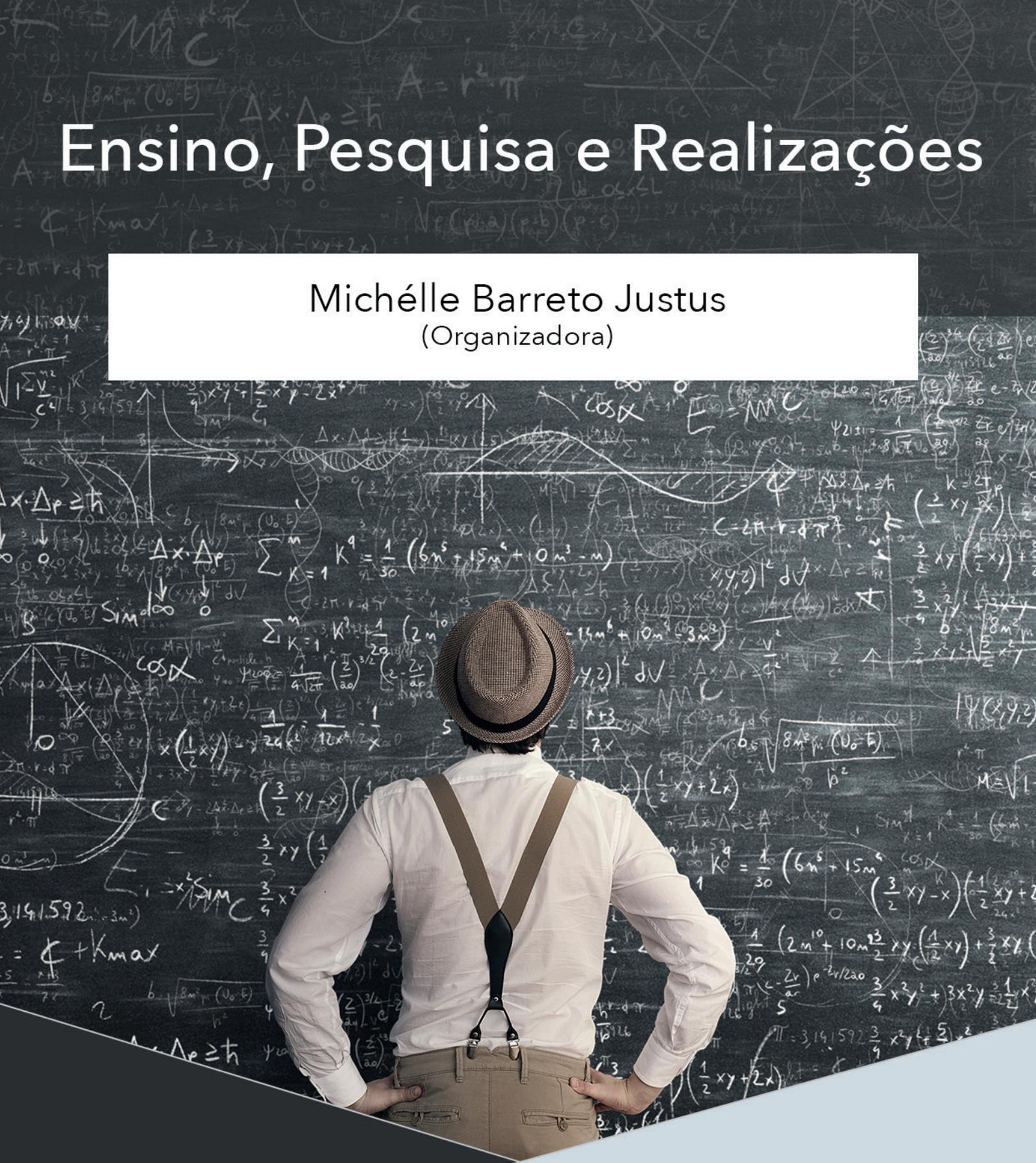


# Ensino, Pesquisa e Realizações

Michéle Barreto Justus  
(Organizadora)



**Atena**  
Editora

Ano 2018

Michéle Barreto Justus  
(Organizadora)

# **Ensino, Pesquisa e Realizações**

Atena Editora  
2018

2018 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Diagramação e Edição de Arte:** Geraldo Alves e Natália Sandrini

**Revisão:** Os autores

#### Conselho Editorial

- Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E	Ensino, pesquisa e realizações [recurso eletrônico] / Organizadora Michéle Barreto Justus. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2018.  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-006-3 DOI 10.22533/at.ed.063181212  1. Ciência – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia. I. Justus, Michéle Barreto.  CDD 001.42
---	---

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2018

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

Os estudos e pesquisas advindas do Ensino Superior podem contribuir sobremaneira para a melhoria das condições de vida da sociedade em geral, reafirmando o papel fundamental do conhecimento científico como ferramenta para a superação de vários problemas sociais vivenciados em nosso país.

Nesse sentido, o material intitulado “Ensino, pesquisa e realizações” ganha importância por constituir-se numa coletânea de estudos, experimentos e vivências de seus autores, tendo por objetivo reunir e socializar os estudos desenvolvidos em grandes universidades brasileiras.

A obra está organizada em 2 eixos: estudos teórico-metodológicos acerca de temas pedagógicos e pesquisas sobre processos biológicos e tecnológicos, reunidos em 27 artigos científicos.

Os artigos apresentam pesquisas direcionadas ao ambiente educacional, às práticas e metodologias de ensino, ao estudo da história e às possibilidades de soluções práticas de questões cotidianas nas áreas de enfermagem e das ciências exatas e tecnológicas.

Certamente os trabalhos aqui apresentados são de grande relevância para o meio acadêmico, pois proporcionam ao leitor uma gama de leituras que permitem análises e discussões sobre assuntos pertinentes à pedagogia, à biologia e à tecnologia numa perspectiva científica, através de linguagem clara e concisa, que propicia ao leitor a aproximação e o entendimento sobre alguns temas abordados nessas áreas do conhecimento.

Michéle Barreto Justus

## SUMÁRIO

### ÁREA TEMÁTICA PEDAGOGIA, FORMAÇÃO DE PROFESSORES E INCLUSÃO

#### **CAPÍTULO 1 ..... 1**

ANÁLISE DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: SUBSÍDIOS PARA UM DEBATE

[Renan Lucas Vieira dos Santos](#)

[Tatiana Costa Coelho](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812121**

#### **CAPÍTULO 2 ..... 8**

A FORMAÇÃO DOS DOCENTES DO CURSO DE PEDAGOGIA FRENTE AOS DESAFIOS

[Andreia Nunes de Castro](#)

[Rosângela de Fátima Cavalcante França](#)

[Sergio Paulo Mesquita Junior](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812122**

#### **CAPÍTULO 3 ..... 18**

AS CONTRIBUIÇÕES DE PRÁTICAS LUDICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS CRIANÇAS NA EDUCAÇÃO INFANTIL: A IMPORTANCIA DO PAPEL DO PEDAGOGO.

[Magnólia Maria Oliveira Costa](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812123**

#### **CAPÍTULO 4 ..... 30**

O TRABALHO PEDAGÓGICO REALIZADO COM BEBÊS NOS CENTROS MUNICIPAIS DE EDUCAÇÃO INFANTIL NO MUNICÍPIO DE CORNÉLIO PROCÓPIO-PR

[Roseli de Cássia Afonso](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812124**

#### **CAPÍTULO 5 ..... 41**

INCLUSÃO DE ALUNOS COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS NA ESCOLA REGULAR: UM OLHAR SOBRE A FORMAÇÃO DOCENTE

[Ivone Miranda dos Santos Menezes](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812125**

#### **CAPÍTULO 6 ..... 55**

REFLEXÕES SOBRE A FORMAÇÃO PROFISSIONAL A PARTIR DO DESENVOLVIMENTO DE UM PROJETO DE FORMAÇÃO CONTINUADA PARA O ENSINO E APRENDIZADO DA DANÇA NO CONTEXTO ESCOLAR

[Kathya Maria Ayres de Godoy](#)

[Ivo Ribeiro de Sá](#)

**DOI 10.22533/at.ed.0631812126**

#### **CAPÍTULO 7 ..... 68**

RESPONSABILIDADE SOCIAL UNIVERSITÁRIA, PROJETO ENVELHE SER E VIDA EM MOVIMENTO

[Mírian Pereira Gautério Bizzotto](#)

Olívio José da Silva Filho

DOI 10.22533/at.ed.0631812127

**CAPÍTULO 8 ..... 80**

VIVÊNCIAS JUVENIS INSCRITAS EM UM PROJETO EXTENSIONISTA DE INCLUSÃO DIGITAL

Rosane Maria Castilho

Flávia Valéria Cassimiro Braga

DOI 10.22533/at.ed.0631812128

**CAPÍTULO 9 ..... 96**

EFEITO DA FORMAÇÃO ACADÊMICA NO RENDIMENTO DE MESTRANDOS NA DISCIPLINA DE FISILOGIA DA PRODUÇÃO VEGETAL NA PÓS-GRADUAÇÃO DA UEG

Camila Lariane Amaro

Diego Braga de Oliveira

Patrícia Souza da Silveira

Fábio Santos Matos

DOI 10.22533/at.ed.0631812129

**CAPÍTULO 10 ..... 102**

PESSOAS COM DEFICIÊNCIA E A QUALIFICAÇÃO PROFISSIONAL PARA O MERCADO DE TRABALHO: UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA SENAC RN

Maria Augusta da Cunha Pimentel

DOI 10.22533/at.ed.06318121210

**CAPÍTULO 11 ..... 117**

HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO

Victor Fabiam Gomes Xavier

Clecia Simone G. R. Pacheco

DOI 10.22533/at.ed.06318121211

**CAPÍTULO 12 ..... 129**

INTEGRANDO AS PARTES AO TODO: BEM-VINDOS AO SENAC SÃO CARLOS

Márcia Cristina Fragelli

DOI 10.22533/at.ed.06318121212

**CAPÍTULO 13 ..... 133**

MATERIALISMO HISTÓRICO-DIALÉTICO E TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL NA EDUCAÇÃO ESCOLAR: UMA INVESTIGAÇÃO INICIAL EM PRODUÇÕES ACADÊMICAS RECENTES

Lucas Rinaldini

Jéssica Priscila Simões

Irineu Aliprando Tuim Viotto Filho

DOI 10.22533/at.ed.06318121213

**ÁREA TEMÁTICA METODOLOGIAS DE ENSINO**

**CAPÍTULO 14 ..... 140**

A UTILIZAÇÃO DAS “TIRAS HUMORÍSTICAS” COMO RECURSO MOTIVADOR PARA O ENSINO DE

**CAPÍTULO 15 ..... 151**

CONTRIBUIÇÕES PARA PRÁTICA PEDAGÓGICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE QUÍMICA

Jhenyfer Caroliny Almeida  
Luciana Aparecida Siqueira Silva  
Christina Vargas Miranda e Carvalho

DOI 10.22533/at.ed.06318121215

**CAPÍTULO 16 ..... 159**

CADEIAS DE MARKOV: UMA APLICAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Diogo Meurer de Souza Castro

DOI 10.22533/at.ed.06318121216

**CAPÍTULO 17 ..... 171**

O PEQUENO CIENTISTA E A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA SOBRE OS MICROORGANISMOS (BACTÉRIAS, FUNGOS E PROTOZOÁRIOS)

Marcelo Duarte Porto  
Everson Inácio de Melo  
Nayara Martins de Mattos  
Mariana de Moraes Germano  
Paloma Oliveira de Souza

DOI 10.22533/at.ed.06318121217

**CAPÍTULO 18 ..... 178**

METODOLOGIAS ATIVAS PARA AÇÕES DE EDUCAÇÃO AMBIENTAL: UM COMPARATIVO DAS METODOLOGIAS FUNDAMENTADAS NA PROBLEMATIZAÇÃO

Ana Carolina de Moraes  
Marta Jussara Cremer

DOI 10.22533/at.ed.06318121218

**CAPÍTULO 19 ..... 194**

A IMPORTÂNCIA DA CONSTRUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS DIGITAIS PARA PROFESSORES DO ENSINO SUPERIOR

Edilmar Marcelino  
Ana Beatriz Buoso Marcelino

DOI 10.22533/at.ed.06318121219

**CAPÍTULO 20 ..... 204**

PEDAGOGIA ATIVA: CONSTRUINDO SABERES NO ENSINO SUPERIOR

Alexandre Russo  
Fabiana Meireles de Oliveira  
Fatima Ramalho Lefone  
Marcos Correa

Mirian Nere

DOI 10.22533/at.ed.06318121220

**CAPÍTULO 21 ..... 209**

O USO DO WHATSAPP NO ENSINO

Ernane Rosa Martins

Luís Manuel Borges Gouveia

DOI 10.22533/at.ed.06318121221

**CAPÍTULO 22 ..... 217**

TRILHA URBANA E ANÁLISE DO ESPAÇO- TEMPO NO CENTRO HISTÓRICO DO RIO DE JANEIRO COM USO DO GEOPROCESSAMENTO

Paulo Elísio Marinho Abrantes

Gleide Alencar Do Nascimento

João Carlos Nara Junior

Reinaldo Bernardes Tavares

DOI 10.22533/at.ed.06318121222

**ÁREA TEMÁTICA PESQUISA HISTÓRICA**

**CAPÍTULO 23 ..... 237**

HISTÓRIA E IMAGINÁRIO SOCIAL DAS PROFESSORAS NO PROCESSO EDUCACIONAL NO BRASIL

Gláucia da Rosa do Amaral Alves

Elsbeth Léia Spode Becker

DOI 10.22533/at.ed.06318121223

**CAPÍTULO 24 ..... 253**

CAPITALISMO, GLOBALIZAÇÃO E CULTURA AFRODESCENDENTE:

A ASSOCIAÇÃO QUILOMBOLA ANA LAURA (PIRACANJUBA/GO)

Iván Mauricio Perdomo Villamil

Flávio Reis dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.06318121224

**CAPÍTULO 25 ..... 268**

A INDUMENTÁRIA FEMININA EM ANÁPOLIS ENTRE AS DÉCADAS DE 1920 E 1950

Amanda Milanez Fenerick

DOI 10.22533/at.ed.06318121225

**CAPÍTULO 26 ..... 283**

A INOPERÂNCIA DO ESTADO DIANTE DAS BARBÁRIES NO HOSPITAL COLÔNIA EM BARBACENA-MG

Fernanda Cristina de Brito

Márcio A. R. Rezende Filho

Juliana do Nascimento Farias

Cristiano Garcez Gualberto

DOI 10.22533/at.ed.06318121226

**CAPÍTULO 27 ..... 288**

A PRODUÇÃO DE UM DISCURSO DE NATUREZA NO PAMPA SOB O OHAR DA EDUCAÇÃO AMBIENTAL

Renata Lobato Schlee

Paula Corrêa Henning

DOI 10.22533/at.ed.06318121227

**CAPÍTULO 28 ..... 303**

EDUCAÇÃO, EXCLUSÃO E SILENCIAMENTO: A ESCOLA PÚBLICA NA PROVÍNCIA DO RIO DE JANEIRO (1850-1889)

Vinicius Teixeira Santos

DOI 10.22533/at.ed.06318121228

**CAPÍTULO 29 ..... 316**

SOBRE AS NOÇÕES DE SEMELHANÇA E DESSEMELHANÇA NA DEFINIÇÃO DA HUMANIDADE INDÍGENA: UM ESTUDO A PARTIR DE UM TEXTO JESUÍTICO DO SÉCULO XVI

Marcos Roberto de Faria.

DOI 10.22533/at.ed.06318121229

**ÁREA TEMÁTICA PROCESSOS BIOLÓGICO E TECNOLÓGICOS**

**CAPÍTULO 30 ..... 321**

A IMPORTÂNCIA DAS PLANTAS MEDICINAIS NO TRATAMENTO DE NEOPLASIAS: REVISÃO INTEGRATIVA DA LITERATURA

Francisco Lucas Sales Dressler Silva

Thyago Pereira Douglas Machado

Felipe Valino dos Santos

William Dias Borges

Glenda Keyla China Quemel

Ana Gabriela Sousa Gonçalves

DOI 10.22533/at.ed.06318121230

**CAPÍTULO 31 ..... 326**

ANÁLISE COMPARATIVA DO CRESCIMENTO INICIAL DE *EUCALYPTUS GRANDIS* HILL EX MAIDEN (MYRTACEAE) E *GUAZUMA ULMIFOLIA* LAM. (MALVACEAE)

Thaynara Martins de Oliveira

Rayane Rodrigues Ferreira

Jales Teixeira Chaves Filho

DOI 10.22533/at.ed.06318121231

**CAPÍTULO 32 ..... 330**

ESTIMATIVA DA VARIABILIDADE ESPACIAL DO ÍNDICE RELATIVO DE CLOROFILA POR MEIO DE KRIGAGEM INDICATIVA

Caroline Xavier dos Santos

Elaine de Fatima Miranda Freitas

Sueli Martins de Freitas Alves

DOI 10.22533/at.ed.06318121232

**CAPÍTULO 33 ..... 338**

LÁTEX E ANGIOGÊNESE

Patrícia Lima D'Abadia

Amanda Fernandes Costa

Pablo José Gonçalves

Luciane Madureira de Almeida  
DOI 10.22533/at.ed.06318121233

**CAPÍTULO 34 ..... 356**

RESFRIAMENTO DO AMBIENTE INTERNO DE MODELOS REDUZIDOS DE RESIDÊNCIA USANDO A TÉCNICA POT-IN-POT EM PAREDES

Marianne Silva Guimarães  
Lídia Alla Silva  
Patrícia Sardinha Dias  
Isabella Faria Santos  
Miriã Moreira Costa  
Dra. Raphaela Christina Costa Gomes

DOI 10.22533/at.ed.06318121234

**CAPÍTULO 35 ..... 366**

TRATAMENTO TERCIÁRIO DO CORPO HÍDRICO DO RIBEIRÃO VAI E VEM NO MUNICÍPIO DE IPAMERI – GO CONTAMINADO POR EFLUENTE DOMÉSTICO.

Luciana Maria da Silva  
Janaína Borges de Azevedo França  
Luana Mesak  
Anderson Dias

DOI 10.22533/at.ed.06318121235

**CAPÍTULO 36 ..... 376**

HYDROFLOW: MEDIDOR DE FLUXO DE ÁGUA COM ENFOQUE NO CONSUMO SUSTENTÁVEL

Yonathan Stein  
Alex Martins de Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.06318121236

**SOBRE A ORGANIZADORA..... 392**

## CADEIAS DE MARKOV: UMA APLICAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

**Diogo Meurer de Souza Castro**

Instituto Federal de Alagoas

Maceió – Alagoas

**RESUMO:** A Cadeia de Markov é um conteúdo aplicado em várias áreas do conhecimento e que pode ser ensinado no Ensino Médio, pois ela trabalha com assuntos como probabilidades, matrizes e sistemas lineares. Nessa perspectiva, a proposta deste texto é apresentar uma sequência didática em que o professor poderá mostrar aos alunos uma aplicação de algo que eles estão estudando ou já estudaram. Essa sequência didática é composta por três momentos em que a teoria é apresentada aos alunos e problemas são propostos, além do uso de ferramentas computacionais, como, por exemplo, o Geogebra.

**PALAVRAS-CHAVE:** Cadeias de Markov. Ensino da matemática. Sequência didática.

**ABSTRACT:** The Markov Chain is a content that is applied in several areas and it can be taught in the High School, for its probabilities, matrices and linear system. In this perspective, this text proposal is to introduce a didactic sequence which the teacher can show students an application about something that they are studying or have already studied. This didactic sequence is composed of three moments where the theory is presented to the students

and problems are proposed, and also the use of computational tools, like, for instance, Geogebra.

**KEYWORDS:** Markov Chain. Mathematics teaching. Didactic sequence.

### 1 | INTRODUÇÃO

Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) foi um matemático russo que produziu trabalhos em várias áreas da matemática como limite de integrais, frações contínuas, teoria das probabilidades e teoria das aproximações. Porém, ele é bastante lembrado pelos seus estudos nas Cadeias de Markov, iniciando, assim, um novo ramo na teoria das probabilidades e nos processos estocásticos.

Elas são aplicadas em várias áreas da ciência, tais como em modelamento de problemas encontrados na prática, ciências biológicas, sociais e administrativas, teoria dos jogos (problema da ruína do jogador), evolução das populações, processos epidemiológicos e teoria das filas. Métodos bem parecidos ajudam a identificar genes no DNA, simular o comportamento nas interações de várias partículas num sistema, etc.

As Cadeias de Markov são um ótimo caso de um saber científico matemático, o saber

sábio (aquele que os cientistas descobrem), onde vive no Ensino Superior, que pode ser transformado em saber a ser ensinado (aquele que acontece na sala de aula) no Ensino Médio, pois trabalha com conteúdos que são ensinados nesta etapa, tais como: probabilidade, matrizes e sistemas.

Britto, em seu trabalho, cita alguns objetivos de atividades abordando as Cadeias de Markov:

- Mostrar a utilização de matrizes em outras áreas do conhecimento, áreas estas que a maioria dos estudantes supõe não utilizar matemática de forma mais aprofundada.
- Permitir aos alunos enxergar matriz como uma forma interessante e eficiente de representação e manipulação de dados.
- Mostrar a importância de ferramentas matemáticas (probabilidade e matrizes) na previsão de diversas situações futuras, previsões estas muito importantes para a tomada de decisões por parte de diversos profissionais (administradores, economistas, biólogos e tantos outros) em determinadas áreas de atuação.
- Reforçar as informações a respeito de cadeias de Markov estudadas. Trabalhar a multiplicação de matrizes cujas entradas são probabilidades e resolver sistemas lineares.
- Mostrar que o uso de tecnologias pode ser útil quando a resolução de um problema envolve muitos cálculos e permitir que o aluno se utilize dessas tecnologias. (BRITTO, 2014, p. 29).

Na maioria das vezes, o ensino de matrizes é voltado somente às técnicas e aos algoritmos, fazendo com que o assunto não tenha significado para os alunos. É papel do professor tentar mostrar aos alunos algumas aplicações sobre o que eles estão aprendendo. Fazendo, assim, com que eles vejam finalidade no que estão estudando. Trabalhos como os de Kraieski (1999), Sanches (2002) e Britto (2014) fazem um estudo sobre o tema.

Esse texto apresenta uma proposta de sequência didática de como aplicar as Cadeias de Markov no Ensino Médio. Primeiramente, iremos revisar alguns tópicos importantes para o leitor lembrar da Teoria das Probabilidades. Depois, iremos apresentar as Cadeias de Markov. E, por último, mostraremos algumas sugestões de atividades para serem usadas em sala de aula. Não iremos entrar em detalhes sobre demonstrações de teoremas. Caso o leitor queira se aprofundar no assunto, aconselhamos a leitura do trabalho de dissertação de mestrado de Castro (2015).

## 2 | REVISÃO DE TÓPICOS

Neste capítulo, iremos abordar alguns tópicos importantes para apresentarmos as Cadeias de Markov. Como uma proposta de sequência didática, fica a cargo do professor se esses tópicos serão abordados ou não. Mas, para o professor, é de extrema importância ter conhecimento dos mesmos.

## 2.1 Variáveis Aleatórias

Imagine um dado sendo lançado duas vezes. Os possíveis resultados são:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Figura 1 - Resultados possíveis no duplo lançamento de um dado

Fonte: Autor, 2018

Agora, vamos chamar de  $X$  o número de vezes em que o número 2 aparece na dupla  $(x,y)$ . É fácil ver que  $X \in \{0,1,2\}$ . Então, podemos criar uma função onde associa a cada elemento do espaço amostral um número que pertence ao conjunto  $\{0,1,2\}$

Chamamos de variável aleatória uma função que associa um número real  $x(\zeta)$  a cada resultado  $\zeta$  do espaço amostral.

## 2.2 Processo Não-Determinístico

É um processo com origem em eventos aleatórios, pois há uma probabilidade, uma chance de ocorrência. Diferente do processo determinístico, pois neles há uma certeza de que ocorrerá. Por exemplo, jogar na loteria é um processo não-determinístico, pois quanto mais eu jogo, eu tenho a maior chance de ganhar, mas isso não garante que irei ganhar.

## 2.3 Processo Estocástico

É um processo não-determinístico onde a variável de interesse varia através do tempo. Formalmente, podemos definir assim: Seja  $\Omega$ , um conjunto que indexará uma família de variáveis aleatórias  $X_t$ . A sequência  $\{X_t\}_{t \in \Omega}$  é chamada de processo estocástico.

Se  $\Omega$  for um intervalo de  $\mathbb{R}_+$ , esse processo é chamado de contínuo. Caso  $\Omega \subset \mathbb{N}$ , ele será chamado de discreto. Denominamos de estados os valores assumidos por um processo estocástico e o conjunto de todos os estados possíveis é dito espaço de estados.

## 3 | CADEIAS DE MARKOV

As Cadeias de Markov têm uma característica interessante pois o futuro da evolução do processo depende apenas do momento em que ele está e não do que aconteceu anteriormente. Essa condição das Cadeias de Markov nos diz que basta

analisarmos o estado presente para podermos analisar os acontecimentos futuros, não precisando conhecer os estados anteriores. Essa propriedade é o que chamamos de propriedade markoviana.

Segundo ZITKOVIC (2010), podemos definir as Cadeias de Markov como um processo estocástico  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  que a partir de um espaço amostral contável  $S$ , temos que  $P[X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , todos  $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ . Suponha que uma partícula escolhe saltar para um vértice vizinho do retângulo abaixo. Temos que as variáveis aleatórias  $X_t$  estarão no conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . Seja  $X_t$  a posição da partícula no tempo  $t$ , a probabilidade de uma partícula estar no vértice  $j$ , em um passo, estando no vértice  $i$ , com  $i, j \in S$ , é definida por

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } i \text{ e } j \text{ estão conectados,} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Figura 2 - Retângulo

Fonte: Autor, 2018

Observe que as probabilidades para sair de um vértice ao outro (chamadas de probabilidades de transição) não dependem de  $n$  (por exemplo, sair do vértice 1 para o 2 é igual a  $1/2$ ). Chamamos esse fato de probabilidades de transição estacionárias ou homogêneas. Assim, garantimos que as probabilidades de transição não mudarão ao longo do tempo. Este é um caso de uma Cadeia de Markov homogênea.

As probabilidades de transição são escritas como  $p_{ij}$ , ou seja,  $p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$  é a probabilidade de estarmos em  $t = 1$  no estado  $j$ , dado que em  $t = 0$  estamos no estado  $i$ . E como elas são homogêneas, temos que

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_{m+1} = j | X_m = i), \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Essas probabilidades podem ser postas numa matriz que chamamos de matriz de transição. No nosso exemplo, a matriz de transição será

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma outra forma de representar as probabilidades de transição é usando o diagrama de transição. Eles lembram bastante as árvores de possibilidades que são usadas no ensino de probabilidade no Ensino Médio. Os Diagramas de Transição são uma representação do processo onde cada vértice representa um estado e cada arco é valorado pelas probabilidades de transição. No nosso exemplo, teríamos:

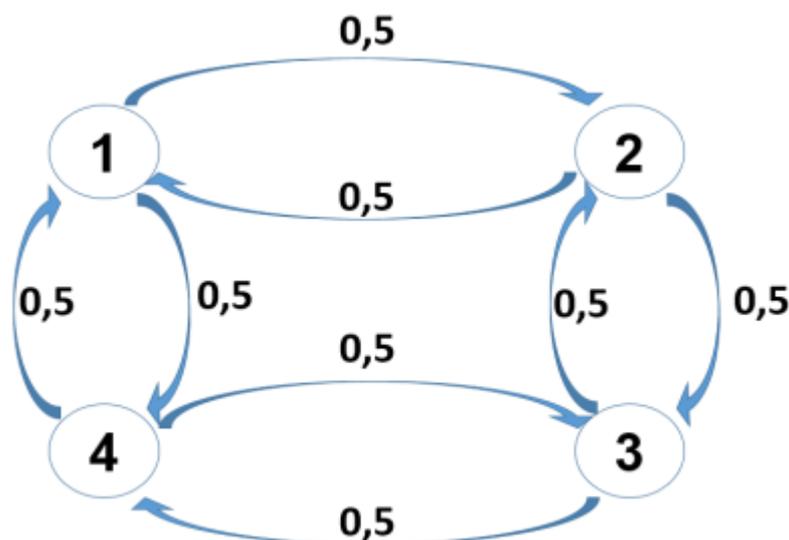


Figura 3 - Diagrama de Transição

Fonte: Autor, 2018

Apresentando os pontos acima, podemos fazer a seguinte pergunta: Qual a probabilidade da partícula estar no vértice 1 e, após dois movimentos, estar no vértice 3?

A resposta para essa pergunta pode ser obtida usando o que sabemos do Ensino Médio. Partindo do vértice 1 e, em dois movimentos, estar no vértice 3, a partícula pode fazer os percursos: 1-2-3 ou 1-4-3. A probabilidade da partícula fazer o percurso 1-2-3 é  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Como o mesmo raciocínio é para o caso 1-4-3, a resposta será  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ . A nomenclatura que usamos para representar essa situação é  $p_{13}^{(2)}$ , ou seja, a probabilidade de sair do vértice 1 ao 3 em 2 iterações.

Mas, imagine fazermos isso para um número muito grande iterações? Temos alguns teoremas que podem facilitar esses cálculos. Um ponto importante a ser observado é que se calcularmos a matriz  $P^2$ , obtemos a resposta do exemplo acima. Veja na matriz abaixo, que o elemento que está na primeira linha e na terceira coluna é o número  $\frac{1}{2}$ , nossa resposta.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, se quisermos descobrir a probabilidade da partícula, partindo do vértice 3 estar no vértice 1 em duas iterações, basta procurar pelo elemento que está na terceira linha e na primeira coluna da matriz  $P^2$ .

Um outro questionamento que podemos fazer sobre o exemplo que estamos utilizando é o seguinte: Se aumentarmos consideravelmente a quantidade de movimentos, quais probabilidades teríamos da partícula estar em cada vértice? Para obtermos essa resposta precisamos definir o que é um vetor de probabilidade.

Definimos um vetor de probabilidade numa Cadeia de Markov com  $n$  passos,  $X^{(n)}$ , um vetor linha cuja  $j$ -ésima componente  $X_j^{(n)}$  é igual à probabilidade do sistema estar no  $j$ -ésimo estado na  $n$ -ésima observação. Isto é,  $x^{(n)} = (x_0^{(n)} x_1^{(n)}, \dots)$ . Para o vetor de probabilidade, temos duas fórmulas que facilitam os cálculos. São elas:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} \cdot P \quad (1)$$

$$x^{(n)} = x^{(0)} \cdot P^n \quad (2)$$

No nosso exemplo, o vetor inicial é  $X^{(0)} = (1000)$ , porque temos a probabilidade de 100% dele estar no vértice 1 e de 0% de estar nos outros vértices. Então, utilizando (2), no segundo movimento da partícula, temos que

$$x^{(2)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0\right)$$

Então, concluímos que no segundo movimento da partícula, a probabilidade dela estar no primeiro vértice ou no terceiro vértice é de 50% e de 0% de estar no segundo ou no quarto vértice.

Agora, respondendo o último questionamento, calculando as potências da matriz de transição  $P$ , vemos que ela não se altera. Ou seja, se imaginarmos a partícula no 50º movimento, a matriz  $P^{50}$  é a mesma que a  $P^2$

Para cálculos com matrizes, sugerimos ao leitor o uso do site Matrix Calculator, cujo endereço é <https://matrixcalc.org/pt/>. Nele é possível fazer vários cálculos com matrizes, inclusive potências.

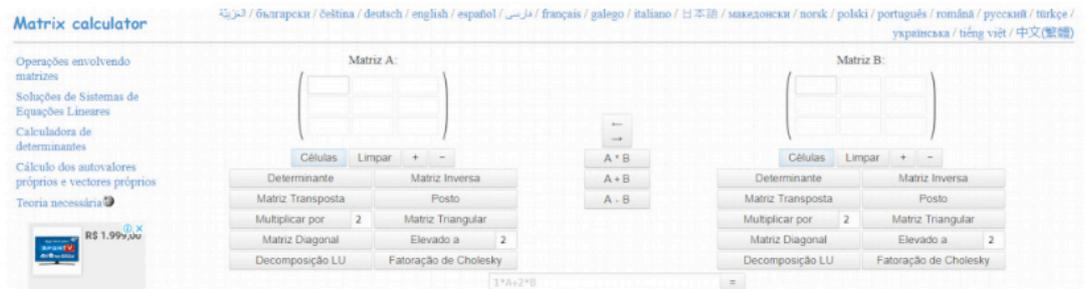


Figura 4 - Site Matrix Calculator

Fonte: Autor, 2018

## 4 I SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A SALA DE AULA

Propomos ao leitor que queira aplicar este conteúdo em sala de aula uma sequência com 3 momentos para que o conteúdo possa ser apresentado e trabalhado com problemas instigadores, estimulando o raciocínio e a aplicação dos conteúdos de Matemática já citados. Em cada momento, apresentamos um problema que pode ser trabalhado em sala de aula.

### 4.1 Momento 1

O objetivo desse primeiro momento é que o professor introduza a definição das Cadeias de Markov mostrando, principalmente, sua propriedade. Além disso, apresente as matrizes de transição e o diagrama de transição.

O problema proposto para esse momento é:

Todo ano, uma empresa de plano de saúde faz um estudo observando se um cliente está: bem, doente ou morto, para saber quanto a empresa deverá gastar com cada cliente. Considerando que esse processo apresenta as características de uma Cadeia de Markov, a transição de um estado ao outro respeita a matriz de transição abaixo.

$$\begin{array}{l}
 \textit{bem} \\
 \textit{doente} \\
 \textit{morto}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0,4 & 0,4 & 0,2 \\
 0,6 & 0,2 & 0,2 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \textit{bem} \\
 \textit{doente} \\
 \textit{morto}
 \end{array}$$

Figura 5- Matriz de transição

Fonte: Autor, 2018

- Monte um diagrama de transição dessa situação.
- Se um cliente, hoje, está bem, qual a probabilidade dele estar doente quando

a análise for feita daqui a dois anos?

Respostas:

a)

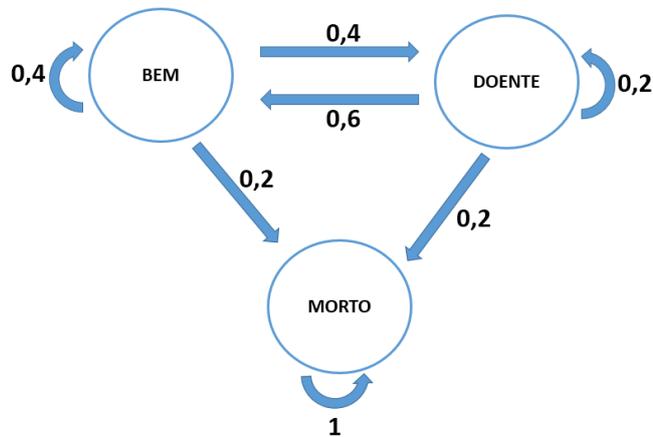


Figura 6- Resposta do item a)

Fonte: Autor, 2018

b) 24%

## 4.2 Momento 2

No segundo momento da sequência didática, o professor pode apresentar as duas fórmulas que facilitarão os cálculos para grandes iterações:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} \cdot P \text{ e } x^{(n)} = x^{(0)} \cdot P^n.$$

O problema proposto para esse momento é:

Suponha que a chance de chover ou fazer sol amanhã dependa somente das condições climáticas do dia de hoje e não dos outros dias passados. Em Maceió, foi observado que após um dia de sol, a probabilidade de no próximo dia também haver sol é de 80% e de 20% de chover. Mas, após um dia chuvoso, a probabilidade de o outro dia ser sol é de 50%. Com base nessas informações, responda:

a) Determine a matriz de transição relacionada ao modelo.

b) Por que não é possível fazer a multiplicação das matrizes:

(MATRIZ DE TRANSIÇÃO) · (VETOR DE PROBABILIDADE)

e sim:

(VETOR DE PROBABILIDADE) · (MATRIZ DE TRANSIÇÃO)?

c) Se o estado inicial da averiguação for um dia com sol, verifique a previsão dos próximos dois dias.

d) Agora, se o estado inicial for o vetor (0,2 0,8) verifique a previsão dos

próximos três dias.

## RESPOSTAS:

a)  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

b) A multiplicação, na pergunta, não é possível, pois a matriz de transição é da forma  $2 \times 2$  e o vetor de probabilidade é da forma  $1 \times 2$ , impossibilitando a multiplicação.

c)  $x^{(1)} = (0,8 \ 0,2)$  e  $x^{(2)} = (0,74 \ 0,26)$

d)  $x^{(1)} = (0,56 \ 0,44)$ ,  $x^{(2)} = (0,668 \ 0,332)$  e  $x^{(3)} = (0,7 \ 0,3)$

### 4.3 Momento 3

Nesse momento, com a apresentação das duas fórmulas, é possível levantar uma discussão sobre os cálculos que são necessários para chegar a potências de matrizes e como, hoje em dia, a ciência lida com esse tipo de problema. É óbvio que o uso da tecnologia será falado. Cada vez mais temos computadores potentes e, no nosso dia a dia, celulares e computadores já fazem cálculos que antigamente era algo inimaginável.

O uso da tecnologia na educação também é algo bastante estudado por pesquisadores. Gonçalves (2004) fala a respeito do assunto.

Na dimensão educacional, a tecnologia não consiste apenas em mais um recurso para os professores motivarem as suas aulas, mas também um recurso que também propicia a inclusão social e leva o aluno a cidadania. Os professores que trabalham em sala de aula devem refletir sobre o cenário tecnológico atual, sugerindo e pesquisando novas maneiras do uso do computador para as aulas de Matemática, propiciando ao aluno a adequação ao mercado de trabalho da atualidade. (GONÇALVES, 2004, p. 2)

Além do site já citado, Matrix Calculator, também sugerimos o programa WINMAT (<http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wmpr32z.exe>) e o Geogebra ([www.geogebra.org/](http://www.geogebra.org/)) para serem usados na aplicação dessa sequência didática.

Concordamos com BIASI (2012), que acredita que o uso dessas ferramentas ajudam no ensino-aprendizagem dos alunos. Segundo ele,

Essa complementação é relevante, pois por muitas vezes os conceitos que não são satisfatoriamente entendidos, podem ser retomados ou reforçados em um laboratório com o auxílio de uma ferramenta especializada, que além de exemplificar conceitos da teoria, pode proporcionar ao aluno que ele pratique o que foi trabalhado em sala. (2012, p. 37)

Castro (2015) desenvolveu dois objetos de aprendizagens no Geogebra para ser aplicado nesses problemas propostos da Cadeias de Markov. Por exemplo, num caso de uma matriz de transição  $2 \times 2$ , o usuário pode digitar a matriz de transição e o vetor

inicial. Com o botão deslizante  $k$ , pode-se escolher a potência desejada para a matriz, entregando, assim, a matriz  $M^k$  e o vetor  $X^{(k)}$ . Para fazer o download dos dois objetos de aprendizagem: matriz 2x2 e matriz 3x3, basta acessar o link <https://goo.gl/3TwhvU>.

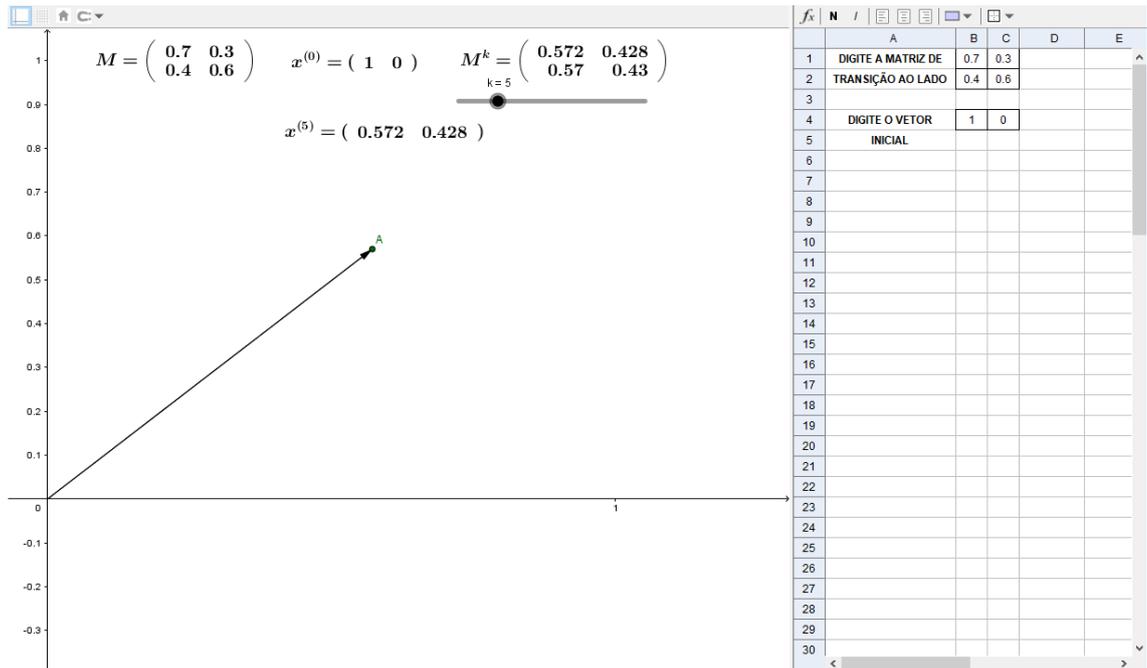


Figura 7 - objeto de aprendizagem no Geogebra

Fonte: Autor, 2018

O problema proposto para esse momento é:  
Observe o diagrama de transição abaixo:

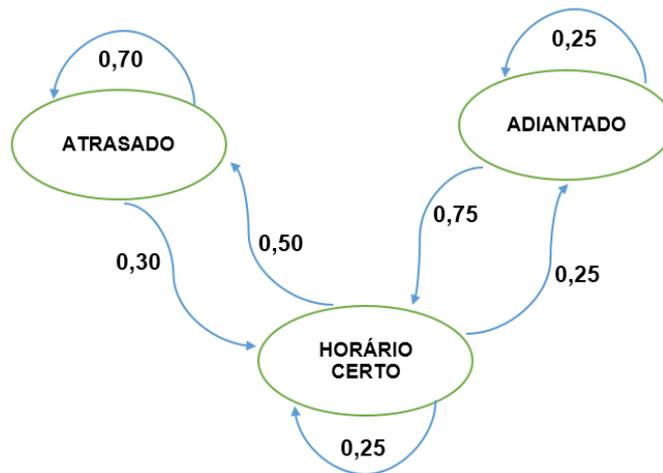


Figura 8 - Diagrama de transição do problema

Fonte: Autor, 2018

Ele representa a situação de uma linha de ônibus com seu horário de chegada em um determinado ponto para tentar prever se o ônibus irá chegar atrasado, adiantado ou no horário correto.

- a) Determine a matriz de transição  $P$  desta situação com a primeira linha para *ATRASADOS*, segunda linha *ADIANTADO* e terceira linha, *HORARIO CERTO*.

- b) Se o vetor de probabilidade inicial é  $x^{(0)} = (0,50 \ 0,14 \ 0,36)$  determine qual a probabilidade do ônibus chegar no horário certo no terceiro dia.
- c) Utilize o vetor de probabilidade da letra b e calcule os vetores  $x^{(4)}$ ;  $x^{(5)}$ ;  $x^{(6)}$ ;  $x^{(7)}$ ;  $x^{(8)}$ ;  $x^{(9)}$ ;  $x^{(10)}$ . O que você percebe?

## RESPOSTAS:

$$a) \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$b) (0,54995 \ 0,11412 \ 0,33593)$$

$$c) x^{(4)} = (0,55293 \ 0,11251 \ 0,33456), \quad x^{(5)} = (0,55433 \ 0,11177 \ 0,33390),$$

$$x^{(6)} = (0,55498 \ 0,11142 \ 0,33360), \quad x^{(7)} = (0,55529 \ 0,11125 \ 0,33346),$$

$$x^{(8)} = (0,55543 \ 0,11118 \ 0,33339), \quad x^{(9)} = (0,55550 \ 0,11114 \ 0,33336)$$

$$x^{(10)} = (0,55553 \ 0,11113 \ 0,33335)$$

## 5 | CONCLUSÃO

Acreditamos que mostrar aos alunos aplicações de conteúdos que eles estão estudando (no caso das Cadeias de Markov, ela é uma clara aplicação das matrizes e da probabilidade) é uma forma de estimulá-los a estudar Matemática e perceber que há muito mais coisas sendo estudadas usando o que eles estão aprendendo. Segundo os PCNs (2000, p.15) “há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama”.

O ensino voltado a somente procedimentos mecânicos e falta de significado atrapalha bastante a compreensão dos alunos e até uma ligação afetiva do mesmo com a disciplina. Aquilo que o aluno leva da sala de aula deve capacitá-lo a lidar com o meio em que vive, aplicar conhecimentos matemáticos em seu cotidiano e permitindo-o, também, o seu crescimento intelectual. Cabe a nós, professores, buscarmos ferramentas para essa mudança. Seremos nós que daremos esse salto para um ensino melhor da disciplina.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Rio de Janeiro: DPA, 2000.

BRITTO, M. A. F. O. **Matrizes**: Propostas de Aplicação no Ensino Médio. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.

CASTRO, D. M. S. CADEIAS DE MARKOV: Uma Aplicação para o Ensino de Matrizes e Probabilidades. Maceió: UFAL, 2015.

GONÇALVES, J. P. **Reflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no software educativo FORMEL.** Revista Brasileira de Informática na Educação ,v.12, n. 2, 2004.

KRAIESKI, P. **Abordagem de matrizes no ensino médio:** Uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.

SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

ZITKOVIC, G. **Introduction to Stochastic Processes** - Lecture Notes. Disponível em: <[https://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction to stochastic processes.pdf](https://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction%20to%20stochastic%20processes.pdf)>. Acesso em: 19 julho 2018.

BIASI, H.; DOMENECH, M. **Ferramenta de Software para o auxílio ao processo de Ensino-Aprendizagem de Métodos Estocásticos.** Unoesc Ciência ACET, Joaçaba, v. 3, n. 1, p. 37-46, jan./jun. 2012.