#(A_i)=n!$, calculado anteriormente, e que $\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)$ é dado pela combinação de quaisquer dois elementos, assim observa-se abaixo

2 Princípio da Inclusão e Exclusão.

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \quad : \quad \left.\begin{array}{c} 1\cdot 1\cdot (n-2)\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1 = (n-2)! \\ \\ 1\cdot (n-2)\cdot 1\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1 = (n-2)! \\ \\ (n-2)\cdot 1\cdot 1\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1 = (n-2)! \\ \vdots \\ (n-2)\cdot (n-3)\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot 1 = (n-2)! \end{array}\right\} = C_n^2 \cdot (n-2)!$$

Logo, desenvolvendo $C_n^2 \cdot (n-2)!$, obtém-se $C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2!)} \cdot (n-2)!$

Simplificando, fica $C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$.

Portanto $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) = \frac{n!}{2!}$, é o número de permutações em que há pelo menos dois elementos em seus lugares de origem.

Seguindo o mesmo raciocínio para o $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right)$, tem-se que $\#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right)$ é igual a (n-3)!, C_n^3 vezes, ou seja, $C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3!)} \cdot (n-3)!$, simplificando, tem-se $C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$.

Logo, $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right) = \frac{n!}{3!}$ é o número de permutações com três elementos em seus lugares primitivos.

Por recorrência, conclui-se que $\#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{n!}{n!} = 1$.

Portanto, pode-se reescrever a fórmula generalizada do PIE da seguinte forma

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 1$$

Deixando todos os termos em forma de fração

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!}$$

evidenciando n! tem-se

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right) \qquad (3)$$

Sendo assim (3) o número de permutações de n elementos, com algum deles em seu lugar inicial.

Para se obter o desordenamento, ou seja, o número de permutações caóticas, de n elementos é necessário subtrair (3) do número geral de permutações simples de n elementos que é n!. Logo, D_n segue da seguinte forma:

$$D_n = n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

Evidenciando n! tem-se

$$D_n = n!\left[1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)\right]$$

Logo, realizando a multiplicação

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n-1+1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

Portanto, conclui-se que a fórmula da Permutação Caótica é da seguinte forma

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}\right) \tag{4}$$

Além dessa fórmula "é interessante observar que D_n é aproximadamente igual a $\frac{n!}{e}$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$" (MORGADO, 2006, p.75). De tal forma observa-se a tabela abaixo:

n	D_n	$\frac{n!}{e}$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
5	44	44,1...
6	265	264,8...
⋮	⋮	⋮

Tabela 5-Aproximações

Fonte-Morgado, 2006, p.75

Segue um exemplo resolvido utilizando esta fórmula.

Exemplo: (FUVEST 2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é

a)1/4 b)7/24 c)1/3 d)3/8 e)5/12

SOLUÇÃO: Considerando que Cláudia seja a primeira, Paulo o segundo, Rodrigo o terceiro e Ana a quarta pessoa a tirar o papel da urna. E como a questão pede a probabilidade que nenhum dos quatro retire o seu próprio nome, ou seja, nenhum dos papeis retorne ao seu local de origem, deve calcular o número total de possibilidades e o de desordenamento. Logo, o número total de possibilidades de se retirar o papel é dado pela fórmula da permutação simples, ou seja, $P_4=4! = 24$. *Agora calcula-se o número de possibilidades de nenhuma das 4 pessoas tirarem seu próprio nome utilizando a fórmula (4), tem-se*

$$D_4 = 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) \Rightarrow D_4 = 24\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)$$
$$\Rightarrow D_4 = 24\left(\frac{12-4+1}{24}\right) \Rightarrow D_4 = 12-4+1 \Rightarrow D_4 = 9$$

Portanto há 9 possibilidades dos papeis retirados não saírem na ordem Claudia, Paulo, Rodrigo e Ana. Assim o resultado da questão é o quociente entre o estas possibilidades e o número total, logo a probabilidade é de $\frac{9}{24}$, que simplificando por 3, obtém-se $\frac{3}{8}$, que corresponde a alternativa d.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste trabalho pode-se reconhecer que há a ausência de importantes conteúdos da Análise combinatória nos livros didáticos, constatados na tabela 1. Visto que os Métodos de Contagem são ferramentas imprescindíveis para o desenvolvimento da capacidade de pensar e compreender dos alunos, ao explorar novos conteúdos permite-se a elevação do nível dos estudantes, inclusive os de nível superior.

Durante a pesquisa constatou-se a presença dos agrupamentos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica em questões de provas importantes como Enem e provas de concursos, três presentes no corpo deste artigo, utilizadas como exemplo e também para mostrar a importância desses conteúdos no Ensino Médio.

Por fim, conclui-se que esses são os principais conteúdos da Análise Combinatória que não são abordados no Ensino Médio. Portanto, enfatiza-se a importância da inserção desses conteúdos nos livros didáticos, devido à necessidade da abordagem dos mesmos no Ensino Médio e por serem necessários para um melhor desenvolvimento dos alunos, beneficiando-os em seu futuro acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Luís R. D. **Métodos de contagem.** Dissertação (Mestrado em matemática) – PROFMAT. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2013.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC, 2000.

DURO, Mariana L. **Análise combinatória e construção de possibilidades:** o raciocínio formal no Ensino Médio. Dissertação (pós-graduação em educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1:** conjuntos, funções. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon L. **Curso de análise.** Vol 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MOGADO, Augusto César; et al. **Análise combinatória e probabilidade:** com as soluções dos exercícios. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, José P. O.; MELO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução a análise combinatória.** 4 ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

SILVA, Websther. **Uma generalização para o problema do amigo secreto.** Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade aberta do Brasil; Universidade Federal do rio Grande do Norte. Luís Gomes. 2016.

TATAIA, Paulo E. C. O. **Análise combinatória para o ensino médio.** Monografia (especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2012.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

S

T

U

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020