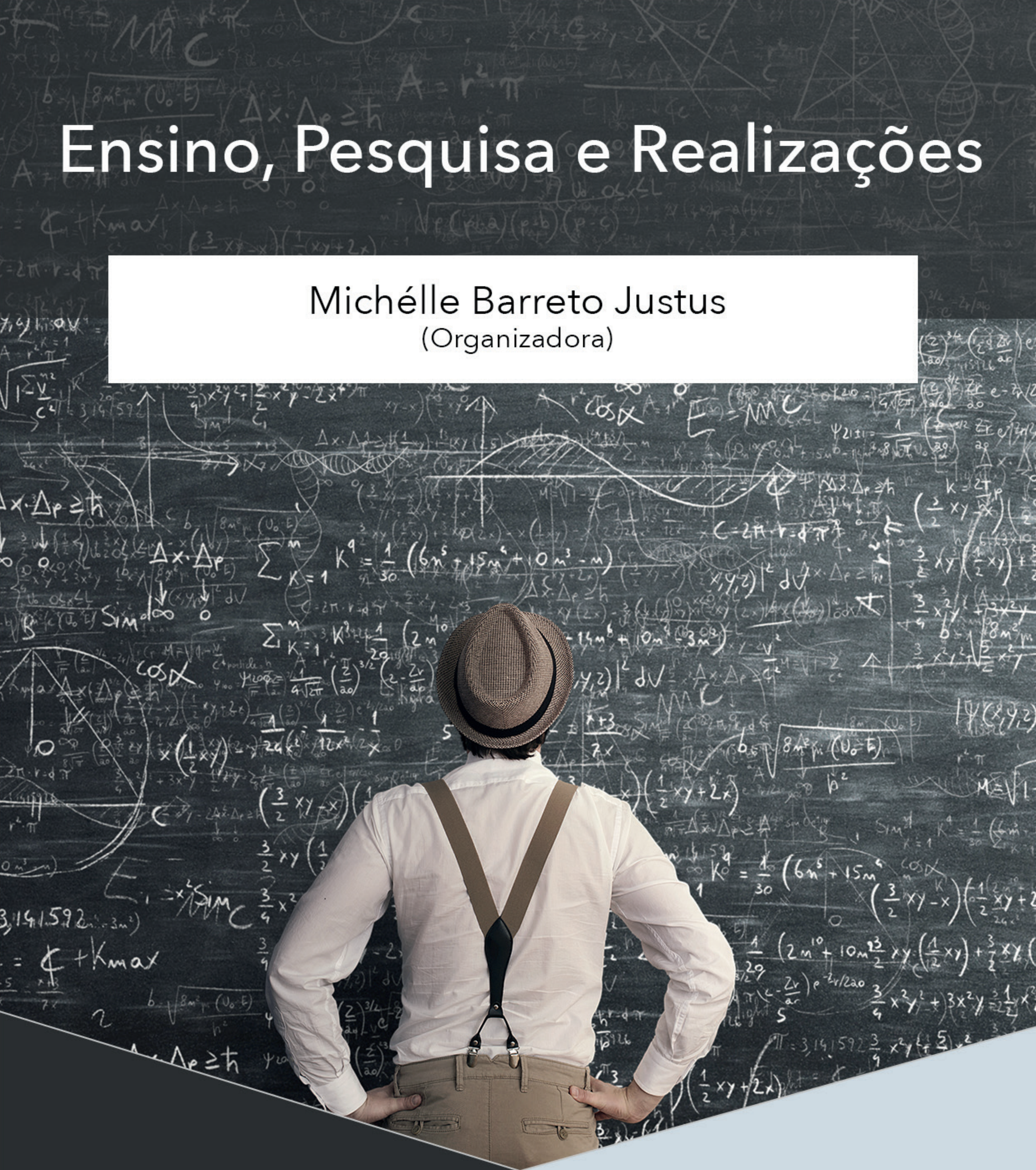
Ensino, Pesquisa e Realizações

Michélle Barreto Justus
(Organizadora)



Atena Editora

Ano 2018

Michélle Barreto Justus
(Organizadora)

Ensino, Pesquisa e Realizações

Atena Editora
2018

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação e Edição de Arte: Geraldo Alves e Natália Sandrini
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E Ensino, pesquisa e realizações [recurso eletrônico] / Organizadora Michélle Barreto Justus. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2018.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-006-3
DOI 10.22533/at.ed.063181212

1. Ciência – Brasil. 2. Pesquisa – Metodologia. I. Justus, Michélle Barreto.

CDD 001.42

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

APRESENTAÇÃO

Os estudos e pesquisas advindas do Ensino Superior podem contribuir sobremaneira para a melhoria das condições de vida da sociedade em geral, reafirmando o papel fundamental do conhecimento científico como ferramenta para a superação de vários problemas sociais vivenciados em nosso país.

Nesse sentido, o material intitulado “Ensino, pesquisa e realizações” ganha importância por constituir-se numa coletânea de estudos, experimentos e vivências de seus autores, tendo por objetivo reunir e socializar os estudos desenvolvidos em grandes universidades brasileiras.

A obra está organizada em 2 eixos: estudos teórico-metodológicos acerca de temas pedagógicos e pesquisas sobre processos biológicos e tecnológicos, reunidos em 27 artigos científicos.

Os artigos apresentam pesquisas direcionadas ao ambiente educacional, às práticas e metodologias de ensino, ao estudo da história e às possibilidades de soluções práticas de questões cotidianas nas áreas de enfermagem e das ciências exatas e tecnológicas.

Certamente os trabalhos aqui apresentados são de grande relevância para o meio acadêmico, pois proporcionam ao leitor uma gama de leituras que permitem análises e discussões sobre assuntos pertinentes à pedagogia, à biologia e à tecnologia numa perspectiva científica, através de linguagem clara e concisa, que propicia ao leitor a aproximação e o entendimento sobre alguns temas abordados nessas áreas do conhecimento.

Michélle Barreto Justus

SUMÁRIO

ÁREA TEMÁTICA PEDAGOGIA,FORMAÇÃO DE PROFESSORES E INCLUSÃO

CAPÍTULO 16

CADEIAS DE MARKOV: UMA APLICAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Diogo Meurer de Souza Castro
Instituto Federal de Alagoas
Maceió – Alagoas

RESUMO: A Cadeia de Markov é um conteúdo aplicado em várias áreas do conhecimento e que pode ser ensinado no Ensino Médio, pois ela trabalha com assuntos como probabilidades, matrizes e sistemas lineares. Nessa perspectiva, a proposta deste texto é apresentar uma sequência didática em que o professor poderá mostrar aos alunos uma aplicação de algo que eles estão estudando ou já estudaram. Essa sequência didática é composta por três momentos em que a teoria é apresentada aos alunos e problemas são propostos, além do uso de ferramentas computacionais, como, por exemplo, o Geogebra.
PALAVRAS-CHAVE: Cadeias de Markov. Ensino da matemática. Sequência didática.
ABSTRACT: The Markov Chain is a content that is applied in several areas and it can be taught in the High School, for its probabilities, matrices and linear system. In this perspective, this text proposal is to introduce a didactic sequence which the teacher can show students an application about something that they are studying or have already studied. This didactic sequence is composed of three moments where the theory is presented to the students and problems are proposed, and also the use of computational tools, like, for instance, Geogebra.
KEYWORDS: Markov Chain. Mathematics teaching. Didactic sequence.

1 I INTRODUÇÃO

Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) foi um matemático russo que produziu trabalhos em várias áreas da matemática como limite de integrais, frações contínuas, teoria das probabilidades e teoria das aproximações. Porém, ele é bastante lembrado pelos seus estudos nas Cadeias de Markov, iniciando, assim, um novo ramo na teoria das probabilidades e nos processos estocásticos.

Elas são aplicadas em várias áreas da ciência, tais como em modelamento de problemas encontrados na prática, ciências biológicas, sociais e administrativas, teoria dos jogos (problema da ruína do jogador), evolução das populações, processos epidemiológicos e teoria das filas. Métodos bem parecidos ajudam a identificar genes no DNA, simular o comportamento nas interações de várias partículas num sistema, etc.

As Cadeias de Markov são um ótimo caso de um saber científico matemático, o saber sábio (aquele que os cientistas descobrem), onde vive no Ensino Superior, que pode ser transformado em saber a ser ensinado (aquele que acontece na sala de aula) no Ensino Médio, pois trabalha com conteúdos que são ensinados nesta etapa, tais como: probabilidade, matrizes e sistemas.

Britto, em seu trabalho, cita alguns objetivos de atividades abordando as Cadeias de Markov:

- Mostrar a utilização de matrizes em outras áreas do conhecimento, áreas estas que a maioria dos estudantes supõe não utilizar matemática de forma mais aprofundada.
- Permitir aos alunos enxergar matriz como uma forma interessante e eficiente de representação e manipulação de dados.
- Mostrar a importância de ferramentas matemáticas (probabilidade e matrizes) na previsão de diversas situações futuras, previsões estas muito importantes para a tomada de decisões por parte de diversos profissionais (administradores, economistas, biólogos e tantos outros) em determinadas áreas de atuação.
- Reforçar as informações a respeito de cadeias de Markov estudadas. Trabalhar a multiplicação de matrizes cujas entradas são probabilidades e resolver sistemas lineares.
- Mostrar que o uso de tecnologias pode ser útil quando a resolução de um problema envolve muitos cálculos e permitir que o aluno se utilize dessas tecnologias. (BRITTO, 2014, p. 29).

Na maioria das vezes, o ensino de matrizes é voltado somente às técnicas e aos algoritmos, fazendo com que o assunto não tenha significado para os alunos. É papel do professor tentar mostrar aos alunos algumas aplicações sobre o que eles estão aprendendo. Fazendo, assim, com que eles vejam finalidade no que estão estudando. Trabalhos como os de Kraieski (1999), Sanches (2002) e Britto (2014) fazem um estudo sobre o tema.

Esse texto apresenta uma proposta de sequência didática de como aplicar as Cadeias de Markov no Ensino Médio. Primeiramente, iremos revisar alguns tópicos importantes para o leitor relembrar da Teoria das Probabilidades. Depois, iremos apresentar as Cadeias de Markov. E, por último, mostraremos algumas sugestões de atividades para serem usadas em sala de aula. Não iremos entrar em detalhes sobre demonstrações de teoremas. Caso o leitor queira se aprofundar no assunto, aconselhamos a leitura do trabalho de dissertação de mestrado de Castro (2015).

2 I REVISÃO DE TÓPICOS

Neste capítulo, iremos abordar alguns tópicos importantes para apresentarmos as Cadeias de Markov. Como uma proposta de sequência didática, fica a cargo do professor se esses tópicos serão abordados ou não. Mas, para o professor, é de extrema importância ter conhecimento dos mesmos.

2.1 Variáveis Aleatórias

Imagine um dado sendo lançado duas vezes. Os possíveis resultados são:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Figura 1 - Resultados possíveis no duplo lançamento de um dado

Fonte: Autor, 2018

Agora, vamos chamar de X o número de vezes em que o número 2 aparece na dupla (x,y). É fácil ver que $X \in \{0,12\}$. Então, podemos criar uma função onde associa a cada elemento do espaço amostral um número que pertence ao conjunto $\{0,1,2\}$

Chamamos de variável aleatória uma função que associa um número real $x(\zeta)$ a cada resultado ζ do espaço amostral.

2.2 Processo Não-Determinístico

É um processo com origem em eventos aleatórios, pois há uma probabilidade, uma chance de ocorrência. Diferente do processo determinístico, pois neles há uma certeza de que ocorrerá. Por exemplo, jogar na loteria é um processo não-determinístico, pois quanto mais eu jogo, eu tenho a maior chance de ganhar, mas isso não garante que irei ganhar.

2.3 Processo Estocástico

É um processo não-determinístico onde a variável de interesse varia através do tempo. Formalmente, podemos definir assim: Seja , um conjunto que indexará uma família de variáveis aleatórias X_t. A sequência $\{X_t\}_{t \in \eta}$ é chamada de processo estocástico.

Se η for um intervalo de $\mathbb{R}_+$, esse processo é chamado de contínuo. Caso $\eta \subset \mathbb{N}$, ele será chamado de discreto. Denominamos de estados os valores assumidos por um processo estocástico e o conjunto de todos os estados possíveis é dito espaço de estados.

3 I CADEIAS DE MARKOV

As Cadeias de Markov têm uma característica interessante pois o futuro da evolução do processo depende apenas do momento em que ele está e não do que aconteceu anteriormente. Essa condição das Cadeias de Markov nos diz que basta analisarmos o estado presente para podermos analisar os acontecimentos futuros, não precisando conhecer os estados anteriores. Essa propriedade é o que chamamos de propriedade markoviana.

Segundo ZITKOVIC (2010), podemos definir as Cadeias de Markov como um processo estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ que a partir de um espaço amostral contável S, temos que $P[X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n]$ para todo $\in\mathbb{N}$, todos $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$. Suponha que uma partícula escolhe saltar para um vértice vizinho do retângulo abaixo. Temos que as variáveis aleatórias X_t estarão no conjunto $S = \{1,2,3,4\}$. Seja X_t a posição da partícula no tempo t, a probabilidade de uma partícula estar no vértice j, em um passo, estando no vértice i, com i, j ϵ s, é definida por

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, se\ i\ e\ j\ estão\ conectados, \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

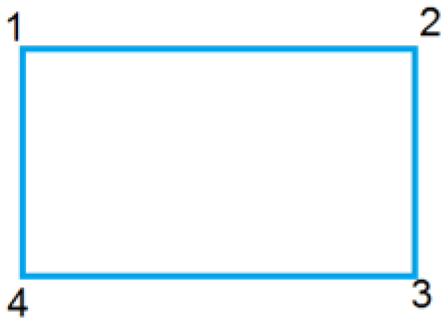


Figura 2 - Retângulo

Fonte: Autor, 2018

Observe que as probabilidades para sair de um vértice ao outro (chamadas de probabilidades de transição) não dependem de n (por exemplo, sair do vértice 1 para o 2 é igual a 1/2). Chamamos esse fato de probabilidades de transição estacionárias ou homogêneas. Assim, garantimos que as probabilidades de transição não mudarão ao longo do tempo. Este é um caso de uma Cadeia de Markov homogênea.

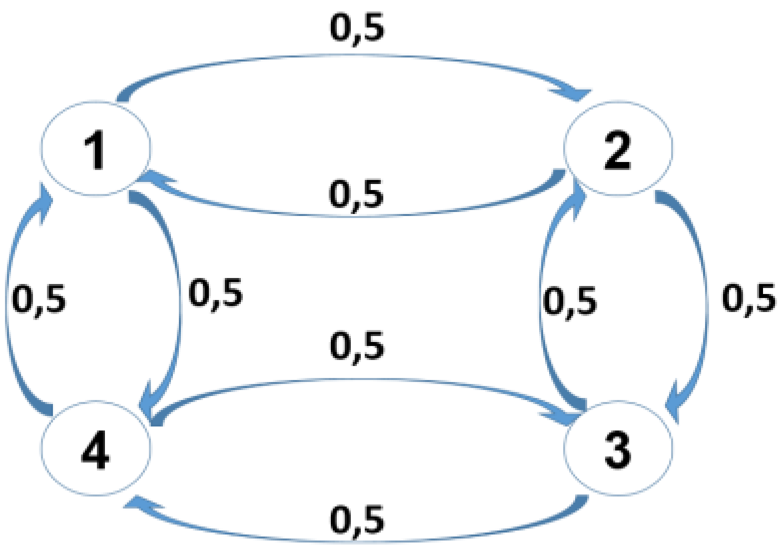
As probabilidades de transição são escritas como p_{ij}, ou seja, $p_{ij} = P(X_1 = j|X_0 = i)$ é a probabilidade de estarmos em t = 1 no estado j, dado que em t = 0 estamos no estado i . E como elas são homogêneas, temos que .

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_{m+1} = j|X_m = i), \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Essas probabilidades podem ser postas numa matriz que chamamos de matriz de transição. No nosso exemplo, a matriz de transição será

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma outra forma de representar as probabilidades de transição é usando o diagrama de transição. Eles lembram bastante as arvores de possibilidades que são usadas no ensino de probabilidade no Ensino Médio. Os Diagramas de Transição são uma representação do processo onde cada vértice representa um estado e cada arco é valorado pelas probabilidades de transição. No nosso exemplo, teríamos:



Fugura 3 - Diagrama de Transição

Fonte: Autor, 2018

Apresentando os pontos acima, podemos fazer a seguinte pergunta: Qual a probabilidade da partícula estar no vértice 1 e, após dois movimentos, estar no vértice 3?

A resposta para essa pergunta pode ser obtida usando o que sabemos do Ensino Médio. Partindo do vértice 1 e, em dois movimentos, estar no vértice 3, a partícula pode fazer os percursos: 1-2-3 ou 1-4-3. A probabilidade da partícula fazer o percurso 1-2-3 é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ Como o mesmo raciocínio é para o caso 1-4-3, a resposta será $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. A nomenclatura que usamos para representar essa situação é $p_{13}^{(2)}$, ou seja, a probabilidade de sair do vértice 1 ao 3 em 2 iterações.

Mas, imagine fazermos isso para um número muito grande iterações? Temos alguns teoremas que podem facilitar esses cálculos. Um ponto importante a ser observado é que se calcularmos a matriz P^2 , obtemos a resposta do exemplo acima. Veja na matriz abaixo, que o elemento que está na primeira linha e na terceira coluna é o número ½, nossa resposta.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, se quisermos descobrir a probabilidade da partícula, partindo do vértice 3 estar no vértice 1 em duas iterações, basta procurar pelo elemento que está na terceira linha e na primeira coluna da matriz P^2 .

Um outro questionamento que podemos fazer sobre o exemplo que estamos utilizando é o seguinte: Se aumentarmos consideravelmente a quantidade de movimentos, quais probabilidades teríamos da partícula estar em cada vértice? Para obtermos essa resposta precisamos definir o que é um vetor de probabilidade.

Definimos um vetor de probabilidade numa Cadeia de Markov com n passos, $X^{(n)}$, um vetor linha cuja j-ésima componente $Xj^{(n)}$ é igual à probabilidade do sistema estar no j-ésimo estado na n-ésima observação. Isto é, $x^{(n)} = (x_0{}^{(n)} x_1{}^{(n)}, \dots)$. Para o vetor de probabilidade, temos duas fórmulas que facilitam os cálculos. São elas:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}.P \qquad (1)$$

$$x^{(n)} = x^{(0)}.P^n \qquad (2)$$

No nosso exemplo, o vetor inicial é $X^{(0)} = (1000)$, porque temos a probabilidade de 100% dele estar no vértice 1 e de 0% de estar nos outros vértices. Então, utilizando (2), no segundo movimento da partícula, temos que

$$x^{(2)} = (1\ 0\ 0\ 0).\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0)$$

Então, concluímos que no segundo movimento da partícula, a probabilidade dela estar no primeiro vértice ou no terceiro vértice é de 50% e de 0% de estar no segundo ou no quarto vértice.

Agora, respondendo o último questionamento, calculando as potências da matriz de transição *P*, vemos que ela não se altera. Ou seja, se imaginarmos a partícula no 50º movimento, a matriz P^{50} é a mesma que a P^2

Para cálculos com matrizes, sugerimos ao leitor o uso do site Matrix Calculator, cujo endereço é https://matrixcalc.org/pt/. Nele é possível fazer vários cálculos com matrizes, inclusive potências.

Figura 4 - Site Matrix Calculator

Fonte: Autor, 2018

4 I SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A SALA DE AULA

Propomos ao leitor que queira aplicar este conteúdo em sala de aula uma sequência com 3 momentos para que o conteúdo possa ser apresentado e trabalhado com problemas instigadores, estimulando o raciocínio e a aplicação dos conteúdos de Matemática já citados. Em cada momento, apresentamos um problema que pode ser trabalhado em sala de aula.

4.1 Momento 1

O objetivo desse primeiro momento é que o professor introduza a definição das Cadeias de Markov mostrando, principalmente, sua propriedade. Além disso, apresente as matrizes de transição e o diagrama de transição.

O problema proposto para esse momento é:

Todo ano, uma empresa de plano de saúde faz um estudo observando se um cliente está: bem, doente ou morto, para saber quanto a empresa deverá gastar com cada cliente. Considerando que esse processo apresenta as características de uma Cadeia de Markov, a transição de um estado ao outro respeita a matriz de transição abaixo.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \textit{bem} & \textit{doente} & \textit{morto} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{bem} \\ \textit{doente} \\ \textit{morto} \end{array} & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 5- Matriz de transição

Fonte: Autor, 2018

a) Monte um diagrama de transição dessa situação.

b) Se um cliente, hoje, está bem, qual a probabilidade dele estar doente quando a análise for feita daqui a dois anos?

Respostas:

a)

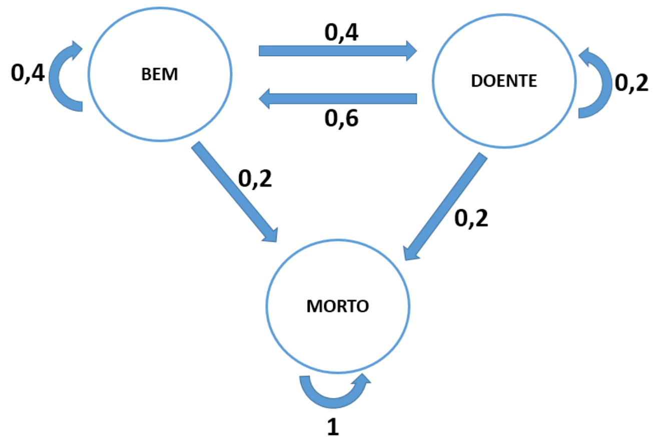


Figura 6- Resposta do item a)

Fonte: Autor, 2018

b) 24%

4.2 Momento 2

No segundo momento da sequência didática, o professor pode apresentar as duas fórmulas que facilitarão os cálculos para grandes iterações:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}.P \text{ e } x^{(n)} = x^{(0)}.P^{n}.$$

O problema proposto para esse momento é:

Suponha que a chance de chover ou fazer sol amanhã dependa somente das condições climáticas do dia de hoje e não dos outros dias passados. Em Maceió, foi observado que após um dia de sol, a probabilidade de no próximo dia também haver sol ´e de 80% e de 20% de chover. Mas, após um dia chuvoso, a probabilidade de o outro dia ser sol ´e de 50%. Com base nessas informações, responda:

a) Determine a matriz de transição relacionada ao modelo.

b) Por que não é possível fazer a multiplicação das matrizes:

(MATRIZ DE TRANSIÇÃO)·(VETOR DE PROBABILIDADE)

e sim:

(VETOR DE PROBABILIDADE)·(MATRIZ DE TRANSIÇÃO)?

c) Se o estado inicial da averiguação for um dia com sol, verifique a previsão dos próximos dois dias.

d) Agora, se o estado inicial for o vetor (0,2 0,8) verifique a previsão dos próximos três dias.

RESPOSTAS:

a) $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

b) A multiplicação, na pergunta, não é possível, pois a matriz de transição é da forma 2 × 2 e o vetor de probabilidade é da forma 1 × 2, impossibilitando a multiplicação.

c) $x^{(1)} = (0,8 \quad 0,2)$ e $x^{(2)} = (0,74 \quad 0,26)$

d) $x^{(1)} = (0,56 \quad 0,44)$, $x^{(2)} = (0,668 \quad 0,332)$ e $x^{(3)} = (0,7 \quad 0,3)$

4.3 Momento 3

Nesse momento, com a apresentação das duas fórmulas, é possível levantar uma discussão sobre os cálculos que são necessários para chegar a potências de matrizes e como, hoje em dia, a ciência lida com esse tipo de problema. É óbvio que o uso da tecnologia será falado. Cada vez mais temos computadores potentes e, no nosso dia a dia, celulares e computadores já fazem cálculos que antigamente era algo inimaginável.

O uso da tecnologia na educação também é algo bastante estudado por pesquisadores. Gonçalves (2004) fala a respeito do assunto.

> Na dimensão educacional, a tecnologia não consiste apenas em mais um recurso para os professores motivarem as suas aulas, mas também um recurso que também propicia a inclusão social e leva o aluno a cidadania. Os professores que trabalham em sala de aula devem refletir sobre o cenário tecnológico atual, sugerindo e pesquisando novas maneiras do uso do computador para as aulas de Matemática, propiciando ao aluno a adequação ao mercado de trabalho da atualidade. (GONÇALVES, 2004, p. 2)

Além do site já citado, Matrix Calculator, também sugerimos o programa WINMAT (http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wmpr32z.exe) e o Geogebra (www.geogebra.org/) para serem usados na aplicação dessa sequência didática.

Concordamos com BIASI (2012), que acredita que o uso dessas ferramentas ajudam no ensino-aprendizagem dos alunos. Segundo ele,

> Essa complementação é relevante, pois por muitas vezes os conceitos que não são satisfatoriamente entendidos, podem ser retomados ou reforçados em um laboratório com o auxílio de uma ferramenta especializada, que além de exemplificar conceitos da teoria, pode proporcionar ao aluno que ele pratique o que foi trabalhado em sala. (2012, p. 37)

Castro (2015) desenvolveu dois objetos de aprendizagens no Geogebra para ser aplicado nesses problemas propostos da Cadeias de Markov. Por exemplo, num caso de uma matriz de transição 2x2, o usuário pode digitar a matriz de transição e o vetor inicial. Com o botão deslizante *k*, pode-se escolher a potência desejada para a matriz, entregando, assim, a matriz M^K e o vetor $X^{(K)}$ Para fazer o download dos dois objetos de aprendizagem: matriz 2x2 e matriz 3x3, basta acessar o link https://goo.gl/3Twhvu.

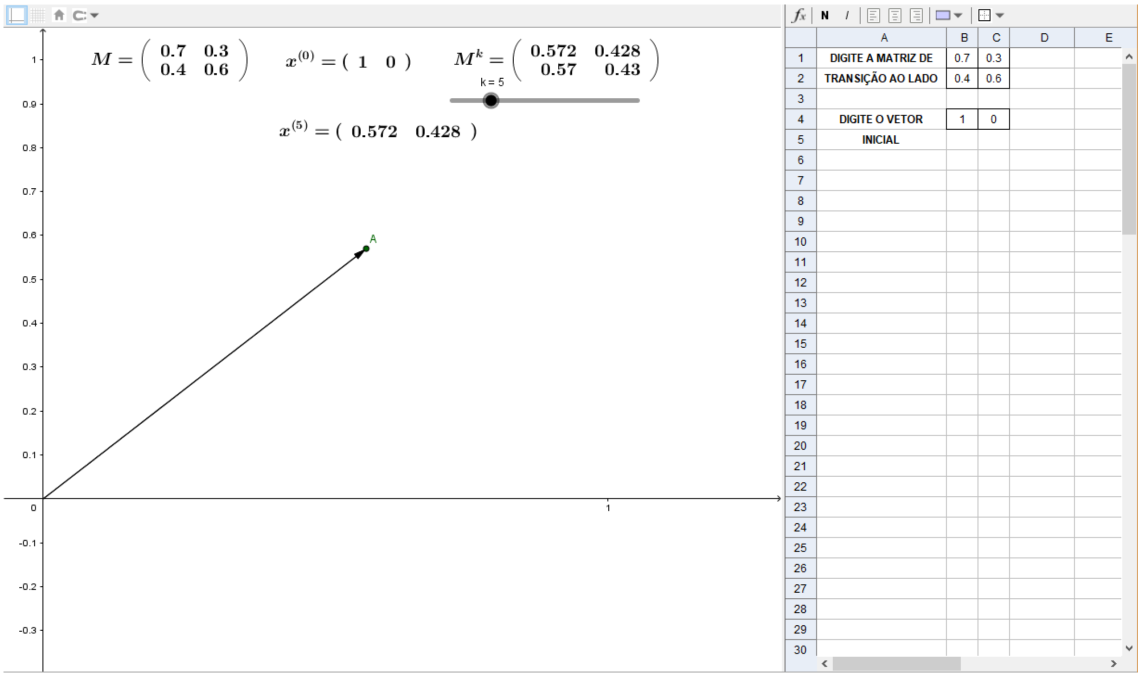


Figura 7 - objeto de aprendizagem no Geogebra

Fonte: Autor, 2018

O problema proposto para esse momento é:

Observe o diagrama de transição abaixo:

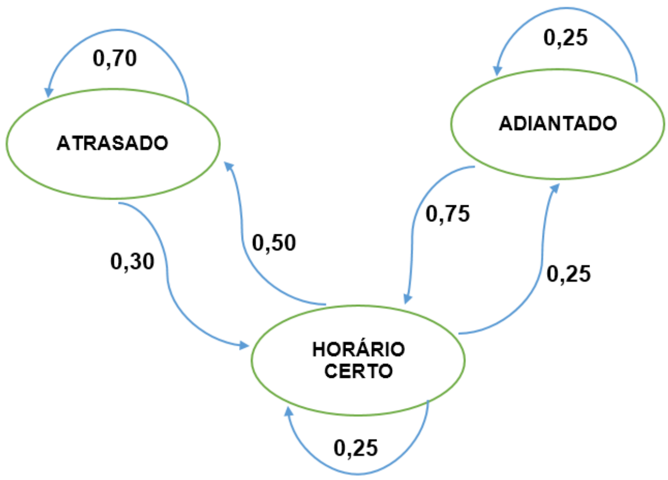


Figura 8 - Diagrama de transição do problema

Fonte: Autor, 2018

Ele representa a situação de uma linha de ônibus com seu horário de chegada em um determinado ponto para tentar prever se o ônibus irá chegar atrasado, adiantado ou no horário correto.

a) Determine a matriz de transição P desta situação com a primeira linha para *ATRASADOS*, segunda linha *ADIANTADO* e terceira linha, *HORARIO CERTO*.

b) Se o vetor de probabilidade inicial é $x^{(0)} = (0{,}50 \quad 0{,}14 \quad 0{,}36)$ determine qual a probabilidade do ônibus chegar no horário certo no terceiro dia.
c) Utilize o vetor de probabilidade da letra b e calcule os vetores

$x^{(4)}; x^{(5)}; x^{(6)}; x^{(7)}; x^{(8)}; x^{(9)}; x^{(10)}$. O que você percebe?

RESPOSTAS:

a) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

b) (0,54995 0,11412 0,33593)

c) $x^{(4)} = (0{,}55293 \quad 0{,}11251 \quad 0{,}33456)$, $x^{(5)} = (0{,}55433 \quad 0{,}11177 \quad 0{,}33390)$,

$x^{(6)} = (0{,}55498 \quad 0{,}11142 \quad 0{,}33360)$, $x^{(7)} = (0{,}55529 \quad 0{,}11125 \quad 0{,}33346)$,

$x^{(8)} = (0{,}55543 \quad 0{,}11118 \quad 0{,}33339)$, $x^{(9)} = (0{,}55550 \quad 0{,}11114 \quad 0{,}33336)$

$x^{(10)} = (0{,}55553 \quad 0{,}11113 \quad 0{,}33335)$

5 I CONCLUSÃO

Acreditamos que mostrar aos alunos aplicações de conteúdos que eles estão estudando (no caso das Cadeias de Markov, ela é uma clara aplicação das matrizes e da probabilidade) é uma forma de estimulá-los a estudar Matemática e perceber que há muito mais coisas sendo estudadas usando o que eles estão aprendendo. Segundo os PCNs (2000, p.15) “há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama”.

O ensino voltado a somente procedimentos mecânicos e falta de significado atrapalha bastante a compreensão dos alunos e até uma ligação afetiva do mesmo com a disciplina. Aquilo que o aluno leva da sala de aula deve capacitá-lo a lidar com o meio em que vive, aplicar conhecimentos matemáticos em seu cotidiano e permitindo-o, também, o seu crescimento intelectual. Cabe a nós, professores, buscarmos ferramentas para essa mudança. Seremos nós que daremos esse salto para um ensino melhor da disciplina.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Rio de Janeiro: DPA,2000.

BRITTO, M. A. F. O. **Matrizes**: Propostas de Aplicação no Ensino Médio. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.

CASTRO, D. M. S. CADEIAS DE MARKOV: Uma Aplicação para o Ensino de Matrizes e Probabilidades. Maceió: UFAL, 2015.

GONÇALVES, J. P. R**eflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no software educativo FORMEL.** Revista Brasileira de Informática na Educação ,v.12, n. 2, 2004.

KRAIESKI, P. **Abordagem de matrizes no ensino médio:** Uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.

SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

ZITKOVIC, G. I**ntroduction to Stochastic Processes** - Lecture Notes. Disponível em: <https://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction to stochastic processes.pdf>. Acesso em: 19 julho 2018.

BIASI, H.; DOMENECH, M. F**erramenta de Software para o auxílio ao processo de Ensino-Aprendizagem de Métodos Estocásticos.** Unoesc Ciência ACET, Joaçaba, v. 3, n. 1, p. 37-46, jan./jun. 2012.