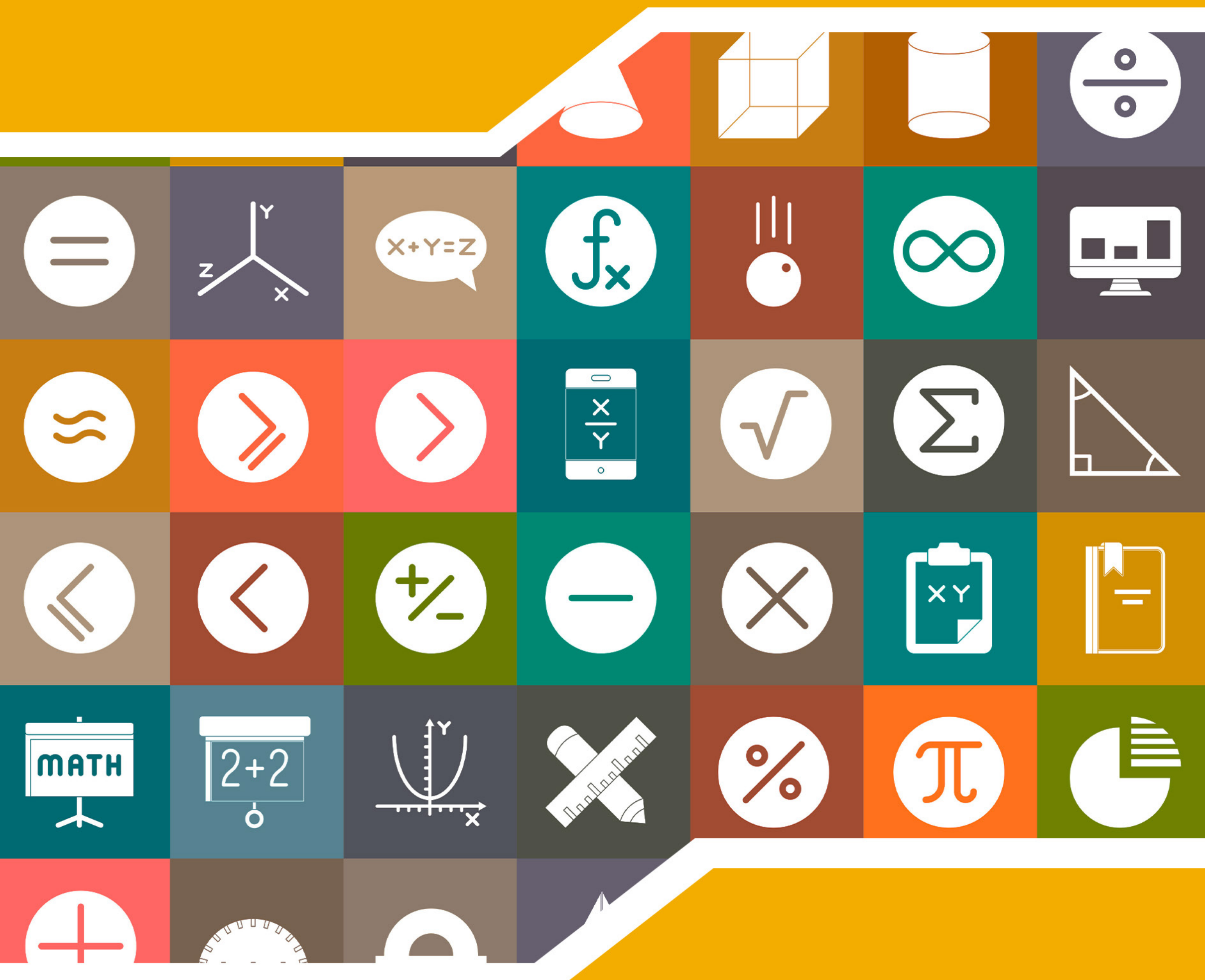
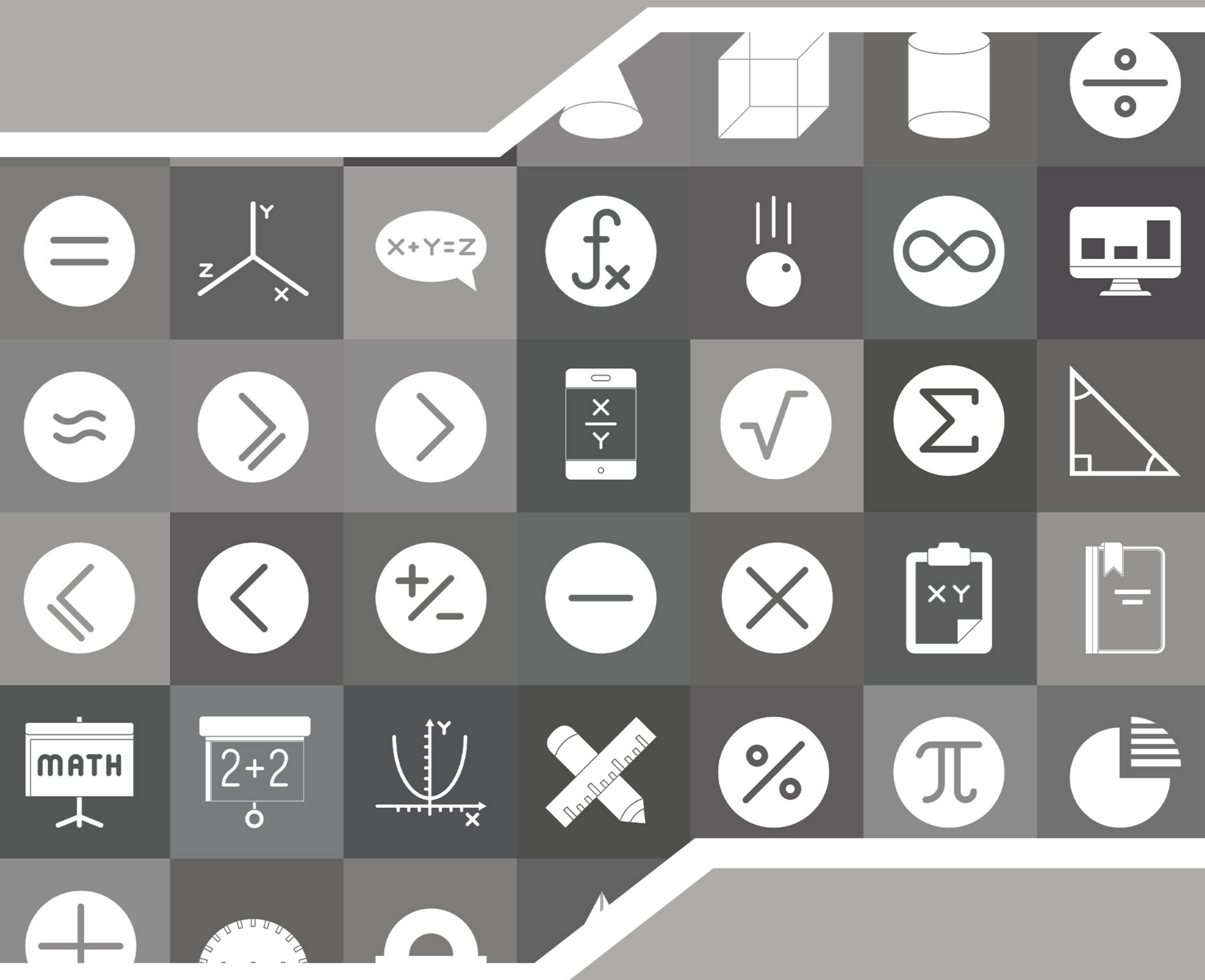
Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena
Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecário
Maurício Amormino Júnior
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Karine de Lima Wisniewski
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena
Editora
Ano 2020

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior
Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-362-0
DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro “***Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas***”, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 10/08/2020

Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/8760711618082326

Vinícius Lemos dos Santos
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/7078896706991199

RESUMO: O presente trabalho apresenta, como enfoque principal, o estudo introdutório da teoria moderna da transformada de Fourier, com o uso do espaço de funções de Schwartz (S) integráveis à Riemann, agregando simetria ao operador transformada, ou seja, tornando-o bijetivo. A abordagem metodológica utilizada foi constituída por pesquisas bibliográficas baseadas em títulos como: “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, “Introdução à Análise Funcional”, e dissertações como “O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii”, além de encontros semanais entre orientando e orientador para discutir os conceitos aqui apresentados. A partir das pesquisas, pôde-se concluir que as funções do espaço das funções integráveis e absolutamente integráveis à Riemann na reta ($\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) sempre possuem transformada de Fourier, entretanto, este não é apropriado para oferecer simetria ao operador transformada, sendo necessário introduzir um novo espaço de funções, o espaço de Schwartz, para que o problema da simetria do operador seja resolvido.

PALAVRAS-CHAVE: Transformada de Fourier, Espaço de Schwartz.

AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF FOURIER TRANSFORMS

ABSTRACT: The present work presentes, as main focus, the introductory study of the modern theory of the Fourier Transform, using the Schwartz function space (S) integrable to Riemann, adding symmetry to the transform operator, that is, making it bijective. The methodological approach used was made up of bibliographic research based on titles such as: “Fourier Analysis and Partial Differential Equations”, “Introduction to Functional Analysis”, and dissertations such as “The Cauchy Problem for the Gross-Pitaevskii System”, in addition to weekly meetings between student and professor to discuss the concepts presented here. From the research, it was concluded that the functions of space of integrable and absolutely integrable functions to Riemann on the Real set ($\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) always have Fourier Transform, however, this is not appropriate to offer symmetry to the transform operator, being ir necessary to introduce a new function space, the Schwartz space, so that the problem of symmetry is solved.

KEYWORDS: Fourier Transform, Schwartz Space.

1 I INTRODUÇÃO

Ainda sem deixar claro o espaço de funções a ser utilizado, definir-se-á a transformada de Fourier, de forma geral, para uma função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, como operador $\mathcal{F}$ aplicado à f da seguinte forma:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Observe que, ao aplicar o operador transformada $\mathcal{F}$ na função f, o resultado deixa de ficar em função da variável x, passando a ficar em função da variável ξ. Mas, por praticidade, algumas vezes usaremos a notação $\mathcal{F}\,[f(x)]$ ou somente $\mathcal{F}\,[f]$, caso não haja problema no entendimento.

Como exemplo, calculemos a transformada de Fourier da seguinte função (ainda sem preocupações sobre existência da transformada da Fourier):

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq 1; \\ x, & se \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Pelo fato da função se anular fora do intervalo [-1,1], a integral imprópria (1) da definição de transformada se resumirá na integral definida

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}.(1)dx.$$

Calculando a integral, obtemos como resultado

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}.(1)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-i\xi} \left(e^{-i\xi} - e^{i\xi} \right) \right) = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}(i\xi)} (-2isen\, \xi),$$

onde, na última igualdade, usamos a identidade trigonométrica do seno complexo: $sen\,\xi = {}^{(e^{i\xi} - e^{-i\xi})}/_{2i}$. Concluímos que a transformada de Fourier da função *u(x)* é

$$\mathcal{F}[u](\xi) = {}^{2sen\,\xi}/_{\xi\sqrt{2\pi}}\,. \qquad (2)$$

Neste caso notemos em (2) que, para qualquer ξ ϵ ℝ, o cálculo da integral imprópria resulta em um número real, que é o valor da transformada de Fourier (lembrar que $sen\,\xi \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$). Porém, nem sempre é possível chegar a um número real no cálculo da transformada, pois, como se pode ver na definição (1), o segundo membro da igualdade possui uma integral imprópria com respeito à x, e que pode ser convergente ou divergente. Vejamos o exemplo:

$$f(x) = \frac{e^{i\xi x}}{x},$$

cuja expressão da transformada de Fourier fica

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\xi x}}{x} \right) dx.$$

O cálculo da integral imprópria nos leva a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ que é divergente; uma evidência disto é que, para todo $a > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln a)$$

onde o limite do segundo membro é divergente. Logo, a transformada de Fourier da função $f(x) = {e^{i\xi x}}/{x}$ não é finita (não resulta em número real, qualquer que seja ξ). Nesta situação, dizemos que a transformada de Fourier $\mathcal{F}\,[f]$ não existe!

Portanto, para um estudo de transformada de Fourier, existe e é evidente a necessidade de se verificar para quais classes de funções a integral imprópria em (1) é convergente. E esta verificação resume-se, de maneira geral, a encontrar um espaço de funções do qual f seja elemento, para que tenhamos a convergência desejada. Este trabalho tem o intuito de fazer uma verificação e análise do espaço de funções ideal para construir uma sólida teoria de transformada de Fourier, a fim de possibilitar gerar uma excelente ferramenta auxiliar na resolução de problemas, por exemplo, com equações diferenciais. Na nossa pesquisa bibliográfica, o livro Figueiredo (2003) foi a referência que norteou boa parte do nosso estudo, principalmente no que diz respeito à teoria de transformada de Fourier propriamente dita, embora outras referências tenham tido papel imprescindível: o livro Botelho, Pellegrino, Teixeira (2012) foi nos auxiliou na introdução de definições e propriedades de espaços de funções, fundamentais para este trabalho; a dissertação de Cardoso (2005) nos ajudou, de forma mais específica, na compreensão de conceitos e resultados principalmente no que diz respeito aos espaços $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e de Schwartz ($\mathcal{S}$). Os livros Guidorizzi (1986), Lima (2007) e Bartle (1983) serviram como referências para eventuais dúvidas conceituais sobre cálculo diferencial e integral e Análise Real.

Iniciemos nossa análise com o espaço de funções mais básico para se garantir a convergência da integral em (1), o espaço das funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis e absolutamente integráveis (à Riemann) na reta, nominado $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou seja, são válidas as condições

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Observação 1: Trabalharemos com integrais de Riemann, embora esta teoria possa ser desenvolvida e estudada com funções integráveis à Lebesgue (vide, por exemplo, a referência Rivera (2004).

Observação 2: Pode-se trabalhar com um espaço mais “básico” ainda, o espaço das funções que são seccionalmente contínuas em cada intervalo [*a,b*] e absolutamente integrável na reta. Mas esta condição é mais restritiva, e preferimos iniciar analisando com o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, garantindo assim propriedades mais interessantes e abrangendo um número maior de funções.

Observação 3: O conjunto $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ é chamado de “espaço”, referindo-se ao fato deste conjunto ser um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Um resultado importante é a seguinte “desigualdade triangular” para integrais impróprias,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \qquad (3)$$

e que, por conseguinte, garante que f pertença a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, a função $|f|$ também pertença.

Tanto esta desigualdade quanto a proposição a seguir, que normalmente são feitas para funções reais, também são válidas para funções a valores complexos, isto é, para aplicações do tipo $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ em que se considera $f(x) = u(x) + iv(x)$, com u e v funções $u,v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (parte real e parte imaginária, respectivamente). Neste caso, se $u(x)$, $v(x)$ e $|f(x)|$ são funções de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então concluímos que $f(x) = u(x) + iv(x)$ também pertence a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

A proposição a seguir garante a existência da transformada de Fourier para funções no espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Proposição 1: Toda função f do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tem transformada de Fourier.

Demonstração: Para f uma função arbitrária do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, precisamos garantir a convergência da integral imprópria (1). Para isso, analisemos a convergência absoluta da integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x}\right| . \left|f(x)\right| dx.$$

Uma vez que $e^{-i\xi x} = \cos \xi x - i\ sen\ \xi x$, então $\left|e^{-i\xi x}\right| = \sqrt{\cos^2 \xi x + sen^2\ \xi x} = 1$, e por isso, resumimos a situação em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

esta última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Portanto, a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx$ converge (absolutamente), o que implica na convergência (simples) de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$, ou seja, existe a transformada de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ■

Definindo a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ **sobre o espaço** $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, obtemos algumas propriedades interessantes:

- $\mathcal{F}[f]$ é uma função contínua (continuidade da transformada);
- $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0$, ou seja, $\mathcal{F}[f](\xi)$ tende a zero no infinito.

As demonstrações destas propriedades exigem conhecimento de Análise Matemática fora do escopo deste trabalho (como Lema de Riemann e Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue), mas as provas podem ser encontradas no livro Dyke (2001, p. 140). Agora, o próximo resultado podemos demonstrar e nos será útil:

Proposição 2: Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então a transformada $\mathcal{F}[f](\xi)$ é função limitada.

Demonstração: Usando a desigualdade (3) e que $\left|e^{-i\xi x}\right| = 1$, basta fazer a conta

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}|.\,|f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

a última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Portanto, existe um real positivo *M*, tal que $|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq M$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar. ■

2 | PROBLEMÁTICA: ASSIMETRIA DO OPERADOR $\mathcal{F}$ UTILIZANDO O ESPAÇO $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

A proposição a seguir apresenta uma prova da assimetria do operador $\mathcal{F}$ se definido sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ indicando que se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, não necessariamente a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ igualmente será.

Proposição 3 (Assimetria de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$): $\mathcal{F}$ é uma transformação assimétrica para funções do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ou seja, a imagem da transformação sobre funções em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nem sempre é uma função $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Ela será feita por contraexemplo. Já vimos em (2) que a transformada de Fourier de

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq 1, \\ x, & se \quad |x| > 1, \end{cases}$$

é dada por $\mathcal{F}[u](\xi) = {}^{2sen\,\xi}\Big/_{\xi\sqrt{2\pi}}$.. Contudo, neste caso, esta função transformada não pertence ao espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Isto porque, quando analisamos se a função $\mathcal{F}[u](\xi)$ é absolutamente integrável (em relação a ξ), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2sen\,\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}\right|d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{1}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi + \int_{1}^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi\right).$$

Trabalhemos em particular a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi$ (pois a análise da outra integral se dá de forma análoga): uma vez que $|\,sen\,\xi\,| \leq 1$, que implica que $sen^2\,\xi \leq |\,sen\,\xi\,|$ então para todo $\xi \geq 1$

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|\,d\xi \geq \int_1^{+\infty}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi$$

e aplicando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\int_1^t\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi \;=\; -\frac{sen\,2t}{4t} + \frac{sen\,2}{4} + \int_1^t\left(\frac{1}{2\xi} - \frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right)d\xi\,.$$

Passando ao limite e verificando as parcelas:

- A parcela $(sen\,2)/_4$ é uma constante e usando o limite fundamental da trigonometria obtemos $\lim_{t\to+\infty}\frac{-sen\,2t}{4t} = 0.$
- A primeira parcela da integral fica

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\xi}d\xi = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{2\xi}d\xi = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty\,.$$

Portanto, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\xi}d\xi$ é divergente.

- A última parcela é absolutamente convergente. Basta verificar que

$$\left|\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right| \leq \frac{1}{4\xi^2},$$

enquanto que a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\frac{1}{4\xi^2}d\xi$ é reconhecidamente convergente. Usando o teste de comparação para integrais impróprias, concluímos que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right|d\xi$ é convergente, o que implica na convergência de $\int_1^{+\infty}\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}d\xi$.

Diante do exposto, conclui-se que a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi$ é divergente, e usando novamente o teste da comparação, resulta que $\int_1^{+\infty}\frac{|sen\,\xi|}{|\xi|}d\xi$ diverge.

Portanto, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{F}[f](\xi)|\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2sen\,\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}\right|d\xi$$

diverge, e por isso, temos um exemplo de transformada $\mathcal{F}\,[f]\,(\xi)$ que não é função do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ■

Percebe-se assim uma deficiência preponderante em se trabalhar transformada de Fourier sobre o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, o que impossibilitaria trabalhar com a inversibilidade do operador transformada, indispensável na resolução de equações diferenciais.

A solução está em se definir a transformada em um espaço vetorial mais restritivo, de preferência dentro do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a fim de não perder as propriedades obtidas com ele, mas que também resolva o problema da assimetria do operador.

3 I SOLUÇÃO DO PROBLEMA: O ESPAÇO DE SCHWARTZ (S)

Diz-se que um função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço S – chamado **espaço de Schwartz**, se f for infinitamente (continuamente) diferenciável e se, para cada inteiro $m,n \in S$, tais que $m,n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup|x^m D^n f(x)| < +\infty \tag{4}$$

onde $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ denota o operador diferencial de ordem n. O espaço S é chamado também de espaço das funções com decrescimento rápido, isto porque, a condição (4) implica que

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0, \tag{5}$$

o que significa que as funções em S (e suas derivadas) tendem mais rápido para zero, quando $|x|$ tende para infinito, do que as potências x^m vão para o infinito. De fato, basta observar que, se vale (4) para todo $m,n > 0$ então é válido para m+1,n>0, ou seja, existe o número real M>0 tal que

$$|x^{m+1} D^n f(x)| \leq M$$

e usando propriedade de módulo, para todo $|x| > 0$, temos

$$|x|.|x^m D^n f(x)| \leq M \Rightarrow |x^m D^n f(x)| \leq \frac{M}{|x|}.$$

Fazendo $|x| \longrightarrow +\infty$(ou $\frac{1}{|x|} \longrightarrow 0$) e aplicando o teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0.$$

A recíproca, (5) implicando em (4), também é válida, mostrando que, na verdade, ambas as condições são equivalentes e podem definir o conjunto S.

Vejamos algumas notáveis propriedades do conjunto de funções em S:

Proposição 4: Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é função do espaço S, então a função da forma $x^m D^n f \in S$.

Demonstração: Suponha $f(x)$ função de S. Para cada inteiro $m,n > 0$ (arbitrários), chamemos de $g(x) = x^m D^n f$; queremos mostrar que $g \in S$.

Primeiro observemos que $f(x)$ é infinitamente diferenciável, então que $D^n f(x)$ obviamente também é, e segue que o produto de duas funções infinitamente diferenciável x^m e $D^n f$ o é. Precisamos mostrar a existência do supremo de $|x^p D^k g(x)|$, para todo *p, k* > 0 inteiros. Façamos o cálculo da 1ª derivada:

$$D\big(g(x)\big) = mx^{m-1}D^n f(x) + x^m D^{n+1} f(x);$$

a 2ª derivada fica:

$$D^2 g(x) = m(m-1)x^{m-2}D^n f(x) + mx^{m-1}D^{n+1}f(x) + m(m-1)D^{n+1}f(x)$$

$$+x^m D^{n+2} f(x).$$

Se prosseguirmos com o processo de derivação, é fácil observar que todas as parcelas da derivada *k*-ésima de $g(x)$ obtidas são da forma

$$c(m)x^i D^j f(x)$$

com $i = 1,\ldots, m$ e $j = n,\ldots, k$ e $c(m)$constante real positiva não nula dependendo de m.

Como $f \in S$, então para todo inteiro $m,n > 0$, existe um real $M > 0$ (dependendo de m,n) em que $|x^m D^n f| \leq M$, o que implica que,

- fazendo $m = i$ e $n = 0$, $|x^i| \leq M_i$
- fazendo $m = 0$ e $n = j$, $|D^j f(x)| \leq M_j$

Portanto cada parcela das derivadas de $g(x)$ será limitada pois

$$\left|c(m)x^i D^j f(x)\right| \leq c(m)\left|x^i\right| \cdot \left|D^j f(x)\right| \leq c(m)M_i M_j$$

e por consequência, toda *k* -ésima derivada de $g(x)$ é limitada: existe real M_k, tal que $|D^k g(x)| \leq M_k$ para todo inteiro $k > 0$.

Segue então que, de maneira geral, para todo inteiros positivos, existem *M*, *N* > 0 reais tais que

$$|x^p D^k g(x)| = |x^p| \cdot |D^k g(x)| \leq N \cdot M$$

o que nos resulta que

$$\sup|x^p D^k g(x)| < +\infty,$$

culminando que toda função $x^m D^n f(x) \in S$, sempre que $f \in S$. ■

A proposição a seguir justifica o motivo de chamarmos S de "espaço".

Proposição 5: S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que o conjunto S é subconjunto de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se $f \in S$, então é contínua em $\mathbb{R}$, por ser infinitamente diferenciável e, logo, será contínua em cada intervalo fechado $[M,N]$, e além do mais, f é limitada, garantindo-nos a integrabilidade de f em cada $[M,N]$, e por consequência, integrabilidade de $|f|$ em $[M,N]$.

Resta-nos provar que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ é convergente. Quebrando a integral nas parcelas $\int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx + \int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx$, analisemos cada uma:

- f é limitada em $[-1,1]$, então é integrável e por isso $\int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx < +\infty$;
- como $f \in S$, usando a condição (4) para $m = 2$, $n = 0$, temos para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular para $|x| \geq 1$ e integrando em ambos lados em relação a x, obtemos

$$\int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx \leq M \int_{|x|\geq 1} |x|^{-2}\, dx \leq M \int_{|x|\geq 1} 1\, dx = M < +\infty$$

Concluímos então que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ e, portanto, $f \in S$. Além disso,

(i) $f \equiv 0$ implica diretamente que $\sup |x^m D^n(0)| < +\infty$. Logo $0 \in S$

(ii) para $f, g \in S$, temos, para todo $m,n > 0$ inteiros, $\sup |x^m D^n (f+g)(x)| \leq \sup |x^m D^n f(x)| + \sup |x^m D^n g(x)| < +\infty$. Assim, $f + g \in S$;

(iii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$, $\sup |x^m D^n (\alpha f(x))| = \alpha \sup |x^m D^n (f(x))| < +\infty$.

Logo $\alpha f(x) \in S$, finalizando assim a demonstração de que S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1\mathbb{R}$. ■

O resultado seguinte justifica o fato de a transformada de Fourier, sobre o espaço S, ser infinitamente diferenciável e, ainda, oferece-nos uma fórmula para calcular derivadas de transformada.

Proposição 6: Se $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é função de S, então a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](\xi)$ será infinitamente diferenciável, e, para n inteiro positivo,

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi).$$

Demonstração: esta prova é feita por indução. Porém, precisamos primeiro garantir a diferenciabilidade de primeira ordem e, para isso, usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em Bartle (1983, p. 248):

Lema: Seja função contínua $(\xi, x) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \phi(\xi, x) \in \mathbb{R}$, I intervalo real, possuindo derivada parcial $\emptyset_\xi$ contínua e suponha que a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x) dx$

convirja uniformemente em ℝ. Então G é derivável em ℝ e $G'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\xi(\xi, x)dx$.

Este lema nos dará embasamento para provar a diferenciabilidade da função $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$, desde que ela *convirja uniformemente* (dizemos que $\int_a^{+\infty} \phi(\xi, x)dx$ converge uniformemente se, $\forall\varepsilon > 0$, existir $x > \alpha$ tal que $\left|\int_x^{+\infty} \phi(\xi, x)dx\right| < \varepsilon$, para todo $x \in I$). E, de fato, chegamos indiretamente a convergência uniforme de $\mathcal{F}[f](\xi)$, obtida através do

Teste M de Weierstrass: Se, para cada ξ, a função $x \mapsto \phi(\xi, x)$ for $\mathcal{L}^1$ em ℝ e existir função integrável M: ℝ ⟶ ℝ integrável, tal que $|\phi(\xi, x)| \leq M(x), \forall\xi \in I$, então a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x)dx$ converge uniformemente.

Este teorema e demonstração podem ser consultados em Bartle (1983, p. 245).

Prosseguindo na demonstração da Proposição 6, reunimos a seguinte situação para $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$: considerando $\phi(\xi, x) = e^{-i\xi x} f(x)$, temos $\phi(\xi, x)$ contínua (produto de funções contínuas $e^{-i\xi x}$ e $f(x)$) e a derivada $\phi_\xi = (-i\,x)e^{-i\xi x} f(x)$ existe e é contínua; além disso, como

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi, x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}|.|f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, lembrando que $\left|e^{-i\xi x}\right| = 1$. Portanto, $\Phi\ (\xi, x)\ \in\ \mathcal{L}^1$ em ℝ;
- $|\phi(\xi, x)| = \left|e^{-i\xi x}\right|.|f(x)| = |f(x)|$, ou seja, $\Phi\ (\xi, x)$ é limitada, para todo ξ є I pela função integrável $|f(x)|$.

Logo, pelo teste M de Weierstrass, $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$ converge uniformemente; pelas verificações expostas acima, $\mathcal{F}[f](\xi)$ se enquadra nas hipóteses do Lema de diferenciabilidade de integrais impróprias, garantindo assim a existência da derivada $\mathcal{F}'[f](\xi)$, dada por

$$\mathcal{F}'[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi}(e^{-i\xi x} f(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)e^{-i\xi x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}[(-ix)f(x)]dx = \mathcal{F}[(-ix)f](\xi).$$

Depois do primeiro passo, supomos agora valer a fórmula de diferenciabilidade de $\mathcal{F}$ para n: $\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi)$ e mostraremos que vale para n +1. De fato,

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\mathcal{F}[f] = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f]\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi)\right) = \mathcal{F}[(-ix)^{n+1} f](\xi),$$

como queríamos mostrar. Portanto, $\mathcal{F}[f](\xi)$ é infinitamente derivável. ■

A proposição a seguir é um valoroso resultado, que mostra a característica da transformada de Fourier de eliminar derivadas de uma função de S:

Proposição 7: Se $f \in S$, então, para n natural diferente de zero,

$$\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi).$$

Demonstração: Provaremos novamente por indução. Verifiquemos a condição para n = 1, primeiramente: usando integração por partes, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int e^{-i\xi x} f'(x)\, dx = e^{-ix\xi} f(x) + i\xi \int e^{-i\xi x} f(x)\, dx,$$

que nos ajudará a determinar a transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x)\, dx = e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Analisando o limite do segundo membro: $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{0} + e^{-i\xi x} f(x)]_{0}^{+\infty}$ temos

- $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{0} = f(0) - \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(e^{-i\xi t} f(t)\right) = f(0) - 0 = f(0)$, lembrando que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-i\xi t} = 0$ e f (t) limitada (pois $f \in S$).
- $e^{-i\xi x} f(x)]_{0}^{+\infty} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(e^{-i\xi t} f(t)\right) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0)$.

Assim, $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = f(0) + \left(-f(0)\right)$ e o cálculo da transformada de $\mathcal{F}$ [$D f$] (ξ)resulta em:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = 0 + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = i\xi \mathcal{F}[f](\xi),$$

ou seja,

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi). \tag{6}$$

Agora, supondo a igualdade valer para n, $\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$, vamos mostrar que é válida também para n+1. Observe que

$$\mathcal{F}[D^{n+1} f](\xi) = \mathcal{F}[D^n (Df)](\xi)$$

e usando a hipótese de indução sobre a função de Schwartz $D f(x)$, temos

$$\mathcal{F}[D^n (Df)](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi).$$

Como provamos valer (6) para n =1, concluímos que

$$(i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi) = (i\xi)^n \left(i\xi \mathcal{F}[f](\xi)\right) = (i\xi)^{n+1} \mathcal{F}[f](\xi).$$

Portanto, $\mathcal{F}[D^{n+1}f](\xi) = (i\xi)^{n+1}\mathcal{F}[f](\xi)$, finalizando a prova por indução.

O seguinte teorema é o ponto central do trabalho, visto que garante a almejada simetria do operador transformada $\mathcal{F}$, se definido sobre o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$.

Teorema 1: A transformada de Fourier é um operador linear simétrico, definido por $\mathcal{F}:\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$.

Demonstração: Com α ϵ ℝ e f, g ϵ $\mathcal{S}$ e usando propriedades de integral imprópria, observe que

$$\mathcal{F}[\alpha f + g](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\big(\alpha f(x) + g(x)\big)\, dx$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g(x)\, dx = \alpha\mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[g](\xi),$$

provando assim ser linear o operador transformada $\mathcal{F}$. Para mostrar $\mathcal{F}$ simétrico sobre $\mathcal{S}$, precisamos provar $\mathcal{F}\,[f]$ (ξ) ser função de $\mathcal{S}$. Constatemos primeiro que, da Proposição 6, $\mathcal{F}\,[f]$ (ξ) é infinitamente diferenciável e

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) = \xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

para cada n inteiro positivo não nulo. Usaremos a fórmula da transformada de derivada de f obtida na Proposição 7, mas primeiro ajeitaremos a expressão

$$\xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = \xi^m (i^m \cdot i^{-m})\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = i^{-m}(\xi^m i^m)\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

podemos aplicar agora a fórmula, sabendo que $i^{-m} = (-i)^m$,

$$i^{-m}(\xi^m i^m)\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = -(i^m)\mathcal{F}[D^m(-ix)^n f](\xi) = \mathcal{F}[(-i^m)D^m(-ix)^n f](\xi).$$

Como a derivada m-ésima de $f(x)$ é linear, então $(-i^m)\, D^m\, (-ix)^n f(x) = i^{m+n} D^m (x)^n f(x)$ é função do espaço $\mathcal{S}$ (devido a Proposição 4), e por consequência, é também função do espaço $\mathcal{L}^1$(ℝ) (Proposição 5). Mostramos que uma das propriedades do espaço $\mathcal{L}^1$(ℝ) é que se f ϵ $\mathcal{L}^1$(ℝ), então $\mathcal{F}\,[f]$(ξ) é limitada (Proposição 2). Usamos este fato para garantir que $\mathcal{F}\,[(-i^m)D^m(-ix)^n f\,]$(ξ) seja limitada, e consequentemente, a função $\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big)$, que atende

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) = \mathcal{F}[(-i^m)D^m(-ix)^n f](\xi),$$

é função limitada. Assim, é finito o supremo

$$\sup_{\xi \epsilon \mathbb{R}} \left| \xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) \right| < +\infty,$$

para cada $m,n > 0$ inteiros positivos, garantindo assim que $\mathcal{F}\ [f](\xi)$, infinitamente diferenciável, seja função do espaço de Schwartz $\mathcal{S}$. ■

4 I CONCLUSÕES: BIJETIVIDADE E INVERSÃO DA TRANSFORMADA

O teorema 1 é de suma importância para o estudo da transformada de Fourier, uma vez que a simetria alcançada de $\mathcal{F}$, definido sobre os espaços de Schwartz $\mathcal{S}$, possibilita a bijetividade deste operador, como veremos a seguir, bem como a existência da inversibilidade de $\mathcal{F}$. Mas, para comprovarmos tais qualidades decorrentes, precisamos de um "canditato" a operador inverso. Vamos definir o operador T: $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ como sendo

$$T[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f(s)\, ds, \qquad (7)$$

para qualquer função $f \in \mathcal{S}$. Pode-se demonstrar que

Proposição 8: Se f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função em $\mathcal{S}$ com sua transformada de Fourier $\mathcal{F}\ [f](\xi) = \mathcal{F}(\xi)$ (podemos usar esta notação de transformada, quando for conveniente), então $f\ (x)$ pode ser escrito como

$$f(x) = T[\mathcal{F}(\xi)](x), \qquad (8)$$

isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi)\, d\xi.$$

Esta demonstração será omitida, por exigir conhecimentos fora dos nossos objetivos, mas pode ser encontrada em Figueiredo (2003, p. 204). Podemos agora demonstrar nossas duas conclusões terminais:

Conclusão 1 (Bijetividade): A transformada de Fourier é um operador bijetivo.

Demonstração: Primeiro, será demonstrada a injetividade do operador: sejam f_1, $f_2 \in \mathcal{S}$, tais que $\mathcal{F}\ [f_1](\xi) = \mathcal{F}\ [f_2](\xi)$. Basta aplicar o operador T na igualdade e usar a relação (8) da Proposição 8 para obter, de forma direta, que $T\,[\mathcal{F}[f_1](\xi)](x) = T\,[\mathcal{F}[f_2](\xi)](x) \Rightarrow f_1 = f_2$.

Para se demonstrar a sobrejetividade, devemos tomar $\mathcal{G}(\xi)$ função em $\mathcal{S}$ (contradomínio de $\mathcal{F}$) arbitrário e provar que existe $g(x)$ em $\mathcal{S}$ (domínio de $\mathcal{F}$) tal que $\mathcal{F}[g](\xi)=\mathcal{G}(\xi)$. Para isso, basta tomar $g(x) = T\,[\mathcal{G}(\xi)](x)$, ou seja, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\mathcal{G}(\xi)\, d\xi$, e, usando esta última igualdade e sabendo que $i\xi x=(-i)\xi(-x)$,

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i)s(-x)} f(s)\, ds \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} (\mathcal{F}[\mathcal{G}](-x)) dx.$$

Usando a integração por substituição nesta última, fazendo $-x = u$, $dx = du$, e os limites da integração imprópria invertidos, obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} \mathcal{F}[\mathcal{G}](-x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\xi(u)} \mathcal{F}[\mathcal{G}](u)\, (-du)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(u)} \big(\mathcal{F}[\mathcal{G}](u)\big)\, du = T\big[\mathcal{F}[\mathcal{G}]\big](\xi)$$

e usando novamente (8), temos $T\,[\mathcal{F}\,[\mathcal{G}]](\xi) = \mathcal{G}(\xi)$ Desta forma, mostramos que $\mathcal{F}\,[g](\xi) = \mathcal{G}(\xi)$, e $\mathcal{F}$ é operador sebrejetivo e, portanto, bijetivo. ■

Conclusão 2 (*T* transformada inversa de Fourier): A bijetividade do operador transformada implica na existência de operador inverso. Da Proposição 8, conclui-se diretamente que $(T \circ \mathcal{F})(f) = T\,[\mathcal{F}\,[f]] = f$. Além disso, devido na prova da sobrejetividade de $\mathcal{F}$ e usando (8), para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$, existe $g \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{F}\,[g]$ implicando que $(\mathcal{F} \circ T)(\mathcal{G}) = \mathcal{F}\,[T\,[\mathcal{G}]] = \mathcal{F}\,[g] = \mathcal{G}$. Assim concluímos que o operador T, definido em (7), é o inverso da transformada de Fourier definida em (1). ■

Desta forma, o fato de o operador transformada definido em $\mathcal{S}$ ser bijetivo e, portanto, possuir inversa, é a chave indispensável para aplicações de transformada de Fourier na resolução de equações diferenciais. Estes são objetivos futuros das nossas pesquisas.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **Elementos da Análise Real**. Tradução: Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 1983. Título original: The Elements of Real Analysis.

BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. **Fundamentos da Análise Funcional.** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

CARDOSO, D. C. **Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaeviskii.** 2005. Tese (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2005.

DYKE, P. P. G. **An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series**. London: Springer, 2001.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: Edgard Blücher, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1986. v. 2.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2007. v. 1.

RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. 1. ed. Petrópolis, RJ: LNCC, 2004.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

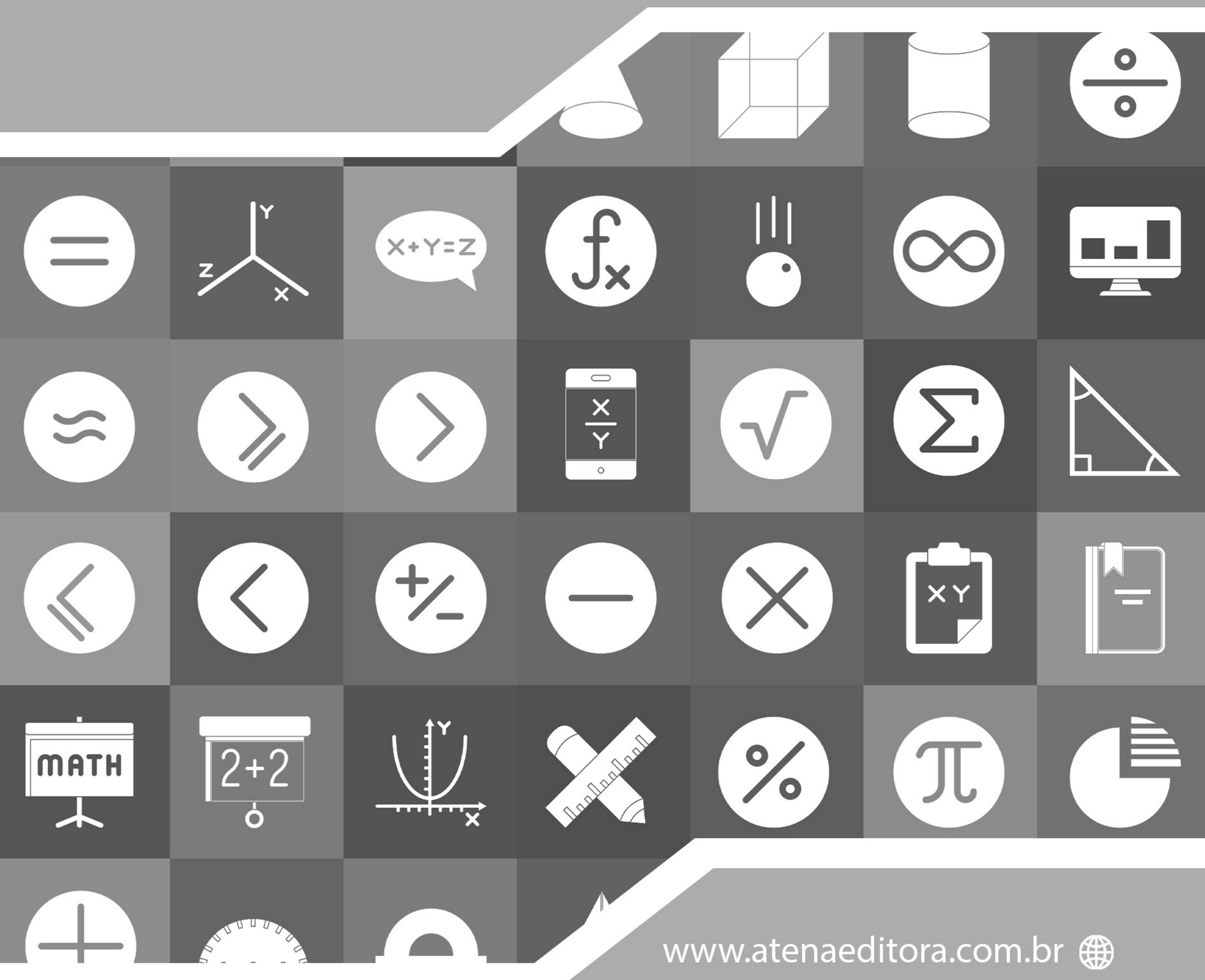
C

D

E

F

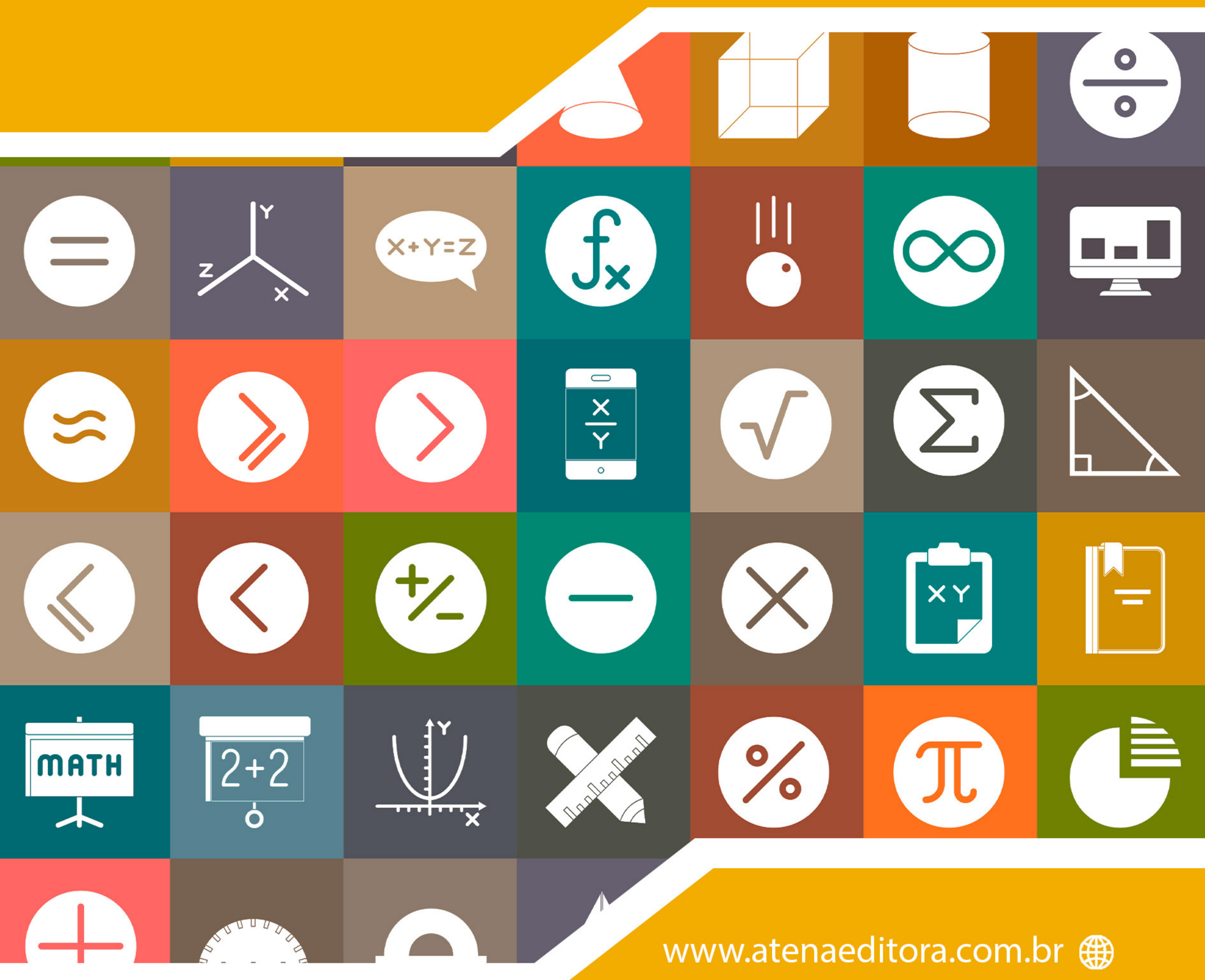
Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020