Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena
Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Maria Alice Pinheiro
Correção:	Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizador:	Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5706-440-5
DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***”, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4

UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM L^p

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 12/08/2020

Michele Martins Lopes
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas
Campinas – SP
http://lattes.cnpq.br/7572795941731427

Angela Leite Moreno
Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática
Alfenas – MG
http://lattes.cnpq.br/5106302431642025

RESUMO: Neste trabalho são apresentados alguns resultados sobre Teoria da Medida e Integração de Lebesgue. As funções Lebesgue integráveis são funções que se encontram em um espaço chamado Espaço L^p, com $p \in [1,\infty)$. Primeiramente definimos tal espaço e, dentre resultados importantes sobre o mesmo, mostramos que ele é um espaço vetorial. Então, após definir uma norma nesse espaço, mostramos que ele é um espaço vetorial normado. Para isso, utilizamos três importantes desigualdades: Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Minkowsky. Daí, definimos uma distância com essa norma e mostramos que o Espaço L^p com essa distância é um espaço métrico completo. Uma função Lebesgue integrável deve ser uma função simples, ou então deve existir uma função simples que tenha propriedades semelhantes às da função que se deseja integrar. Logo, é apresentado um teorema que garante a existência de uma função simples que possui propriedades semelhantes à de uma função presente no Espaço L^p. Com isso, temos a aplicação que diz que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso no espaço L^p.
PALAVRAS-CHAVE: Integral de Lebesgue, Função Simples, Conjunto Denso, Espaços L^p.

A RESULT ON L^p MEASURABLE FUNCTIONS LIMITED

ABSTRACT: In this work, some results are presented on Lebesgue's Theory of Measurement and Integration. The integrable Lebesgue functions found in a space called Espaço Lp, with $p \in [1,\infty)$. First, we define such a space, and, among relevant results about it, we show that it is a vector space. So, after defining a norm in this space, we show that it is a normed vector space. For this, we use three Crucial inequalities: Young's Inequality, Hölder's Inequality, and Minkowsky's Inequality. Hence, we define a distance with this standard and show that the L^p Space at that distance is a complete metric space. An integrable Lebesgue function must be a simple function, or there must be a simple function that has properties similar to the function that want to integrate. Therefore, a theorem presented that guarantees the existence of a simple function that has properties similar to that of a function present in the L^p Space. With that, we have the application that says that the set of limited measurable functions is dense in the L^p space.
KEYWORDS: Lebesgue Integral, Simple Function, Dense Set, Spaces L^p.

1 I INTRODUÇÃO

Neste trabalho, primeiramente apresentamos as definições de espaços L^1 e L^p, mostrando que estamos trabalhando em um espaço vetorial. Em seguida vemos três importantes desigualdades que são necessárias para demonstrar um teorema que mostra que L^p é espaço vetorial normado, com uma norma específica, que é finita. Definimos, com isso, uma métrica d_p, que em L^p determinam um espaço métrico completo. Por fim, esse teorema é usado para demonstrar um resultado fundamental para esse estudo. Com ele, realizamos uma aplicação: o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em L^p.

2 I PRELIMINARES

Definição 1: Seja $p \in [1,\infty)$. Definamos $\mathcal{L}^p\,(X,\mu)$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}^p\,(X,\mu) = \left\{ f \text{ mensurável: } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Agora, suponhamos que $(X,\mathcal{A},\mu)$ seja um espaço de medida. Seja $L^p\,(X,\mu)$, e considere a seguinte relação:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \text{ quase sempre}$$

Assim, $f \sim g$ se existir $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A) = 0 \quad e \quad f(x) = g(x),$$

para todo $x \in A$. Temos que ~ é uma relação de equivalência sobre L^1 (X, μ).

De fato,

i. $f \sim f$, pois $f = f$.
ii. Suponhamos que $f \sim g$, daí $f = g$ quase sempre, então $g = f$ quase sempre e, portanto, $g \sim f$.
iii. Suponhamos que $f \sim g$ e que $g \sim h$, então
   - existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$.
   - existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $g(x) = h(x)$, para todo $x \notin B$.

Tomando C= $A \cup B$, temos que C $\in \mathcal{A}$ e que

$\mu(C) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0,$

ou seja, $\mu(C) = 0$. E mais, para todo $x \notin C$, temos que

$$f(x) = g(x) = h(x).$$

Portanto, $f \sim h$.

Definição 2: Definimos a seguinte norma sobre L¹ *(X, μ)*.

$$\|[f]\| = \int_X |f| d\mu.$$

Usaremos a notação $\mathcal{L}^1(X, \mu) = L^1(X, \mu)|_{\sim}$. Além disso, por convenção, denotaremos $[f] = f$.

Antes de continuarmos se faz necessário mostrarmos que $\|\cdot\|$ está bem definida.

De fato, suponhamos que $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ sejam tais que $[f] = [g]$. Queremos mostrar que $\|[f]\| = \|[g]\|$, ou seja, que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Observemos que, se $[f] = [g]$, então $f \sim g$, ou seja, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0 \;\; e \;\; f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$. Assim, para todo $x \notin A$, temos que

$$f^+(x) = g^+(x) \quad e \quad f^-(x) = g^-(x),$$

daí,

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X g^+ d\mu \quad e \quad \int_X f^- d\mu = \int_X g^- d\mu,$$

logo,

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Portanto $\|[f]\| = \|[g]\|$.

Teorema 1. L^p *(X, μ)* é um espaço vetorial.

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$f + \lambda g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$$

De fato, suponhamos que $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$|f + \lambda g| = |(f + \lambda g)(x)| \leq |f(x)| + |\lambda||g(x)| = |f| + |\lambda||g|,$$

Quase sempre. Daí

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu = \int_X (|f + \lambda g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu.$$

Como $\int_X |f| d\mu < \infty$ e $\int_X |g| d\mu < \infty$, e então

$$\int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu < \infty$$

portanto,

$$\int_X |f+\lambda g|d\mu < \infty$$

Como,

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}$$

daí

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p(\max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\},$$

logo,

$$|f(x)+\lambda g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p,|\lambda|^p|g(x)|^p\}$$

que, juntamente com o fato de

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \quad e \quad \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

segue que,

$$\int_X |f+\lambda g|^p d\mu < \infty$$

Portanto, L^p *(X, μ)* é um espaço vetorial.

Nosso objetivo agora será mostrar que o espaço L^p *(X, μ)*, munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço vetorial normado. Para isso, precisaremos das Desigualdades de Young, de Hölder e de Minkowsky, como seguem nos lemas abaixo:

Lema 1 (Desigualdade de Young (ou Desigualdade Elementar)). Suponhamos que *a, b, p* e *q* sejam números reais positivos e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ então

$$a\cdot b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Primeiramente observemos que,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq}=1 \Rightarrow p+q=pq,$$

daí

$$(p-1)(q-1)=pq-p-q+1=p+q-p-q+1=1.$$

Agora, consideremos as funções

$$f(x) = x^{p-1} \qquad e \qquad g(x) = x^{q-1}.$$

Notemos que

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = (x^{q-1})^{p-1} = x^{(q-1)(p-1)} = x$$

e

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = (x^{p-1})^{q-1} = x^{(p-1)(q-1)} = x$$

ou seja, *g* é a função inversa de *f*. Agora, observe a figura abaixo

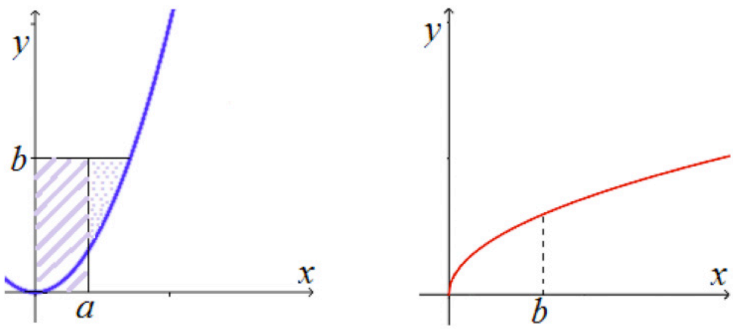

Figura 1:Gráficos das Funções Inversas: f e *g*.

Daí

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^a x^{q-1}\,dx = \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a + \left.\frac{x^q}{q}\right|_0^b = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Portanto

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$

Lema 2 (Desigualdade de Hölder) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$. Considere $f \in \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$ e que $g \in \mathcal{L}^q\,(X, \mu)$ então $f \cdot g \in \mathcal{L}^1\,(X, \mu)$ e

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração: Se $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$ então $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ donde $|f| = 0$, quase sempre ou $|g| = 0$ quase sempre. Assim, $|f \cdot g| = |f| \cdot |g| = 0$ quase sempre.

Portanto,

$$\int_X |f \cdot g| d\mu = 0.$$

Então, suponhamos que $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \neq 0$. Neste caso podemos reescrever a desigualdade desejada como

$$\int_X \left|\frac{f}{\|f\|_p}\right| \cdot \left|\frac{g}{\|g\|_q}\right| d\mu \leq 1.$$

Tomemos

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|_p} \quad e \quad \psi = \frac{g}{\|g\|_q},$$

daí, basta verificarmos que

$$\int_X |\varphi \cdot \psi| d\mu \leq 1,$$

em que $\varphi \in \mathcal{L}^p\ (X, \mu)$ e $\psi \in \mathcal{L}^q\ (X, \mu)$, e

$$\|\varphi\|_p = 1 \quad e \quad \|\psi\|_1 = 1.$$

Usando a

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p} + \frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu \leq \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p}\right) d\mu + \int_X \left(\frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu$$

Daí

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \frac{1}{p}\left(\int_X |\varphi|^p d\mu\right) + \frac{1}{q}\left(\int_X |\psi|^q d\mu\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lema 3 (Desigualdade de Minkowsky): Sejam $f, g \in \mathcal{L}^p\ (X, \mu)$ então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Demonstração: Se p = 1 vale a desigualdade.

Então, suponhamos que p > 1. Daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leq |f + g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|),$$

daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f| + |f + g|^{p-1} \cdot |g|.$$

Observemos que

$$\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu = \int_X |f+g|^{p-1} d\mu < \infty,$$

o que significa que

$$|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q\,(X, \mu).$$

Dessa forma, podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para obter que

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |f| d\mu \leq \||f+g|^{p-1}\|_q \cdot \|f\|_p$$

e

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \||f+g|^{p-1}\|_q \cdot \|g\|_p.$$

Então, temos que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \||f+g|^{p-1}\|_q \cdot \|f\|_p + \||f+g|^{p-1}\|_q \cdot \|g\|_p,$$

ou seja,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q,$$

assim,

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q,$$

Como

$$\cdot\, \||f+g|^{p-1}\|_q = \left[\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\int_X |f+g|^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Então

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

E, dividindo ambos os lados por $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, juntamente com o fato de

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p\,\cdot \frac{1}{p} = 1,$$

e, consequentemente,

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|f+g\|_p,$$

então, segue que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \cdot$$

Observação 1 Vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky se, e somente se,

I. Quando $p = 1$ então f e g têm o mesmo sinal quase sempre;

II. Quando $p > 1$ então existem A e B tais que $A \cdot B \neq 0$ e $A_f = A_g$ e quase sempre.

Pois, $|a+b| = |a| + |b|$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo sinal quase sempre.

Teorema 2: $(\mathcal{L}^p\,(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado com a norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração:

I. É claro que $\|f\|_p = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

II. Notemos que

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\lambda|^p |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

logo,

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|. \|f\|_p.$$

III. *Desigualdade Triangular:* Segue diretamente da Desigualdade de Minkowsky.

Definição 3: Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja um espaço de medida e que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$, com $p \in (1, \infty)$. Sobre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ temos a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definamos então

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p,$$

em que $f,g \in \mathcal{L}^p\,(X,\mu)$,

Teorema 3: $\left(\mathcal{L}^p\,(X,\mu), d_p\right)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p\,(X,\mu)$. Tomemos a subsequência $\{f_{n_K}\}$ de $\{f_n\}$, com $n_1 \leq n_2 \leq \cdots$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\|_p < 1.$$

Basta aplicarmos a definição de sequência de Cauchy, com $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, para $k =$ 1,2 ...

Definamos

$$g_k = \left|f_{n_1}\right| + \left|f_{n_2} - f_{n_1}\right| + \left|f_{n_3} - f_{n_2}\right| + \cdots + \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|,$$

para k = 1,2... Notemos que g_k é mensurável, e mais,

$$g_k \geq 0$$

para k = 1,2... , daí

$$g_k \leq g_{k+1},$$

para k = 1,2... Portanto, é convergente e, daí, defina

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Afirmação: $g \in \mathcal{L}^p\,(X,\mu)$.

Com efeito, como cada g_k é mensurável, temos que g é mensurável. Além disso,

$$\int_X g^p\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_k^p\, d\mu,$$

daí, pelo Teorema de Beppo-Levi, segue que

$$\int_X g^p\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_k^p\, d\mu.$$

Mas, para todo k temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_X g_k^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \|g_k\|_p \\ &\leq \left\|f_{n_1}\right\|_p + \left\|f_{n_2} - f_{n_1}\right\|_p + \left\|f_{n_3} - f_{n_2}\right\|_p + \cdots + \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \\ &\leq \left\|f_{n_1}\right\|_p + 1 < \infty.\end{aligned}$$

Assim

$$\int_X g^p d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\|f_{n_1}\|_p + 1\right) \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty.$$

Por um teorema temos que g^p é finita quase sempre. Logo, g é finita quase sempre, ou seja,

$$|f_{n_1}| + \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

é finita quase sempre. Daí,

$$|f_{n_1}| + \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

converge quase sempre e, portanto,

$$f_{n_1} + \sum_{i=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge quase sempre. Logo, a sequência $\{f_{n_{k+1}}(x)\}$ converge quase sempre.

Agora, definamos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_{k+1}}(x),$$

quase sempre.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e tomemos um índice *k* suficientemente grande de forma que, se $m, n \geq n_k$, então

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon,$$

assim,

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon,$$

para $m, n \geq n_k$ e $k > K$. Usando o Lema de Fatou, segue, para $n \geq n_k$, que

$$\int_X |f - f_n|^p d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \inf |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \inf \int_X |f_{n_k} - f_n|^p d\mu$$
$$= \lim_{k\to\infty} \inf |f_{n_k} - f_n|_p = \varepsilon^p$$

Logo,

$$\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq k$.

Teorema 4 Suponhamos que $p \in [1, \infty)$ e que $\varepsilon > 0$. Se $f \in \mathcal{L}^p\ (X, \mu)$. Se então existe uma função simples ψ tal que

$$|\psi| \leq f \qquad e \qquad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

Demonstração:

1° caso: $f \geq 0$.

Usando o Teorema 3 podemos afirmar que existe uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \psi_n \leq f$ e

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x), \tag{1}$$

daí

$$|\psi_n - f| \leq 2^p(|\psi_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f|^p + |f|^p) = 2^{p+1}|f|^p$$

logo

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p$$

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p \tag{2}$$

Assim, com a Equação 1 juntamente com a Desigualdade 2, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n - f|^p = 0$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\psi_n - f|^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |\psi_n - f|^p\, d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - f\|_p^p = 0.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe simples tal que

$$|\psi| \leq f \qquad e \qquad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

2° caso: f é qualquer.

Como $f = f^+ - f^-$ onde $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$ e , podemos usar o caso anterior e afirmar que existem funções simples φ e ψ tais que

$$0 \le \varphi \le f^+ \quad e \quad 0 \le \psi \le f^-$$

e, assim,

$$\|f^+ - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \qquad e \qquad \|f^- - \psi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como φ e ψ são funções simples, então $\varphi - \psi$ também é. Além disso,

$$|\varphi - \psi| \le |\varphi| - |\psi| \le f^+ + f^- = |f|,$$

ou seja,

$$|\varphi - \psi| \le |f|,$$

e mais,

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p = \|f^+ - f^- - \psi + \varphi\|_p = \|(f^+ - \psi) - (f^- - \varphi)\|_p$$

daí

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p \le \|(f^+ - \psi)\|_p + \|(f^- - \varphi)\|_p \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, existe uma função simples tal que

$$|\varphi - \psi| \le f \quad e \quad \|f - (\varphi - \psi)\|_p \le \varepsilon.$$

Teorema 5 Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja finito, isto é, que $\mu(X) < \infty.$ Então

(i) Se $1 < p < q \le \infty$ então $\mathcal{L}^q\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$.

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^\infty\,(X, \mu)$, então

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

Demonstração: Temos dois casos a considerar:

1° caso: $q = \infty$

Queremos provar que $\mathcal{L}^\infty\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$. Seja $f \in \mathcal{L}^\infty\,(X, \mu)$. Temos que

$$|f| \le \|f\|_\infty \quad quase\ sempre,$$

daí,

$$|f|^p \le \|f\|_\infty^p \quad quase\ sempre,$$

e, por uma proposição, temos que

$$\int_X |f|^p\, d\mu \le \int_X \|f\|_\infty^p d\mu < \infty,$$

logo,

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X),$$

assim,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,

$$f \in \mathcal{L}^p\,(X, \mu).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^\infty\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu).$$

2º caso: $q < \infty$. Assim, $1 < p < q < \infty$.

Queremos provar que $\mathcal{L}^q\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$. Seja $f \in \mathcal{L}^q\,(X, \mu)$, tomemos λ = $\frac{p}{q} > 1$ pois $p < q$. Podemos escolher β de forma que

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda} = 1,$$

daí, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\int_X (|f|^p)^\lambda \, d\mu\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \left(\int_X (1)^\beta \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{\beta}},$$

que nos dá

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\|f\|_q\right)^p \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Logo,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{\beta p}}.$$

Assim, se $f \in \mathcal{L}^q\,(X, \mu)$ e $\mu(X) < \infty$, então $\|f\|_p < \infty$, e, com isso, $f \in \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$ Portanto,

$$\mathcal{L}^q\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu).$$

(ii) Seja $f \in \mathcal{L}^\infty\,(X, \mu)$.

Consideremos a desigualdade encontrada na demonstração do item (i):

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}},$$

daí,

$$\lim_{p\to\infty}\sup\|f\|_p \leq \lim_{p\to\infty}\sup\left(\|f\|_\infty(\mu(X))^{\frac{1}{p}}\right),$$

ou melhor,

$$\lim_{p\to\infty}\sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty}\sup(\mu(X))^{\frac{1}{p}}.$$

e, assim,

$$\lim_{p\to\infty}\sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Por outro lado, ao tomarmos $\alpha < \|f\|_\infty$ temos que

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0,$$

Daí

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \mu(\{|f| > \alpha\}),$$

assim,

$$\|f\|_p \geq \alpha\mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}$$

e, com isso,

$$\lim_{p\to\infty}\inf\|f\|_p \geq \left(\lim_{p\to\infty}\inf \alpha\mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}\right) = \alpha \lim_{p\to\infty}\inf \mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} = \alpha,$$

logo,

$$\lim_{p\to\infty}\inf\|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty}\inf\|f\|_p \leq \lim_{p\to\infty}\sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Portanto,

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$$

3 | APLICAÇÃO

Se $p \in [1, \infty)$ então o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Com efeito, dada $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e fixado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 4, existe uma função simples tal que

$$|\psi| \leq f \qquad e \qquad \|f-\psi\|_p < \varepsilon$$

e, como toda função simples é $\mathcal{L}^p\,(X, \mu)$, o resultado segue.

Com isso, mostramos que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p\,(X, \mu)$.

REFERÊNCIAS

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** New York: John Wiley & Sons, 1978.

MEDEIROS, L. A. **A Integral de Lebesgue.** 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

RICOU, M. Medida e **Integração**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.

Observação: Trabalho publicado em: LOPES, M.M; MORENO, A.L. **Aplicações do Teorema de Baire**. SIGMAE, v.6, 2, p. 46-53, 2017.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

I

L

R

S

T

V

W

Y

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020