

Américo Junior Nunes da Silva  
(Organizador)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática



### **Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

### **Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

### **Bibliotecária**

Janaina Ramos

### **Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremona

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

### **Imagens da Capa**

Shutterstock

### **Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

### **Revisão**

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

## Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecária:** Janaina Ramos  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Correção:** Mariane Aparecida Freitas  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizador:** Américo Junior Nunes da Silva

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia.

ISBN 978-65-5706-440-5

DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática”***, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se

enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
CALIBRATION OF LOCAL VOLATILITY SURFACES WITH UNCERTAIN ASSET PRICE: AN ENKF-ENKF APPROACH	
Xu Yang	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027101</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>9</b>
A MATEMÁTICA AUXILIANDO NO COMBATE A OBESIDADE INFANTIL	
Nilton Rosini	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027102</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>16</b>
APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAIRE	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027103</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>26</b>
UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM $\mathbb{P}$	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027104</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>41</b>
O PRINCÍPIO DO MÁXIMO E APLICAÇÕES	
Francisco Erisson Batista Gomes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027105</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>47</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO 3D DE GRÃOS AGRÍCOLAS NO PROCESSO DE ARMAZENAGEM	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Rodolfo França de Lima	
Ricardo Klein Lorenzoni	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027106</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>58</b>
DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DE DESEMPENHO DE UMA FILA $M/M/1$ ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM BAYESIANA	
Nilson Luiz Castelucio Brito	
Celimar Reijane Alves Damasceno Paiva	
Pedro Humberto de Almeida Mendonca Gonzaga	
Rodrigo Fonseca Santana Costa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027107</b>	

<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>68</b>
DERIVABILIDADE E DIFERENCIABILIDADE NO ENSINO DO CÁLCULO	
Pedro Pablo Durand Lazo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027108</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>84</b>
A MATEMÁTICA NA SUSTENTABILIDADE	
Silvana Grimes	
Daiana Lana	
Janete Bizatto Ferreira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027109</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>89</b>
INFLUÊNCIA DA PARTICIPAÇÃO DA FAMÍLIA NO PROCESSO DE ENSINO- APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Diane Saraiva Fronza	
Guilherme Schildt Duarte	
Lara Rafaela Menezes	
Marcelo Eder Lamb	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271010</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>98</b>
OPERAÇÕES E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA	
Leniedson Guedes dos Santos	
Rodrigo Ferreira dos Santos	
Ulisses Suriano da Silva Neto	
Maurílio Messias Bomfim Alves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271011</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>102</b>
TEM ÂNGULO EM TODO LUGAR	
Alessandra dos Santos Fernandes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271012</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>108</b>
INVESTIGANDO AS POTENCIALIDADES DO YOUTUBE: UMA PRÁTICA COM MODELAGEM	
João Carlos Lemos Junior	
Martinho Wojdylo	
Ronaldo Jacumazo	
Dionísio Burak	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271013</b>	

<b>CAPÍTULO 14.....</b>	<b>122</b>
ASPECTOS PRÁTICOS NA FORMAÇÃO DO DOCENTE EM PEDAGOGIA A PARTIR DO TRABALHO COM MAPAS CONCEITUAIS COMO ESTRATÉGIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA	
André Ricardo Lucas Vieira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271014</b>	
<b>CAPÍTULO 15.....</b>	<b>134</b>
AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A APROPRIAÇÃO DO WEB CURRÍCULO PELOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA COMO O "X" DA QUESTÃO	
Vera Lúcia de Oliveira Freitas Ruas	
Josué Antunes de Macêdo	
Edson Crisostomo dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271015</b>	
<b>CAPÍTULO 16.....</b>	<b>145</b>
A PASSAGEM DO 3D ↔ 2D NOS ANOS INICIAIS: UMA PROPOSTA POSSÍVEL	
Julio Silva de Pontes	
Celso Ribeiro Campos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271016</b>	
<b>CAPÍTULO 17.....</b>	<b>155</b>
CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS DE PEDAGOGIA SOBRE A QUALIDADE DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL	
Michela Caroline Macêdo	
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271017</b>	
<b>CAPÍTULO 18.....</b>	<b>165</b>
LEITURA, INTERPRETAÇÃO E ESCRITA MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA AS VIVÊNCIAS EM UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA NO SEMIÁRIDO BAIANO	
Eliane Ferreira de Santana	
Américo Junior Nunes da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271018</b>	
<b>CAPÍTULO 19.....</b>	<b>180</b>
APLICATIVO EDUCACIONAL ARTE AQUI!: UMA PROPOSTA BASEADA NA CARTOGRAFIA DOS SENTIDOS	
Kelen Ricardo dos Reis	
Carine Geltrudes Webber	
Roberta Dall Agnese da Costa	
Isolda Gianni de Lima	
Laurete Teresinha Zanol Sauer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271019</b>	

<b>CAPÍTULO 20.....</b>	<b>195</b>
<b>MODELAGEM E ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA</b>	
Felipe Manoel Cabral	
Marcela Lima Santos	
Claudia Mazza Dias	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271020</b>	
<b>CAPÍTULO 21.....</b>	<b>210</b>
<b>O SABOR DA MATEMÁTICA – O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS E RECEITAS CULINÁRIAS</b>	
Domingos Antonio Lopes	
Cristiana Andrade Poffal	
Cinthy Maria Schneider Meneghetti	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271021</b>	
<b>CAPÍTULO 22.....</b>	<b>222</b>
<b>VIVÊNCIAS MATEMÁTICAS: RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE FRAÇÕES</b>	
Mírian Silva Ferreira	
Jairo Alves Batalha	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271022</b>	
<b>CAPÍTULO 23.....</b>	<b>229</b>
<b>ENSINO DE MATEMÁTICA: SISTEMA NUMERICO EGÍPCIO POR MEIO DE UM CENÁRIO.</b>	
Jeizi Ferreira Santos	
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa	
Eusom Passos Lima	
Izaías Silva Rodrigues	
Karoline de Sarges Fonseca	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
Maiky Bailão Sardinha	
Marcos Vinicius Silva Alves	
Otavio Junior Reis de Moraes	
Pedro Augusto Lopes Rosa	
Rosana Pinheiro Tavares	
Sebastião Erik Pinheiro e Pinheiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271023</b>	
<b>CAPÍTULO 24.....</b>	<b>241</b>
<b>PROCESSOS (NÃO) HEGEMÔNICOS DE MATEMATIZAR: ANÁLISE DE LIVROS (PARA) DIDÁTICOS SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS</b>	
Weverton Augusto da Vitória	
Rodolfo Chaves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271024</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR.....</b>	<b>256</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO.....</b>	<b>257</b>

## UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM $L^p$

Data de aceite: 01/10/2020

Data de submissão: 12/08/2020

### Michele Martins Lopes

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC,  
Universidade Estadual de Campinas  
Campinas – SP  
<http://lattes.cnpq.br/7572795941731427>

### Angela Leite Moreno

Universidade Federal de Alfenas, Instituto de  
Ciências Exatas, Departamento de Matemática  
Alfenas – MG  
<http://lattes.cnpq.br/5106302431642025>

**RESUMO:** Neste trabalho são apresentados alguns resultados sobre Teoria da Medida e Integração de Lebesgue. As funções Lebesgue integráveis são funções que se encontram em um espaço chamado Espaço  $L^p$ , com  $p \in [1, \infty)$ . Primeiramente definimos tal espaço e, dentre resultados importantes sobre o mesmo, mostramos que ele é um espaço vetorial. Então, após definir uma norma nesse espaço, mostramos que ele é um espaço vetorial normado. Para isso, utilizamos três importantes desigualdades: Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Minkowsky. Daí, definimos uma distância com essa norma e mostramos que o Espaço  $L^p$  com essa distância é um espaço métrico completo. Uma função Lebesgue integrável deve ser uma função simples, ou então deve existir uma função simples que tenha propriedades semelhantes às da função que se deseja integrar. Logo, é apresentado um teorema

que garante a existência de uma função simples que possui propriedades semelhantes à de uma função presente no Espaço  $L^p$ . Com isso, temos a aplicação que diz que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso no espaço  $L^p$ .

**PALAVRAS-CHAVE:** Integral de Lebesgue, Função Simples, Conjunto Denso, Espaços  $L^p$ .

### A RESULT ON $L^p$ MEASURABLE FUNCTIONS LIMITED

**ABSTRACT:** In this work, some results are presented on Lebesgue's Theory of Measurement and Integration. The integrable Lebesgue functions found in a space called Espaço  $L^p$ , with  $p \in [1, \infty)$ . First, we define such a space, and, among relevant results about it, we show that it is a vector space. So, after defining a norm in this space, we show that it is a normed vector space. For this, we use three Crucial inequalities: Young's Inequality, Hölder's Inequality, and Minkowsky's Inequality. Hence, we define a distance with this standard and show that the  $L^p$  Space at that distance is a complete metric space. An integrable Lebesgue function must be a simple function, or there must be a simple function that has properties similar to the function that want to integrate. Therefore, a theorem presented that guarantees the existence of a simple function that has properties similar to that of a function present in the  $L^p$  Space. With that, we have the application that says that the set of limited measurable functions is dense in the  $L^p$  space.

**KEYWORDS:** Lebesgue Integral, Simple Function, Dense Set, Spaces  $L^p$ .

## 1 | INTRODUÇÃO

Neste trabalho, primeiramente apresentamos as definições de espaços  $L^1$  e  $L^p$ , mostrando que estamos trabalhando em um espaço vetorial. Em seguida vemos três importantes desigualdades que são necessárias para demonstrar um teorema que mostra que  $L^p$  é espaço vetorial normado, com uma norma específica, que é finita. Definimos, com isso, uma métrica  $d_p$ , que em  $L^p$  determinam um espaço métrico completo. Por fim, esse teorema é usado para demonstrar um resultado fundamental para esse estudo. Com ele, realizamos uma aplicação: o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em  $L^p$ .

## 2 | PRELIMINARES

**Definição 1:** Seja  $p \in [1, \infty)$ . Definamos  $L^p(X, \mu)$  o seguinte conjunto

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f \text{ mensurável: } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Agora, suponhamos que  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  seja um espaço de medida. Seja  $L^p(X, \mu)$ , e considere a seguinte relação:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \text{ quase sempre}$$

Assim,  $f \sim g$  se existir  $A \in \mathcal{A}$  tal que

$$\mu(A) = 0 \quad e \quad f(x) = g(x),$$

para todo  $x \in A$ . Temos que  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $L^1(X, \mu)$ .

*De fato,*

- i.  $f \sim f$ , pois  $f = f$ .
- ii. Suponhamos que  $f \sim g$ , daí  $f = g$  quase sempre, então  $g = f$  quase sempre e, portanto,  $g \sim f$ .
- iii. Suponhamos que  $f \sim g$  e que  $g \sim h$ , então
  - existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \notin A$ .
  - existe  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(B) = 0$  e  $g(x) = h(x)$ , para todo  $x \notin B$ .

Tomando  $C = A \cup B$ , temos que  $C \in \mathcal{A}$  e que

$$\mu(C) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0,$$

ou seja,  $\mu(C) = 0$ . E mais, para todo  $x \notin C$ , temos que

$$f(x) = g(x) = h(x).$$

Portanto,  $f \sim h$ .

**Definição 2:** Definimos a seguinte norma sobre  $L^1(X, \mu)$ .

$$\| [f] \| = \int_X |f| d\mu.$$

Usaremos a notação  $\mathcal{L}^1(X, \mu) = L^1(X, \mu) | \sim$ . Além disso, por convenção, denotaremos  $[f] = f$ .

Antes de continuarmos se faz necessário mostrarmos que  $\| \cdot \|$  está bem definida.

*De fato*, suponhamos que  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  sejam tais que  $[f] = [g]$ . Queremos mostrar que  $\| [f] \| = \| [g] \|$ , ou seja, que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Observemos que, se  $[f] = [g]$ , então  $f \sim g$ , ou seja, existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \notin A$ . Assim, para todo  $x \notin A$ , temos que

$$f^+(x) = g^+(x) \quad e \quad f^-(x) = g^-(x),$$

daí,

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X g^+ d\mu \quad e \quad \int_X f^- d\mu = \int_X g^- d\mu,$$

logo,

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Portanto  $\| [f] \| = \| [g] \|$ .

**Teorema 1.**  $L^p(X, \mu)$  é um espaço vetorial.

**Demonstração:** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$f + \lambda g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$$

*De fato*, suponhamos que  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$|f + \lambda g| = |(f + \lambda g)(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| |g(x)| = |f| + |\lambda| |g|,$$

Quase sempre. Daí

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu = \int_X (|f + \lambda g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu.$$

Como  $\int_X |f| d\mu < \infty$  e  $\int_X |g| d\mu < \infty$ , e então

$$\int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu < \infty$$

portanto,

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu < \infty$$

Como,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}$$

daí

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\},$$

logo,

$$|f(x) + \lambda g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |\lambda|^p |g(x)|^p\}$$

que, juntamente com o fato de

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \text{ e } \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

segue que,

$$\int_X |f + \lambda g|^p d\mu < \infty$$

Portanto,  $L^p(X, \mu)$  é um espaço vetorial.

Nosso objetivo agora será mostrar que o espaço  $L^p(X, \mu)$ , munido da norma

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço vetorial normado. Para isso, precisaremos das Desigualdades de Young, de Hölder e de Minkowsky, como seguem nos lemas abaixo:

**Lema 1 (Desigualdade de Young (ou Desigualdade Elementar)).** Suponhamos que  $a, b, p$  e  $q$  sejam números reais positivos e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Demonstração:** Primeiramente observemos que,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p+q = pq,$$

daí

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = p + q - p - q + 1 = 1.$$

Agora, consideremos as funções

$$f(x) = x^{p-1} \quad e \quad g(x) = x^{q-1}.$$

Notemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^{q-1})^{p-1} = x^{(q-1)(p-1)} = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^{p-1})^{q-1} = x^{(p-1)(q-1)} = x$$

ou seja,  $g$  é a função inversa de  $f$ . Agora, observe a figura abaixo

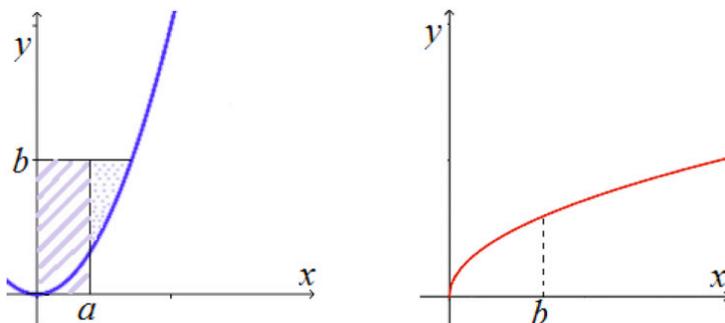


Figura 1: Gráficos das Funções Inversas:  $f$  e  $g$ .

Daí

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^a x^{q-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^a + \frac{x^q}{q} \Big|_0^b = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Portanto

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Lema 2 (Desigualdade de Hölder)** Sejam  $p, q \in \mathbb{R}$ , tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Considere  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  e que  $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$  então  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  e

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

**Demonstração:** Se  $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$  então  $\|f\|_p = 0$  ou  $\|g\|_q = 0$  donde  $|f| = 0$ , quase sempre ou  $|g| = 0$  quase sempre. Assim,  $|f \cdot g| = |f| \cdot |g| = 0$  quase sempre.

Portanto,

$$\int_X |f \cdot g| d\mu = 0.$$

Então, suponhamos que  $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \neq 0$ . Neste caso podemos reescrever a desigualdade desejada como

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_p} \right| \cdot \left| \frac{g}{\|g\|_q} \right| d\mu \leq 1.$$

Tomemos

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|_p} \quad e \quad \psi = \frac{g}{\|g\|_q},$$

daí, basta verificarmos que

$$\int_X |\varphi \cdot \psi| d\mu \leq 1,$$

em que  $\varphi \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  e  $\psi \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$ , e

$$\|\varphi\|_p = 1 \quad e \quad \|\psi\|_1 = 1.$$

Usando a

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \int_X \left( \frac{|\varphi|^p}{p} + \frac{|\psi|^q}{q} \right) d\mu \leq \int_X \left( \frac{|\varphi|^p}{p} \right) d\mu + \int_X \left( \frac{|\psi|^q}{q} \right) d\mu$$

Daí

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \frac{1}{p} \left( \int_X |\varphi|^p d\mu \right) + \frac{1}{q} \left( \int_X |\psi|^q d\mu \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Lema 3 (Desigualdade de Minkowsky):** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Demonstração:** Se  $p = 1$  vale a desigualdade.

Então, suponhamos que  $p > 1$ . Daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leq |f + g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|),$$

daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f| + |f + g|^{p-1} \cdot |g|.$$

Observemos que

$$\int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu = \int_X |f + g|^{p-1} d\mu < \infty,$$

o que significa que

$$|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X, \mu).$$

Dessa forma, podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para obter que

$$\int_X |f + g|^{p-1} \cdot |f| d\mu \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p$$

e

$$\int_X |f + g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p.$$

Então, temos que

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p + \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p,$$

ou seja,

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q,$$

assim,

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q,$$

Como

$$\cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q = \left[ \int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} = \left[ \left( \int_X |f + g|^{p-1} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} = \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Então

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

E, dividindo ambos os lados por  $\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$ , juntamente com o fato de

$$p - \frac{p}{q} = p \left( 1 - \frac{1}{q} \right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^q} = \|f + g\|_p,$$

então, segue que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Observação 1** Vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky se, e somente se,

- I. Quando  $p = 1$  então  $f$  e  $g$  têm o mesmo sinal quase sempre;
- II. Quando  $p > 1$  então existem  $A$  e  $B$  tais que  $A \cdot B \neq 0$  e  $A_f = A_g$  e quase sempre.

Pois,  $|a + b| = |a| + |b|$  se, e somente se,  $a$  e  $b$  possuem o mesmo sinal quase sempre.

**Teorema 2:**  $(\mathcal{L}^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$  é um espaço vetorial normado com a norma dada por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Demonstração:**

- I. É claro que  $\|f\|_p = 0$  se, e somente se,  $f = 0$ .
- II. Notemos que

$$\|\lambda f\|_p = \left( \int_X |\lambda f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_X |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

logo,

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p.$$

- III. *Desigualdade Triangular:* Segue diretamente da Desigualdade de Minkowsky.

**Definição 3:** Suponhamos que  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  seja um espaço de medida e que  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ , com  $p \in (1, \infty)$ . Sobre  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  temos a norma

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definamos então

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p,$$

em que  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ ,

**Teorema 3:**  $(\mathcal{L}^p(X, \mu), d_p)$  é um espaço métrico completo.

**Demonstração:** Seja  $\{f_n\}$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ . Tomemos a subseqüência  $\{f_{n_k}\}$  de  $\{f_n\}$ , com  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 1.$$

Basta aplicarmos a definição de seqüência de Cauchy, com  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ , para  $k = 1, 2, \dots$

Definamos

$$g_k = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_3} - f_{n_2}| + \dots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|,$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Notemos que  $g_k$  é mensurável, e mais,

$$g_k \geq 0$$

para  $k = 1, 2, \dots$ , daí

$$g_k \leq g_{k+1},$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Portanto,  $g_k$  é convergente e, daí, defina

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x).$$

**Afirmção:**  $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ .

Com efeito, como cada  $g_k$  é mensurável, temos que  $g$  é mensurável. Além disso,

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p d\mu,$$

daí, pelo Teorema de Beppo-Levi, segue que

$$\int_X g^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n^p d\mu.$$

Mas, para todo  $k$  temos que

$$\begin{aligned} \left( \int_X g_k^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \|g_k\|_p \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + \|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p + \|f_{n_3} - f_{n_2}\|_p + \dots + \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_X g^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_{n_1}\|_p + 1) \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty.$$

Por um teorema temos que  $g^p$  é finita quase sempre. Logo,  $g$  é finita quase sempre, ou seja,

$$|f_{n_1}| + \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

é finita quase sempre. Daí,

$$|f_{n_1}| + \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

converge quase sempre e, portanto,

$$f_{n_1} + \sum_{i=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge quase sempre. Logo, a sequência  $\{f_{n_{k+1}}(x)\}$  converge quase sempre.

Agora, definamos

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k+1}}(x),$$

quase sempre.

Fixemos  $\varepsilon > 0$  e tomemos um índice  $k$  suficientemente grande de forma que, se  $m, n \geq n_k$ , então

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon,$$

assim,

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon,$$

para  $m, n \geq n_k$  e  $k > K$ . Usando o Lema de Fatou, segue, para  $n \geq n_k$ , que

$$\begin{aligned} \int_X |f - f_n|^p d\mu &= \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_n|^p d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_n\|_p^p = \varepsilon^p \end{aligned}$$

Logo,

$$\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq k$ .

**Teorema 4** Suponhamos que  $p \in [1, \infty)$  e que  $\varepsilon > 0$ . Se  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ . Se então existe uma função simples  $\psi$  tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

**Demonstração:**

**1º caso:**  $f \geq 0$ .

Usando o Teorema 3 podemos afirmar que existe uma sequência  $\{\psi_n\}$  de funções simples tais que  $0 \leq \psi_n \leq f$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = f(x), \quad (1)$$

daí

$$|\psi_n - f| \leq 2^p(|\psi_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f|^p + |f|^p) = 2^{p+1}|f|^p$$

logo

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p$$

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p \quad (2)$$

Assim, com a Equação 1 juntamente com a Desigualdade 2, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n - f|^p = 0$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\psi_n - f|^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n - f|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - f\|_p^p = 0.$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  existe simples tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

**2º caso:**  $f$  é qualquer.

Como  $f = f^+ - f^-$  onde  $f^+ \geq 0$  e  $f^- \geq 0$  e, podemos usar o caso anterior e afirmar que existem funções simples  $\varphi$  e  $\psi$  tais que

$$0 \leq \varphi \leq f^+ \quad e \quad 0 \leq \psi \leq f^-$$

e, assim,

$$\|f^+ - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \|f^- - \psi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $\varphi$  e  $\psi$  são funções simples, então  $\varphi - \psi$  também é. Além disso,

$$|\varphi - \psi| \leq |\varphi| + |\psi| \leq f^+ + f^- = |f|,$$

ou seja,

$$|\varphi - \psi| \leq |f|,$$

e mais,

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p = \|f^+ - f^- - \psi + \varphi\|_p = \|(f^+ - \psi) - (f^- - \varphi)\|_p$$

daí

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p \leq \|(f^+ - \psi)\|_p + \|(f^- - \varphi)\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, existe uma função simples tal que

$$|\varphi - \psi| \leq f \quad e \quad \|f - (\varphi - \psi)\|_p \leq \varepsilon.$$

**Teorema 5** Suponhamos que  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  seja finito, isto é, que  $\mu(X) < \infty$ . Então

- (i) Se  $1 < p < q \leq \infty$  então  $\mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$ .
- (ii) Se  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ , então

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

**Demonstração:** Temos dois casos a considerar:

**1º caso:**  $q = \infty$

Queremos provar que  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$ . Seja  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ . Temos que

$$|f| \leq \|f\|_\infty \quad \text{quase sempre,}$$

daí,

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^p \quad \text{quase sempre,}$$

e, por uma proposição, temos que

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu < \infty,$$

logo,

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X),$$

assim,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

**2º caso:**  $q < \infty$ . Assim,  $1 < p < q < \infty$ .

Queremos provar que  $\mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$ . Seja  $f \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$ , tomemos  $\lambda = \frac{p}{q} > 1$  pois  $p < q$ . Podemos escolher  $\beta$  de forma que

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda} = 1,$$

daí, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \left( \int_X (|f|^p)^\lambda d\mu \right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \left( \int_X (1)^\beta d\mu \right)^{\frac{1}{\beta}} = \left( \int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{\beta}},$$

que nos dá

$$\int_X |f|^p d\mu \leq (\|f\|_q)^p \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Logo,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{\beta p}}.$$

Assim, se  $f \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$  e  $\mu(X) < \infty$ , então  $\|f\|_p < \infty$ , e, com isso,  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$

Portanto,

$$\mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

(ii) Seja  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ .

Consideremos a desigualdade encontrada na demonstração do item (i):

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}},$$

daí,

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \left( \|f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}} \right),$$

ou melhor,

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \limsup_{p \rightarrow \infty} (\mu(X))^{\frac{1}{p}}.$$

e, assim,

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Por outro lado, ao tomarmos  $\alpha < \|f\|_\infty$  temos que

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0,$$

Daí

$$\int_X |f|^p d\mu \geq \int_{\{|f| > \alpha\}} |f|^p d\mu \geq \int_{\{|f| > \alpha\}} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(\{|f| > \alpha\}),$$

assim,

$$\|f\|_p \geq \alpha \mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}$$

e, com isso,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \left( \liminf_{p \rightarrow \infty} \alpha \mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \right) = \alpha \liminf_{p \rightarrow \infty} \mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} = \alpha,$$

logo,

$$\begin{aligned} \liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p &\geq \|f\|_\infty \\ \|f\|_\infty &\leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

### 3 I APLICAÇÃO

Se  $p \in [1, \infty)$  então o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ .

Com efeito, dada  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$  e fixado  $\varepsilon > 0$ , pelo Teorema 4, existe uma função simples tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon$$

e, como toda função simples é  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ , o resultado segue.

Com isso, mostramos que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ .

## REFERÊNCIAS

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MEDEIROS, L. A. **A Integral de Lebesgue**. 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

RICOU, M. **Medida e Integração**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.

**Observação:** Trabalho publicado em: LOPES, M.M; MORENO, A.L. **Aplicações do Teorema de Baire**. SIGMAE, v.6, 2, p. 46-53, 2017.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aeração de Grãos 47

Algoritmos 98, 99, 100, 101, 172, 173, 174, 178

Análise estatística 9, 10

Análise Matemática 16

Ângulo 12, 102, 103, 104, 105, 107

Aplicativo 13, 180, 182, 183, 184, 185, 187, 190, 191, 192, 193

Aprendizagem 9, 12, 13, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 104, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 152, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 191, 192, 194, 195, 197, 209, 210, 211, 212, 213, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 234, 239, 250, 253

Aprendizagem Significativa 101, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 194

Arte 13, 86, 111, 115, 128, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 240

Asset Price 11, 1, 3, 4

### B

BNCC 135, 136, 139, 144, 167, 169, 178, 182, 183, 210, 211, 212, 215, 219, 220

### C

Cálculo 12, 14, 10, 12, 68, 69, 73, 78, 83, 92, 115, 116, 119, 172, 173, 174, 176, 199, 231, 241, 242, 246, 247, 248, 249, 250, 253

Campos Semânticos 241, 243, 244, 254, 255

Cartografia 13, 180, 183, 184, 185, 191, 192, 193, 194

Circunferência da cintura 9, 10, 11, 12, 13

Conjunto Denso 26

Contextualização 165, 166, 167, 169, 170, 171, 178, 188, 189, 192

Curso de Pedagogia 126, 128, 155, 160

### D

Derivabilidade 12, 68, 73, 80

Desenhos 104, 105, 107, 145, 146, 149, 150, 151, 152, 185, 189, 193

Diferenciabilidade 12, 68, 73, 82

Distribuição de Ar 47

## E

EDPs 41

Educação Básica 9, 10, 88, 94, 98, 99, 110, 111, 112, 121, 135, 136, 139, 140, 142, 143, 168, 170, 174, 175, 195, 210, 221, 240, 256

Educação Matemática 13, 100, 101, 108, 110, 111, 112, 120, 121, 132, 134, 135, 139, 143, 144, 153, 155, 157, 159, 165, 166, 168, 179, 209, 228, 240, 241, 243, 244, 254, 255, 256

Egito 229, 230, 233, 236

Ensemble Kalman filter 1

Ensino 9, 10, 12, 13, 14, 68, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 100, 101, 102, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 174, 175, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 188, 191, 192, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 206, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 250, 253, 254, 255, 256

Espaços de Banach 16

Espaços Lp 26

Etnomatemática 179, 228, 241, 243, 244, 245, 254, 255

## F

Família 12, 19, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 127, 128, 254

Ferramenta de Ensino 125, 195, 196, 198

Filas 58, 59, 66

Formação de Professores 9, 122, 138, 142, 153, 158, 160, 179, 233, 244, 256

Formação inicial de Professores 155, 163

Frações 14, 103, 104, 105, 203, 217, 222, 223, 224, 226, 227

Função Simples 26, 36, 37, 39, 40

## I

Infantil 11, 9, 10, 13, 14, 84, 85, 86, 87, 88, 118, 143, 153, 178, 194, 228

Inferência Bayesiana 58, 60

Integral de Lebesgue 26, 40

Interdisciplinaridade 108, 109, 144, 165, 168, 169, 170, 171, 177, 178, 179, 181, 213, 220, 240

## L

Letramento Matemático 165, 167, 171

Local volatility 11, 1, 2, 3, 7, 8

Lúdico 84, 210, 212, 219, 226

## **M**

Mapas Conceituais 13, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132

Matemática 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 9, 10, 12, 16, 26, 41, 47, 48, 56, 68, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 178, 179, 184, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 208, 209, 210, 211, 213, 220, 221, 222, 223, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 238, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 250, 252, 254, 255, 256

Medida 10, 14, 26, 27, 33, 40, 102, 103, 104, 127, 148, 193, 217, 246, 247, 251, 252

Metodologia 10, 42, 91, 94, 98, 100, 108, 110, 111, 113, 120, 126, 132, 138, 143, 145, 146, 151, 152, 161, 170, 199, 210, 211, 212, 213, 219, 221, 229, 230, 232, 234, 239, 240, 241, 254

Metodologia Ativa 210, 211, 212, 213, 219, 221

Mobile Art 180, 184, 185, 187, 191

Modelagem Computacional 47

Modelagem Matemática 11, 47, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 177, 178, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 209

## **N**

Números Decimais 195, 211, 217, 220, 223, 228

## **O**

Obesidade 11, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 209

Operações 12, 98, 99, 100, 101, 167, 171, 195, 196, 198, 199, 211, 215, 217, 219, 228

Operadores Elípticos 41

## **P**

Princípio da Limitação Uniforme 16, 17, 22, 24, 25

Princípios do Máximo 41

Professor 9, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 101, 102, 103, 106, 108, 109, 112, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 139, 142, 145, 146, 148, 149, 150, 151, 153, 158, 159, 161, 163, 164, 167, 170, 171, 174, 177, 178, 179, 182, 195, 196, 209, 212, 213, 219, 222, 224, 227, 232, 234, 244, 245, 252, 254, 256

## **R**

Recursos didáticos 14, 222

Relação de proporção direta 9, 12

Representação 131, 138, 141, 145, 146, 147, 148, 150, 151, 152, 181, 183, 188, 189, 197, 199, 200, 203, 222, 223, 227, 236, 237

Resolução de Problemas 128, 131, 165, 167, 168, 197

## **S**

Sentidos 13, 123, 139, 159, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194

Significar 73, 222

Simulação 11, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 56, 58, 66, 183

Sistema Numérico 230, 234, 235, 238, 239

Sistemas de Numeração 12, 98, 99, 100, 101, 234

Sistemas Lineares 195, 196

Sustentabilidade 12, 84, 85, 86, 87

## **T**

Tecnologias Digitais 13, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 181, 182, 220

Teorema de Banach-Steinhaus 16, 22, 24, 25

Tikhonov regularization 1

Transferidor 102, 103, 104

## **V**

Visualização 14, 117, 145, 146, 148, 149, 150, 152

## **W**

Web Currículo 13, 134, 135, 137, 143

## **Y**

YouTube 12, 108, 109, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática