Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5706-440-5
DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***”, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAIRE

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 12/08/2020

Michele Martins Lopes
Universidade Estadual de Campinas
Campinas – SP
http://lattes.cnpq.br/7572795941731427

Angela Leite Moreno
Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Alfenas – MG
http://lattes.cnpq.br/5106302431642025

RESUMO: Este capítulo se dedica a apresentar os resultados obtidos em um projeto de Iniciação Científica de Análise Funcional. Neste projeto pôde-se realizar uma aplicação. Primeiramente, foram definidos: Espaço de Banach, Espaço Dual, Conjunto Nunca Denso, Conjunto de 1ª Categoria e Conjunto de 2ª Categoria. Com isso, foi possível enunciar e demonstrar o Teorema de Baire juntamente com seus corolários, que serviram como base para os dois Teoremas de Banach-Steinhauss, sendo o segundo a recíproca do primeiro, com o acréscimo da hipótese de X ser um espaço de Banach. Estes dois teoremas, por sua vez, são fundamentais para a demonstração do Princípio da Limitação Uniforme aqui apresentada. A partir disso, foi realizada uma aplicação que consta da seguinte informação: em um Espaço de Banach X, donde se tem que uma função f pertence ao seu Espaço Dual (X^*), se a imagem direta de um conjunto, dada por f (B), for um conjunto limitado, então também será limitado.
PALAVRAS-CHAVE: Análise Matemática, Espaços de Banach, Princípio da Limitação Uniforme, Teorema de Banach-Steinhauss.

APPLICATION OF THE BAIRE THEOREM

ABSTRACT: This chapter is dedicated to presenting the results obtained in a Functional Analysis Scientific Initiation project. In this project it was possible to make an application. First, the following were defined: Banach Space, Dual Space, Never Dense Set, 1st Category Set and 2nd Category Set. With that, it was possible to enunciate and demonstrate Baire's Theorem together with its corollaries, which served as the basis for the two Banach-Steinhauss Theorems, the second being the reciprocal of the first, with the addition of the hypothesis that X is a Banach space. These two theorems, in turn, are fundamental to the demonstration of the Uniform Limitation Principle presented here. From this, an application was made that consists of the following information: in a Banach X Space, where a function f belongs to its Dual Space (X^*), if the direct image of a set, given by f (B), is a limited set, then will also be limited.
KEYWORDS: Mathematical Analysis, Banach Spaces, Uniform Limitation Principle, Banach-Steinhauss Theorem.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta alguns resultados importantes de Análise Funcional, com foco nas aplicações do Teorema de Baire.

Para a sua realização foram utilizadas as seguintes referências: Huston e Pym (1980), Kreyszig (1978) e Munkres (2000). Primeiramente seguem algumas definições e resultados necessários, incluindo o Teorema de Baire, para que possamos utilizá-lo para demonstrar o Princípio da Limitação Uniforme, e encerramos com uma aplicação.

2 | PRELIMINARES

Para começarmos as discussões, a primeira indagação é sobre o que é um Espaço de Banach? Um Espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo em relação a métrica induzida pela norma. Uma das propriedades mais interessantes de espaços vetoriais normados é que qualquer um destes pode ser imerso em um espaço de Banach.

Outro conceito importante é o de Espaço Dual, denotado por $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, sendo este constituído de funções $f: X \to \mathbb{K}$ contínuas e lineares, em que X é um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$. Ressaltamos que o espaço $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ é um Espaço de Banach geralmente denotado por X^*.

Além destes conceitos, também precisamos compreender quando um conjunto é Nunca Denso, conceito essencial para definir conjuntos de 1ª e 2ª categoria.

Definição (Conjunto Nunca Denso): Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Um subconjunto *A* de *X* é dito nunca denso quando $int(\overline{A}) = \emptyset$

Observação: Notemos que ao mudarmos o espaço em que está, *ele* pode permanecer ou não nunca denso.

Observação: Se *A* for nunca denso, então $\bar{A}$ também será.

De fato, se *A* for nunca denso, temos que $int(\bar{A}) = \emptyset$.

Se *A* for fechado, então $A = \bar{A}$. Dessa forma,

$$int(\bar{A}) = int(\bar{A}) = \emptyset.$$

■

Logo, $\bar{A}$ é nunca denso.

Observação: Se *A* for nunca denso e *B* $\subset$ *A* então *B* também será nunca denso.

De fato, se *A* é nunca denso, ou seja, que $int(\bar{A}) = \emptyset$ e que *B* $\subset$ *A,* então

$$int(\bar{B}) \subset int(\bar{B}) = \emptyset.$$

Assim, $int(\bar{B}) = \emptyset$. Logo, *B* é nunca denso.

Outra caracterização de conjuntos nunca densos pode ser dada através do seguinte resultado:

Teorema 1: Suponhamos que (X, p) seja um espaço métrico compacto e que seja um subconjunto de X. Então A será nunca denso em X se, e somente se, $\overline{X - \bar{A}} = X$.

Demonstração: Suponhamos que (X, p) seja um espaço métrico e que $A \subset X$.

Afirmação: $X - \overline{X - \bar{A}} = int(\bar{A})$

Assim, considerando $B = \bar{A}$, provaremos que se $B \subset X$, então

$$X - \overline{X - B} = int(B).$$

De fato,

($\subset$) Podemos observar que $X - B \subset \overline{X - B}$. Assim, temos que

$$X - \overline{X - B} \subset X - (X - B) = B,$$

ou seja,

$$X - \overline{X - B} \subset B.$$

Como $\overline{X - B}$ é fechado, então $X - \overline{X - B}$ é aberto. Portanto,

$$X - \overline{X - B} \subset int(B).$$

($\supset$) Notemos que $X - B \subset X - int(B)$.

Como $X - int(B)$ é fechado, então

$$\overline{X - B} \subset X - int(B),$$

assim,

$$X - (X - int(B)) \subset X - (\overline{X - B}),$$

ou melhor,

$$int(B) \subset X - (\overline{X - B}).$$

Concluímos então que

$$X - (\overline{X - B}) = int(B),$$

ou, ainda, que

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = int(\bar{A}). \tag{1}$$

Agora podemos facilmente demonstrar o que queremos.

($\Rightarrow$) Como A é nunca denso em X, então $int(\bar{A}) = \emptyset$.

Mas, pela Equação (1) temos

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = \emptyset.$$

Portanto,

$$X = \left(\overline{X - \bar{A}}\right).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right)$. Logo,

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = \emptyset.$$

Mas, pela Equação (1) temos

$$int(\bar{A}) = \emptyset.$$

Concluímos, então, que *A* é nunca denso em *X*.

Agora podemos apresentar as devidas definições de Conjunto de 1ª e de 2ª categoria para que seja possível demonstrar o teorema central de nosso trabalho: o Teorema de Baire.

Definição (Conjunto de 1ª Categoria): Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico e que *A* seja um subconjunto de *X*. Diremos que *A* é de 1ª Categoria em (*X,p*) quando *A* for uma união enumerável de conjuntos nunca densos.

Definição (Conjunto de 2ª Categoria): Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico e que seja um subconjunto de *X*. Diremos que *A* é de *2ª* Categoria quando não for de 1ª categoria.

Algumas das consequências imediatas dessa definição são:

- Se *A* for de *1ª* Categoria em (*X,p*) e $B \subset A$,, então *B* será de 1ª Categoria em (*X,p*).
- Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos de 1ª Categoria em (*X,p*), então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ será de 1ª Categoria em (*X,p*).

3 I O TEOREMA DE BAIRE E SUAS IMPLICAÇÕES

Teorema (Teorema de Baire) Suponhamos que (*X, ρ*) seja um espaço métrico completo. Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos abertos e densos de (*X, ρ*) então

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = X.$$

Demonstração: Suponhamos que (*X, ρ*) seja um espaço métrico completo, e $\{A_n\}$ uma família de conjuntos abertos e densos de (X, ρ).

Seja $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{r} > 0.$. Devemos mostrar que

$$B(x,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset.$$

Afirmação 1: Existe uma sequência em $\{r_n\}$ em $[0,\infty)$, com

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

e uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que

$$B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset A_n \cap B(x_n, r_n)$$

para $\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots$.

De fato, seja $x_1 = x$ e $r_1 = r$. e . Logo $A_1 \cap B(x_1, r_1)$ é aberto e não vazio, assim existe $B[x_2, r_2]$ tal que $B[x_2, r_2] \subset A_1 \cap B(x_1, r_1)$. Assim, $A_2 \cap B(x_2, r_2)$ é aberto e não vazio, assim existe $B[x_3, r_3]$ tal que $B[x_3, r_3] \subset A_2 \cap B(x_2, r_2)$. E, assim por diante.

Afirmação 2: $\{x_n\}$ é de Cauchy em (X, ρ).
De fato, se tomarmos $j, k \geq n$ temos que

$$\rho(x_j, x_k) < 2r_n,$$

que, quando fazemos $n \to \infty$ nos leva a

$$\rho(x_j, x_k) \to 0,$$

como (X, ρ) é completo segue que

$$\rho(x_n, \mathrm{y}) \to 0,$$

para algum $\mathrm{y} \in \mathrm{X}$.

Afirmação 3: $\mathrm{y} \in B(\mathrm{x}, \mathrm{r}) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \emptyset$.
Por construção, temos que

$$\mathrm{y} \in B(x_1, r_1) = B(\mathrm{x}, \mathrm{r}).$$

Notemos também que

$$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset A_n \cap B(x_n, r_n)$$

e, como y está em todas as bolas, o resultado segue.

Corolário 1: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que *A* seja um subconjunto de *X*. Se *A* for de 1ª categoria em *X*, então

$$\overline{X - A} = X$$

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo, que *A* seja um subconjunto de *X* e que seja de 1ª categoria em *X*. Logo,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

Em que F_n é nunca denso, para $\mathrm{n} = 1,2, \dots$ Daí,

$$X - A = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n).$$

Afirmação: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n). = X.$

Notemos que $X - \overline{F_n}$ é aberto e $\overline{X - \overline{F_n}} = X,$, para $\mathrm{n} = 1, 2,3, \dots.$, então, pelo Teorema 1, segue que

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n})} = X \qquad (2)$$

mas $F_n \subset \overline{F_n}$ e, portanto,

$$X - \overline{F_n} \subset X - F_n$$

Daí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n)$$

assim, pela Equação (2) temos que

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) \subset X$$

Assim,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) = X.$$

e, portanto

$$\overline{X - A} = X.$$

Segue diretamente do Teorema de Baire que todo espaço métrico completo é de 2ª categoria em x.

Corolário 2: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo. Então *X*, será de 2ª categoria em *X*.

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que X não seja de 2ª categoria em . Então X é de 1ª categoria em , e, pelo Corolário 1, temos que $\overline{X - X} = X$, ou seja, que $\overline{\emptyset} = X$, isto é, que $X = \emptyset$.

Absurdo!.

Corolário 3: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que *A* seja um subconjunto fechado de *X*. Se *A* for de 1ª categoria em *X* então será nunca denso.

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo, que seja um subconjunto fechado de e que *A* seja um conjunto de 1ª categoria em .

Pela demonstração do Teorema de Baire podemos dizer que

$$\overline{X - A} = X.$$

Como *A* é fechado, então $\overline{X - \bar{A}} = X$ e, pelo Teorema 1, segue que A é nunca denso.

4 | APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BAIRE

Nesta seção apresentamos o Teorema de Banach-Seinhauss (#1), sendo necessária uma hipótese adicional para provar sua recíproca, enunciada como Teorema de Banach-Seinhauss (#2). Também apresentamos o Princípio da Limitação Uniforme utilizando esses primeiros resultados e finalizamos com um exemplo de aplicação desse princípio, no qual se tivermos um espaço de Banach e uma função em seu espaço dual, se a imagem direta de um conjunto for limitada teremos que este conjunto também será limitado.

Iniciaremos com o Teorema de Banach-Steinhauss (#1) que garante que, sob determinadas hipóteses, se o conjunto de pontos onde uma função é finita for de 2ª categoria, essa função será finita.

Teorema de Banach-Steinhauss (# 1): Suponhamos que $(X, \|.\|)$ e $(Y, \|.\|)$ sejam espaços vetoriais normados e que , com $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se

$$\{x \in X : sup\,\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\,\}$$

for de 2ª Categoria então

$$sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que:

$$\{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}.$$

Afirmação: $\{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}$ é fechado.

Seja $A_n = \{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}$. . Tomando tal que $x_m \in A_n$ quando $\|x_m - x\| \to 0$, quando $m \to \infty$, vamos analisar se $x \in A_n$.

Podemos afirmar que

$$\|T_\alpha(x_m)\| \leq n,$$

para *m=1,2,...*, pois $x_m \in A_n$, daí,

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(x)\| &= \|T_\alpha(x) - T_\alpha(x_m) + T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha(x - x_m)\| + \|T_\alpha(x_m)\|\end{aligned}$$

e, pelo fato de *T* ser contínua

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(x)\| &\leq \|T_\alpha\|\|x - x_m\| + \|T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha\|\|x - x_m\| + n,\end{aligned}$$

que, ao passarmos o limite quando $m \to \infty$, nos leva a

$$\|T_\alpha(x)\| \leq n,$$

para todo $\alpha \in \Omega$. Assim, $sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n$, ou seja, $x \in A_n$.

Portanto, A_n é fechado.

Além disso, por hipótese temos que

$$\{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

é de 2ª Categoria, assim

$$\operatorname{int}(A_m) = int\{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < m\} \neq \emptyset,$$

para algum m.

Tomemos $\overline{B_r(x_0)} \subset A_m$ e seja $x \in X$, com $\|x\| \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(x)\| &= \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx)\| \\ &= \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx+x_0) - T_\alpha(x_0)\| \\ &\le \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx+x_0)\| + \frac{1}{r}\|T_\alpha(x_0)\| \\ &\le \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \\ &\le \frac{2}{r}m,\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega$.

Agora, para garantir a validade de sua recíproca, precisaremos que *X* seja um espaço de Banach:

Teorema de Banach-Steinhauss (# 2): Suponhamos que *X* seja um espaço de Banach, que $(Y, \|.\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se $\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$, então

$$\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$$

será de 2ª Categoria.

Demonstração: Tomando $x \in X$, como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, podemos afirmar que:

$$\|T_\alpha(x)\| \le \|T_\alpha\|\|x\| \le M\|x\|,$$

com $\alpha \in \Omega$.

Em particular,

$$sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \le M\|x\|,$$

com $x \in X$.

Logo,

$$\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \} = X.$$

X é um espaço completo e, portanto, é de 2ª categoria.

Portanto, $\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$ é de 2ª categoria.

O Princípio da Limitação Uniforme, dado a seguir, utiliza as mesmas hipóteses do Teorema acima e garante que se o supremo de uma função, aplicada em um ponto do domínio, é finita, então a função é finita. Para a demonstração desse princípio os dois Teoremas de Banach-Steinhauss são utilizados. E mais, esse princípio é a base para a nossa aplicação, realizada logo após.

Princípio da Limitação Uniforme: Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $(Y, \|.\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$, com $\alpha \in \Omega$.

Se $sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$ então $sup\,\{\|T_\alpha\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$.

Demonstração: Se mostrarmos que

$$\{sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\,\}$$

é de 2ª categoria, pelo Teorema de Banach-Steinhauss (# 1) provamos o que queremos. Como $sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$, com $x \in X$, com, podemos dizer que

$$X = \{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\}.$$

X é completo e, assim, de 2ª categoria.

Portanto, $\{sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\,\}$ é de 2ª categoria.

Como consequência temos que a seguinte aplicação:

Aplicação: Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $f \in X^*$ e $B \subset X$. Se $f(B)$. Se $f(B)$ for limitado então será limitado.

Demonstração: Para cada $b \in B$ temos que

$$\begin{aligned} T_b:\ X^* &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(b) \end{aligned}$$

Assim temos, para cada $T_b \in$L $(X^*, \mathbb{K})$ que $\|T_b\| = \|b\|$. Além disso, para cada $f \in X^*$, temos que $\|T_b(f)\| = \|f(b)\|$. Assim,

$$sup\,\{\|T_b(f)\|: b \in B\} = \ sup\,\{\|f(b)\|: b \in B\} < \infty.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme segue que $sup\,\{\|T_b\|: b \in B\} < \infty$ daí

$$sup\,\{\|\mathrm{b}\|: b \in B\} < \infty,$$

donde vemos que B é limitado.

REFERÊNCIAS

HUSTON, V. PYM, J.S. **Aplications of Functional Analysis and Operator Theory**. Academic Press, 1980.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MUNKRES, J.R. **Topology**, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

Observação: Parte deste trabalho foi publicado em: LOPES, M.M; MORENO, A.L. Aplicações do Teorema de Baire. SIGMAE, v.6, 2, p. 36-45, 2017.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

I

L

R

S

T

V

W

Y

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020