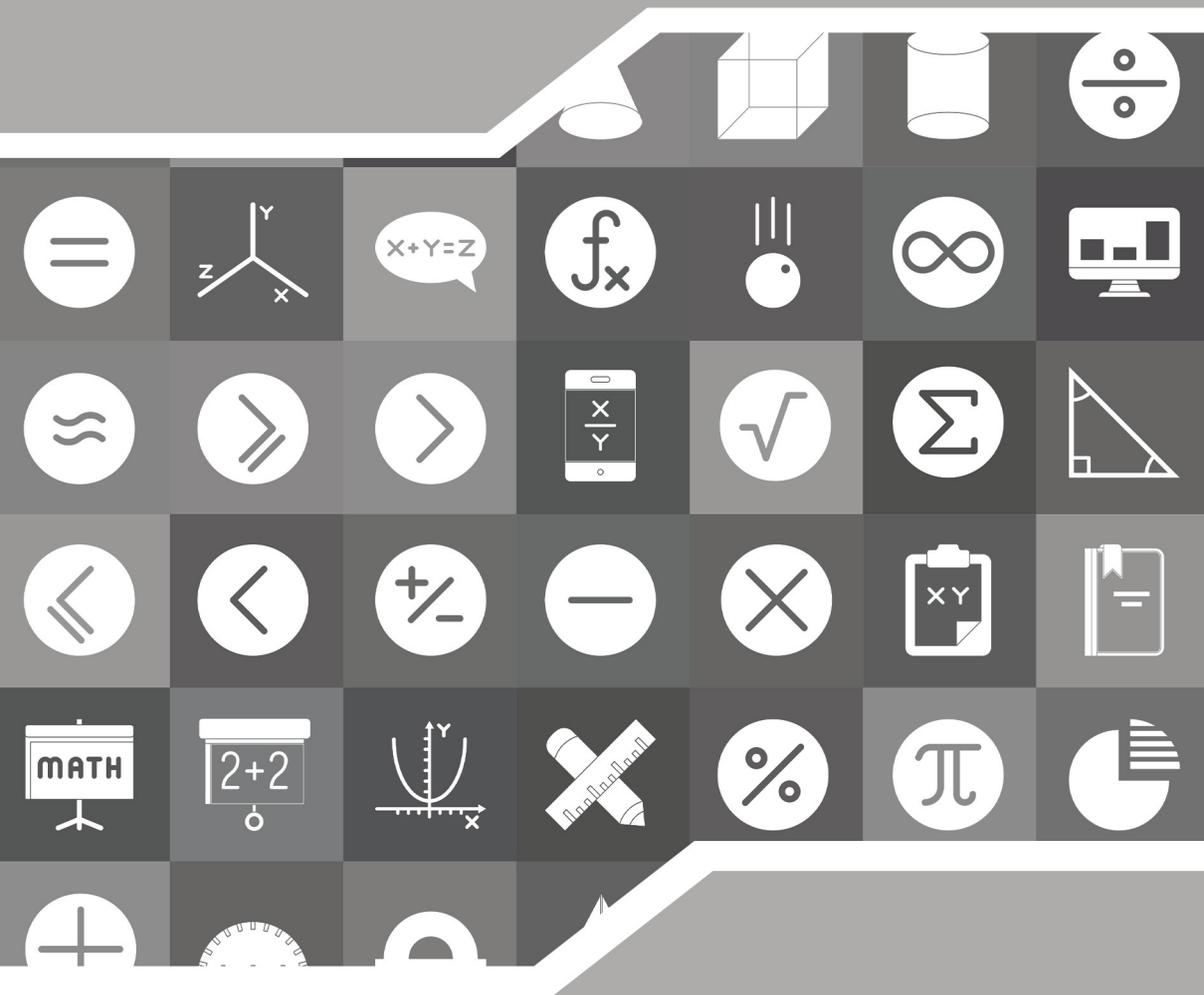


Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecário

Maurício Amormino Júnior

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Karine de Lima Wisniewski

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Andrezza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-362-0

DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro **“Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas”**, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
JOGOS DIGITAIS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	
Valdinei Cezar Cardoso	
Ana Paula Santos Pereira	
Arina de Jesus Rozario	
Camila Muniz de Oliveira	
Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior	
DOI 10.22533/at.ed.6202008091	
CAPÍTULO 2	15
OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NO COTIDIANO DA FEIRA LIVRE: UMA INVESTIGAÇÃO FEITA PELOS ALUNOS DA EJA	
Tacio Vitaliano da Silva	
Francisca Vandilma Costa	
DOI 10.22533/at.ed.6202008092	
CAPÍTULO 3	23
O PENSAMENTO COMPUTACIONAL COMO ESTRATÉGIA DE REFORÇO DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO MENTAL	
Julio Cezar Romero	
Juliano Schimiguel	
DOI 10.22533/at.ed.6202008093	
CAPÍTULO 4	35
UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER	
Marcel Lucas Picanço Nascimento	
Vinícius Lemos dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.6202008094	
CAPÍTULO 5	50
EL USO DE GEOGEBRA PARA VISUALIZAR FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES	
Cesar Martínez Hernández	
Rodolfo Rangel Alcántar	
DOI 10.22533/at.ed.6202008095	
CAPÍTULO 6	62
A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE	
Onofre Alves Simões	
DOI 10.22533/at.ed.6202008096	
CAPÍTULO 7	75
O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA	
Jonathan Bregochi Delmondes	

Roseni Aparecida Pereira de Macedo

DOI 10.22533/at.ed.6202008097

CAPÍTULO 8..... 87

OS TRILHOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Isabel Vale

Ana Barbosa

DOI 10.22533/at.ed.6202008098

CAPÍTULO 9..... 99

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Daniel Freitas Martins

Mehran Sabeti

Nicolly Ramalho Silva

DOI 10.22533/at.ed.6202008099

CAPÍTULO 10.....110

A DIVISÃO EM PARTES UTILIZADA NA PESCA ARTESANAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EMBASADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCÍTICA

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

DOI 10.22533/at.ed.62020080910

CAPÍTULO 11 126

TEOREMA DE CARNOT: UMA VALIDAÇÃO COM GEOMETRIA DINÂMICA

Giancarlo Secci de Souza Pereira

Cristiane Ruiz Gomes

Antônio Carlos Ferreira

Paulo Vilhena da Silva

DOI 10.22533/at.ed.62020080911

CAPÍTULO 12..... 138

OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERÍMETRO, ÁREA E PROPORCIONALIDADE DE POLÍGONOS VIA HOMOTETIA

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

DOI 10.22533/at.ed.62020080912

CAPÍTULO 13..... 152

UMA ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE BOÉCIO E DA OBRA *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* PARA A MATEMÁTICA

Francisco Aureliano Vidal

Márcio Alisson Leandro Costa

DOI 10.22533/at.ed.62020080913

CAPÍTULO 14.....	161
UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)	
Débora Gaspar Soares Márcio Rufino Silva	
DOI 10.22533/at.ed.62020080914	
CAPÍTULO 15.....	173
A REGRAS DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO <i>LIBER QUADRATORUM</i>	
Denivaldo Pantoja da Silva José dos Santos Guimarães Filho João Cláudio Brandemberg	
DOI 10.22533/at.ed.62020080915	
CAPÍTULO 16.....	187
AS CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA SALA DE AULA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Thaís Cristina Barros Machado	
DOI 10.22533/at.ed.62020080916	
CAPÍTULO 17.....	200
O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BRASILEIRAS	
Miriam Ferrazza Heck Carmen Teresa Kaiber	
DOI 10.22533/at.ed.62020080917	
CAPÍTULO 18.....	210
HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: RESULTADOS DO USO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO NA GRADUAÇÃO	
Jessie Heveny Saraiva Lima Miguel Chaquiam	
DOI 10.22533/at.ed.62020080918	
CAPÍTULO 19.....	224
A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR	
Keith Gabriella Flenik Moraes Angelita Minetto Araújo Tiago Skroch de Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.62020080919	
CAPÍTULO 20.....	240
O USO DE JOGOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS	
Ana Lorena Miranda Gomes	

Éllen Beatriz Araújo da Silva
Francisco das Chagas Ferreira Carvalho
Maria Iêda Rodrigues de Oliveira Silva
Wanderson de Oliveira Lima

DOI 10.22533/at.ed.62020080920

CAPÍTULO 21 245

ENSINO DE FATORAÇÃO: ALUNO APRENDENDO A FAZER MATEMÁTICA

Daniellen Costa Protazio
Cinara Damacena Cardoso
Aline Lorinho Rodrigues
Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante
Ashiley Sarmiento da Silva
Yara Julyana Rufino dos Santos Silva
Camila Americo Neri
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Odivânia Ferreira de Moraes
Izaías Silva Rodrigues
Priscila da Silva Santos
Cristiane Matos Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.62020080921

SOBRE OS ORGANIZADORES 252

ÍNDICE REMISSIVO 253

CAPÍTULO 4

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 10/08/2020

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/8760711618082326

Vinícius Lemos dos Santos

Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/7078896706991199

RESUMO: O presente trabalho apresenta, como enfoque principal, o estudo introdutório da teoria moderna da transformada de Fourier, com o uso do espaço de funções de Schwartz (S) integráveis à Riemann, agregando simetria ao operador transformada, ou seja, tornando-o bijetivo. A abordagem metodológica utilizada foi constituída por pesquisas bibliográficas baseadas em títulos como: “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, “Introdução à Análise Funcional”, e dissertações como “O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii”, além de encontros semanais entre orientando e orientador para discutir os conceitos aqui apresentados. A partir das pesquisas, pôde-se concluir que as funções do espaço das funções integráveis e absolutamente integráveis à Riemann na reta ($L^1(\mathbb{R})$) sempre possuem transformada de Fourier, entretanto, este não é apropriado para oferecer simetria ao operador transformada, sendo necessário introduzir um

novo espaço de funções, o espaço de Schwartz, para que o problema da simetria do operador seja resolvido.

PALAVRAS-CHAVE: Transformada de Fourier, Espaço de Schwartz.

AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF FOURIER TRANSFORMS

ABSTRACT: The present work presents, as main focus, the introductory study of the modern theory of the Fourier Transform, using the Schwartz function space (S) integrable to Riemann, adding symmetry to the transform operator, that is, making it bijective. The methodological approach used was made up of bibliographic research based on titles such as: “Fourier Analysis and Partial Differential Equations”, “Introduction to Functional Analysis”, and dissertations such as “The Cauchy Problem for the Gross-Pitaevskii System”, in addition to weekly meetings between student and professor to discuss the concepts presented here. From the research, it was concluded that the functions of space of integrable and absolutely integrable functions to Riemann on the Real set ($L^1(\mathbb{R})$) always have Fourier Transform, however, this is not appropriate to offer symmetry to the transform operator, being it necessary to introduce a new function space, the Schwartz space, so that the problem of symmetry is solved.

KEYWORDS: Fourier Transform, Schwartz Space.

1 | INTRODUÇÃO

Ainda sem deixar claro o espaço de funções a ser utilizado, definir-se-á a transformada de Fourier, de forma geral, para uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, como operador \mathcal{F} aplicado à f da seguinte forma:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (1)$$

Observe que, ao aplicar o operador transformada \mathcal{F} na função f , o resultado deixa de ficar em função da variável x , passando a ficar em função da variável ξ . Mas, por praticidade, algumas vezes usaremos a notação $\mathcal{F}[f(x)]$ ou somente $\mathcal{F}[f]$, caso não haja problema no entendimento.

Como exemplo, calculemos a transformada de Fourier da seguinte função (ainda sem preocupações sobre existência da transformada da Fourier):

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1; \\ x, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Pelo fato da função se anular fora do intervalo $[-1, 1]$, a integral imprópria (1) da definição de transformada se resumirá na integral definida

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} \cdot (1) dx.$$

Calculando a integral, obtemos como resultado

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} \cdot (1) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-i\xi} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}) \right) = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}(i\xi)} (-2i \operatorname{sen} \xi),$$

onde, na última igualdade, usamos a identidade trigonométrica do seno complexo: $\operatorname{sen} \xi = (e^{i\xi} - e^{-i\xi})/2i$. Concluímos que a transformada de Fourier da função $u(x)$ é

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{2 \operatorname{sen} \xi}{\xi \sqrt{2\pi}}. \quad (2)$$

Neste caso notemos em (2) que, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, o cálculo da integral imprópria resulta em um número real, que é o valor da transformada de Fourier (lembrar que $\operatorname{sen} \xi \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$). Porém, nem sempre é possível chegar a um número real no cálculo da transformada, pois, como se pode ver na definição (1), o segundo membro da igualdade possui uma integral imprópria com respeito à x , e que pode ser convergente ou divergente. Vejamos o exemplo:

$$f(x) = \frac{e^{i\xi x}}{x},$$

cuja expressão da transformada de Fourier fica

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\xi x}}{x} \right) dx.$$

O cálculo da integral imprópria nos leva a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ que é divergente; uma evidência disto é que, para todo $a > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a)$$

onde o limite do segundo membro é divergente. Logo, a transformada de Fourier da função $f(x) = e^{i\xi x}/x$ não é finita (não resulta em número real, qualquer que seja ξ). Nesta situação, dizemos que a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ não existe!

Portanto, para um estudo de transformada de Fourier, existe e é evidente a necessidade de se verificar para quais classes de funções a integral imprópria em (1) é convergente. E esta verificação resume-se, de maneira geral, a encontrar um espaço de funções do qual f seja elemento, para que tenhamos a convergência desejada. Este trabalho tem o intuito de fazer uma verificação e análise do espaço de funções ideal para construir uma sólida teoria de transformada de Fourier, a fim de possibilitar gerar uma excelente ferramenta auxiliar na resolução de problemas, por exemplo, com equações diferenciais. Na nossa pesquisa bibliográfica, o livro Figueiredo (2003) foi a referência que norteou boa parte do nosso estudo, principalmente no que diz respeito à teoria de transformada de Fourier propriamente dita, embora outras referências tenham tido papel imprescindível: o livro Botelho, Pellegrino, Teixeira (2012) foi nos auxiliou na introdução de definições e propriedades de espaços de funções, fundamentais para este trabalho; a dissertação de Cardoso (2005) nos ajudou, de forma mais específica, na compreensão de conceitos e resultados principalmente no que diz respeito aos espaços $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e de Schwartz (\mathcal{S}). Os livros Guidorizzi (1986), Lima (2007) e Bartle (1983) serviram como referências para eventuais dúvidas conceituais sobre cálculo diferencial e integral e Análise Real.

Iniciemos nossa análise com o espaço de funções mais básico para se garantir a convergência da integral em (1), o espaço das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis e absolutamente integráveis (à Riemann) na reta, nominado $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou seja, são válidas as condições

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Observação 1: Trabalharemos com integrais de Riemann, embora esta teoria possa ser desenvolvida e estudada com funções integráveis à Lebesgue (vide, por

exemplo, a referência Rivera (2004).

Observação 2: Pode-se trabalhar com um espaço mais “básico” ainda, o espaço das funções que são seccionalmente contínuas em cada intervalo $[a, b]$ e absolutamente integrável na reta. Mas esta condição é mais restritiva, e preferimos iniciar analisando com o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, garantindo assim propriedades mais interessantes e abrangendo um número maior de funções.

Observação 3: O conjunto $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ é chamado de “espaço”, referindo-se ao fato deste conjunto ser um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Um resultado importante é a seguinte “desigualdade triangular” para integrais impróprias,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (3)$$

e que, por conseguinte, garante que f pertença a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, a função $|f|$ também pertença.

Tanto esta desigualdade quanto a proposição a seguir, que normalmente são feitas para funções reais, também são válidas para funções a valores complexos, isto é, para aplicações do tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ em que se considera $f(x) = u(x) + iv(x)$, com u e v funções $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (parte real e parte imaginária, respectivamente). Neste caso, se $u(x)$, $v(x)$ e $|f(x)|$ são funções de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então concluímos que $f(x) = u(x) + iv(x)$ também pertence a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

A proposição a seguir garante a existência da transformada de Fourier para funções no espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Proposição 1: Toda função f do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tem transformada de Fourier.

Demonstração: Para f uma função arbitrária do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, precisamos garantir a convergência da integral imprópria (1). Para isso, analisemos a convergência absoluta da integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}| \cdot |f(x)| dx.$$

Uma vez que $e^{-i\xi x} = \cos \xi x - i \operatorname{sen} \xi x$, então $|e^{-i\xi x}| = \sqrt{\cos^2 \xi x + \operatorname{sen}^2 \xi x} = 1$, e por isso, resumimos a situação em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

esta última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Portanto, a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x} f(x)| dx$ converge (absolutamente), o que implica na convergência (simples) de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$, ou seja, existe a

transformada de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ■

Definindo a transformada de Fourier \mathcal{F} **sobre o espaço** $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, obtemos algumas propriedades interessantes:

- $\mathcal{F}[f]$ é uma função contínua (continuidade da transformada);
- $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0$, ou seja, $\mathcal{F}[f](\xi)$ tende a zero no infinito.

As demonstrações destas propriedades exigem conhecimento de Análise Matemática fora do escopo deste trabalho (como Lema de Riemann e Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue), mas as provas podem ser encontradas no livro Dyke (2001, p. 140). Agora, o próximo resultado podemos demonstrar e nos será útil:

Proposição 2: Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então a transformada $\mathcal{F}[f](\xi)$ é função limitada.

Demonstração: Usando a desigualdade (3) e que $|e^{-i\xi x}| = 1$, basta fazer a conta

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}| \cdot |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

a última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Portanto, existe um real positivo M , tal que $|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq M$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar. ■

2 | PROBLEMÁTICA: ASSIMETRIA DO OPERADOR \mathcal{F} UTILIZANDO O ESPAÇO $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

A proposição a seguir apresenta uma prova da assimetria do operador \mathcal{F} se definido sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ indicando que se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, não necessariamente a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ igualmente será.

Proposição 3 (Assimetria de \mathcal{F} sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$): \mathcal{F} é uma transformação assimétrica para funções do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ou seja, a imagem da transformação sobre funções em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nem sempre é uma função $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Ela será feita por contraexemplo. Já vimos em (2) que a transformada de Fourier de

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1, \\ x, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

é dada por $\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{2 \operatorname{sen} \xi}{\xi \sqrt{2\pi}}$. Contudo, neste caso, esta função transformada não pertence ao espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Isto porque, quando analisamos se a função $\mathcal{F}[u](\xi)$ é absolutamente integrável (em relação a ξ), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2\operatorname{sen} \xi}{\xi\sqrt{2\pi}} \right| d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \right| d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^1 \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \right| d\xi + \int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \right| d\xi \right).$$

Trabalhemos em particular a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \right| d\xi$ (pois a análise da outra integral se dá de forma análoga): uma vez que $|\operatorname{sen} \xi| \leq 1$, que implica que $\operatorname{sen}^2 \xi \leq |\operatorname{sen} \xi|$ então para todo $\xi \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \right| d\xi \geq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \xi}{\xi} d\xi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen}^2 \xi}{\xi} d\xi$$

e aplicando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\int_1^t \frac{\operatorname{sen}^2 \xi}{\xi} d\xi = -\frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \int_1^t \left(\frac{1}{2\xi} - \frac{\operatorname{sen} 2\xi}{4\xi^2} \right) d\xi.$$

Passando ao limite e verificando as parcelas:

- A parcela $(\operatorname{sen} 2)/4$ é uma constante e usando o limite fundamental da trigonometria obtemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\operatorname{sen} 2t}{4t} = 0$.
- A primeira parcela da integral fica

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\xi} d\xi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{2\xi} d\xi = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Portanto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\xi} d\xi$ é divergente.

- A última parcela é absolutamente convergente. Basta verificar que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} 2\xi}{4\xi^2} \right| \leq \frac{1}{4\xi^2},$$

enquanto que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4\xi^2} d\xi$ é reconhecidamente convergente. Usando o teste de comparação para integrais impróprias, concluímos que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} 2\xi}{4\xi^2} \right| d\xi$ é convergente, o que implica na convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\xi}{4\xi^2} d\xi$.

Diante do exposto, conclui-se que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \xi}{\xi} d\xi$ é divergente, e usando novamente o teste da comparação, resulta que $\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} \xi|}{|\xi|} d\xi$ diverge.

Portanto, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)| d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2\operatorname{sen} \xi}{\xi\sqrt{2\pi}} \right| d\xi$$

diverge, e por isso, temos um exemplo de transformada $\mathcal{F}[f](\xi)$ que não é

função do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ■

Percebe-se assim uma deficiência preponderante em se trabalhar transformada de Fourier sobre o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, o que impossibilitaria trabalhar com a inversibilidade do operador transformada, indispensável na resolução de equações diferenciais.

A solução está em se definir a transformada em um espaço vetorial mais restritivo, de preferência dentro do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a fim de não perder as propriedades obtidas com ele, mas que também resolva o problema da assimetria do operador.

3 I SOLUÇÃO DO PROBLEMA: O ESPAÇO DE SCHWARTZ (S)

Diz-se que um função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço S – chamado **espaço de Schwartz**, se f for infinitamente (continuamente) diferenciável e se, para cada inteiro $m, n \in S$, tais que $m, n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup |x^m D^n f(x)| < +\infty \quad (4)$$

onde $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ denota o operador diferencial de ordem n . O espaço S é chamado também de espaço das funções com decrescimento rápido, isto porque, a condição (4) implica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0, \quad (5)$$

o que significa que as funções em S (e suas derivadas) tendem mais rápido para zero, quando $|x|$ tende para infinito, do que as potências x^m vão para o infinito. De fato, basta observar que, se vale (4) para todo $m, n > 0$ então é válido para $m+1, n > 0$, ou seja, existe o número real $M > 0$ tal que

$$|x^{m+1} D^n f(x)| \leq M$$

e usando propriedade de módulo, para todo $|x| > 0$, temos

$$|x| \cdot |x^m D^n f(x)| \leq M \Rightarrow |x^m D^n f(x)| \leq \frac{M}{|x|}.$$

Fazendo $|x| \rightarrow +\infty$ (ou $\frac{1}{|x|} \rightarrow 0$) e aplicando o teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0.$$

A recíproca, (5) implicando em (4), também é válida, mostrando que, na verdade, ambas as condições são equivalentes e podem definir o conjunto S .

Vejam algumas notáveis propriedades do conjunto de funções em S :

Proposição 4: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é função do espaço S , então a função da forma $x^m D^n f \in S$.

Demonstração: Suponha $f(x)$ função de S . Para cada inteiro $m, n > 0$ (arbitrários), chamemos de $g(x) = x^m D^n f$; queremos mostrar que $g \in S$.

Primeiro observemos que $f(x)$ é infinitamente diferenciável, então que $D^n f(x)$ obviamente também é, e segue que o produto de duas funções infinitamente diferenciável x^m e $D^n f$ o é. Precisamos mostrar a existência do supremo de $|x^p D^k g(x)|$, para todo $p, k > 0$ inteiros. Façamos o cálculo da 1ª derivada:

$$D(g(x)) = mx^{m-1}D^n f(x) + x^m D^{n+1} f(x);$$

a 2ª derivada fica:

$$D^2 g(x) = m(m-1)x^{m-2}D^n f(x) + mx^{m-1}D^{n+1} f(x) + m(m-1)D^{n+1} f(x) \\ + x^m D^{n+2} f(x).$$

Se prosseguirmos com o processo de derivação, é fácil observar que todas as parcelas da derivada k -ésima de $g(x)$ obtidas são da forma

$$c(m)x^i D^j f(x)$$

com $i = 1, \dots, m$ e $j = n, \dots, k$ e $c(m)$ constante real positiva não nula dependendo de m .

Como $f \in S$, então para todo inteiro $m, n > 0$, existe um real $M > 0$ (dependendo de m, n) em que $|x^m D^n f| \leq M$, o que implica que,

- fazendo $m = i$ e $n = 0$, $|x^i| \leq M_i$
- fazendo $m = 0$ e $n = j$, $|D^j f(x)| \leq M_j$

Portanto cada parcela das derivadas de $g(x)$ será limitada pois

$$|c(m)x^i D^j f(x)| \leq c(m)|x^i| \cdot |D^j f(x)| \leq c(m)M_i M_j$$

e por consequência, toda k -ésima derivada de $g(x)$ é limitada: existe real M_k tal que $|D^k g(x)| \leq M_k$ para todo inteiro $k > 0$.

Segue então que, de maneira geral, para todo inteiros positivos, existem $M, N > 0$ reais tais que

$$|x^p D^k g(x)| = |x^p| \cdot |D^k g(x)| \leq N \cdot M$$

o que nos resulta que

$$\sup |x^p D^k g(x)| < +\infty,$$

culminando que toda função $x^m D^n f(x) \in S$, sempre que $f \in S$. ■

A proposição a seguir justifica o motivo de chamarmos S de “espaço”.

Proposição 5: S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que o conjunto S é subconjunto de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se $f \in S$, então é contínua em \mathbb{R} , por ser infinitamente diferenciável e, logo, será contínua em cada intervalo fechado $[M, N]$, e além do mais, f é limitada, garantindo-nos a integrabilidade de f em cada $[M, N]$, e por consequência, integrabilidade de $|f|$ em $[M, N]$.

Resta-nos provar que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ é convergente. Quebrando a integral nas parcelas $\int_{-1}^{+1} |f(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx$, analisemos cada uma:

- f é limitada em $[-1, 1]$, então é integrável e por isso $\int_{-1}^{+1} |f(x)| dx < +\infty$;
- como $f \in S$, usando a condição (4) para $m = 2, n = 0$, temos para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular para $|x| \geq 1$ e integrando em ambos lados em relação a x , obtemos

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq M \int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} dx \leq M \int_{|x| \geq 1} 1 dx = M < +\infty$$

Concluimos então que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ e, portanto, $f \in S$. Além disso,

(i) $f \equiv 0$ implica diretamente que $\sup |x^m D^n(0)| < +\infty$. Logo $0 \in S$

(ii) para $f, g \in S$, temos, para todo $m, n > 0$ inteiros, $\sup |x^m D^n(f+g)(x)| \leq \sup |x^m D^n f(x)| + \sup |x^m D^n g(x)| < +\infty$. Assim, $f+g \in S$;

(iii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$, $\sup |x^m D^n(\alpha f)(x)| = \alpha \sup |x^m D^n f(x)| < +\infty$.

Logo $\alpha f(x) \in S$, finalizando assim a demonstração de que S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1\mathbb{R}$. ■

O resultado seguinte justifica o fato de a transformada de Fourier, sobre o espaço S , ser infinitamente diferenciável e, ainda, oferece-nos uma fórmula para calcular derivadas de transformada.

Proposição 6: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é função de S , então a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](\xi)$ será infinitamente diferenciável, e, para n inteiro positivo,

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi).$$

Demonstração: esta prova é feita por indução. Porém, precisamos primeiro garantir a diferenciabilidade de primeira ordem e, para isso, usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em Bartle (1983, p. 248):

Lema: Seja função contínua $(\xi, x) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \phi(\xi, x) \in \mathbb{R}$, I intervalo real, possuindo derivada parcial ∂_ξ contínua e suponha que a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x) dx$

converja uniformemente em \mathbb{R} . Então G é derivável em \mathbb{R} e $G'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\xi}(\xi, x) dx$.

Este lema nos dará embasamento para provar a diferenciabilidade da função $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$, desde que ela *converja uniformemente* (dizemos que $\int_a^{+\infty} \phi(\xi, x) dx$ converge uniformemente se, $\forall \varepsilon > 0$, existir $x > \alpha$ tal que $|\int_x^{+\infty} \phi(\xi, x) dx| < \varepsilon$, para todo $x \in I$). E, de fato, chegamos indiretamente a convergência uniforme de $\mathcal{F}[f](\xi)$, obtida através do

Teste M de Weierstrass: Se, para cada ξ , a função $x \mapsto \phi(\xi, x)$ for \mathcal{L}^1 em \mathbb{R} e existir função integrável $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, tal que $|\phi(\xi, x)| \leq M(x), \forall \xi \in I$, então a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x) dx$ converge uniformemente.

Este teorema e demonstração podem ser consultados em Bartle (1983, p. 245).

Prosseguindo na demonstração da Proposição 6, reunimos a seguinte situação para $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$: considerando $\phi(\xi, x) = e^{-i\xi x} f(x)$, temos $\phi(\xi, x)$ contínua (produto de funções contínuas $e^{-i\xi x}$ e $f(x)$) e a derivada $\phi_{\xi} = (-ix)e^{-i\xi x} f(x)$ existe e é contínua; além disso, como

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi, x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}| \cdot |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, lembrando que $|e^{-i\xi x}| = 1$. Portanto, $\phi(\xi, x) \in \mathcal{L}^1$ em \mathbb{R} ;
- $|\phi(\xi, x)| = |e^{-i\xi x}| \cdot |f(x)| = |f(x)|$, ou seja, $\phi(\xi, x)$ é limitada, para todo $\xi \in I$ pela função integrável $|f(x)|$.

Logo, pelo teste M de Weierstrass, $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$ converge uniformemente; pelas verificações expostas acima, $\mathcal{F}[f](\xi)$ se enquadra nas hipóteses do Lema de diferenciabilidade de integrais impróprias, garantindo assim a existência da derivada $\mathcal{F}'[f](\xi)$, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} (e^{-i\xi x} f(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} [(-ix)f(x)] dx = \mathcal{F}[(-ix)f](\xi). \end{aligned}$$

Depois do primeiro passo, supomos agora valer a fórmula de diferenciabilidade de \mathcal{F} para n : $\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi)$ e mostraremos que vale para $n+1$. De fato,

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} \mathcal{F}[f] = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}[f] \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) \right) = \mathcal{F}[(-ix)^{n+1} f](\xi),$$

como queríamos mostrar. Portanto, $\mathcal{F}[f](\xi)$ é infinitamente derivável. ■

A proposição a seguir é um valioso resultado, que mostra a característica da transformada de Fourier de eliminar derivadas de uma função de S :

Proposição 7: Se $f \in S$, então, para n natural diferente de zero,

$$\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi).$$

Demonstração: Provaremos novamente por indução. Verifiquemos a condição para $n = 1$, primeiramente: usando integração por partes, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int e^{-i\xi x} f'(x) dx = e^{-i\xi x} f(x) + i\xi \int e^{-i\xi x} f(x) dx,$$

que nos ajudará a determinar a transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx = e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Analisando o limite do segundo membro: $e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^0 + e^{-i\xi x} f(x) \Big|_0^{+\infty}$ temos

- $e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^0 = f(0) - \lim_{|x| \rightarrow \infty} (e^{-i\xi t} f(t)) = f(0) - 0 = f(0)$, lembrando que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-i\xi t} = 0$ e $f(t)$ limitada (pois $f \in S$).
- $e^{-i\xi x} f(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (e^{-i\xi t} f(t)) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0)$.

Assim, $e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = f(0) + (-f(0))$ e o cálculo da transformada de $\mathcal{F}[Df](\xi)$ resulta em:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = 0 + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = i\xi \mathcal{F}[f](\xi),$$

ou seja,

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi). \quad (6)$$

Agora, supondo a igualdade valer para n , $\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$, vamos mostrar que é válida também para $n+1$. Observe que

$$\mathcal{F}[D^{n+1} f](\xi) = \mathcal{F}[D^n(Df)](\xi)$$

e usando a hipótese de indução sobre a função de Schwartz $Df(x)$, temos

$$\mathcal{F}[D^n(Df)](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi).$$

Como provamos valer (6) para $n=1$, concluímos que

$$(i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi) = (i\xi)^n (i\xi \mathcal{F}[f](\xi)) = (i\xi)^{n+1} \mathcal{F}[f](\xi).$$

Portanto, $\mathcal{F}[D^{n+1}f](\xi) = (i\xi)^{n+1}\mathcal{F}[f](\xi)$, finalizando a prova por indução.

O seguinte teorema é o ponto central do trabalho, visto que garante a almejada simetria do operador transformada \mathcal{F} , se definido sobre o espaço de Schwartz S .

Teorema 1: A transformada de Fourier é um operador linear simétrico, definido por $\mathcal{F}:S \rightarrow S$.

Demonstração: Com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in S$ e usando propriedades de integral imprópria, observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\alpha f + g](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}(\alpha f(x) + g(x)) dx \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx = \alpha \mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[g](\xi),\end{aligned}$$

provando assim ser linear o operador transformada \mathcal{F} . Para mostrar \mathcal{F} simétrico sobre S , precisamos provar $\mathcal{F}[f](\xi)$ ser função de S . Constatemos primeiro que, da Proposição 6, $\mathcal{F}[f](\xi)$ é infinitamente diferenciável e

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n} (\mathcal{F}[f](\xi)) = \xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

para cada n inteiro positivo não nulo. Usaremos a fórmula da transformada de derivada de f obtida na Proposição 7, mas primeiro ajustaremos a expressão

$$\xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = \xi^m (i^m \cdot i^{-m}) \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = i^{-m} (\xi^m i^m) \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

podemos aplicar agora a fórmula, sabendo que $i^{-m} = (-i)^m$,

$$i^{-m} (\xi^m i^m) \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = -(i^m) \mathcal{F}[D^m(-ix)^n f](\xi) = \mathcal{F}[(-i^m) D^m(-ix)^n f](\xi).$$

Como a derivada m -ésima de $f(x)$ é linear, então $(-i^m) D^m(-ix)^n f(x) = i^{m+n} D^m(x)^n f(x)$ é função do espaço S (devido a Proposição 4), e por consequência, é também função do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (Proposição 5). Mostramos que uma das propriedades do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ é que se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}[f](\xi)$ é limitada (Proposição 2). Usamos este fato para garantir que $\mathcal{F} [(-i^m) D^m(-ix)^n f](\xi)$ seja limitada, e consequentemente, a função $\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n} (\mathcal{F}[f](\xi))$, que atende

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n} (\mathcal{F}[f](\xi)) = \mathcal{F}[(-i^m) D^m(-ix)^n f](\xi),$$

é função limitada. Assim, é finito o supremo

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi^m \frac{d^n}{d\xi^n} (\mathcal{F}[f](\xi)) \right| < +\infty,$$

para cada $m, n > 0$ inteiros positivos, garantindo assim que $\mathcal{F}[f](\xi)$, infinitamente diferenciável, seja função do espaço de Schwartz S . ■

4 I CONCLUSÕES: BIJETIVIDADE E INVERSÃO DA TRANSFORMADA

O teorema 1 é de suma importância para o estudo da transformada de Fourier, uma vez que a simetria alcançada de \mathcal{F} , definido sobre os espaços de Schwartz S , possibilita a bijetividade deste operador, como veremos a seguir, bem como a existência da inversibilidade de \mathcal{F} . Mas, para comprovarmos tais qualidades decorrentes, precisamos de um “candidato” a operador inverso. Vamos definir o operador $T: S \rightarrow S$ como sendo

$$T[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f(s) ds, \quad (7)$$

para qualquer função $f \in S$. Pode-se demonstrar que

Proposição 8: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função em S com sua transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi)$ (podemos usar esta notação de transformada, quando for conveniente), então $f(x)$ pode ser escrito como

$$f(x) = T[\mathcal{F}(\xi)](x), \quad (8)$$

isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi) d\xi.$$

Esta demonstração será omitida, por exigir conhecimentos fora dos nossos objetivos, mas pode ser encontrada em Figueiredo (2003, p. 204). Podemos agora demonstrar nossas duas conclusões terminais:

Conclusão 1 (Bijetividade): A transformada de Fourier é um operador bijetivo.

Demonstração: Primeiro, será demonstrada a injetividade do operador: sejam $f_1, f_2 \in S$, tais que $\mathcal{F}[f_1](\xi) = \mathcal{F}[f_2](\xi)$. Basta aplicar o operador T na igualdade e usar a relação (8) da Proposição 8 para obter, de forma direta, que $T[\mathcal{F}[f_1](\xi)](x) = T[\mathcal{F}[f_2](\xi)](x) \Rightarrow f_1 = f_2$.

Para se demonstrar a sobrejetividade, devemos tomar $g(\xi)$ função em S (contradomínio de \mathcal{F}) arbitrário e provar que existe $g(x)$ em S (domínio de \mathcal{F}) tal que $\mathcal{F}[g](\xi) = g(\xi)$. Para isso, basta tomar $g(x) = T[g(\xi)](x)$, ou seja, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} g(\xi) d\xi$, e, usando esta última igualdade e sabendo que $i\xi x = (-i)\xi(-x)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i)s(-x)} f(s) ds \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} (\mathcal{F}[G](-x)) dx. \end{aligned}$$

Usando a integração por substituição nesta última, fazendo $-x = u$, $dx = du$, e os limites da integração imprópria invertidos, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} \mathcal{F}[G](-x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\xi(u)} \mathcal{F}[G](u) (-du) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(u)} (\mathcal{F}[G](u)) du = T[\mathcal{F}[G]](\xi) \end{aligned}$$

e usando novamente (8), temos $T[\mathcal{F}[G]](\xi) = G(\xi)$. Desta forma, mostramos que $\mathcal{F}[g](\xi) = G(\xi)$, e \mathcal{F} é operador sobrejetivo e, portanto, bijetivo. ■

Conclusão 2 (T transformada inversa de Fourier): A bijetividade do operador transformada implica na existência de operador inverso. Da Proposição 8, conclui-se diretamente que $(T \circ \mathcal{F})(f) = T[\mathcal{F}[f]] = f$. Além disso, devido na prova da sobrejetividade de \mathcal{F} e usando (8), para cada $G \in S$, existe $g \in S$ tal que $G = \mathcal{F}[g]$ implicando que $(\mathcal{F} \circ T)(G) = \mathcal{F}[T[G]] = \mathcal{F}[g] = G$. Assim concluímos que o operador T , definido em (7), é o inverso da transformada de Fourier definida em (1). ■

Desta forma, o fato de o operador transformada definido em S ser bijetivo e, portanto, possuir inversa, é a chave indispensável para aplicações de transformada de Fourier na resolução de equações diferenciais. Estes são objetivos futuros das nossas pesquisas.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **Elementos da Análise Real**. Tradução: Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 1983. Título original: The Elements of Real Analysis.

BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. **Fundamentos da Análise Funcional**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

CARDOSO, D. C. **Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii**. 2005. Tese (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2005.

DYKE, P. P. G. **An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series**. London: Springer, 2001.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: Edgard Blücher, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1986. v. 2.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2007. v. 1.

RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. 1. ed. Petrópolis, RJ: LNCC, 2004.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Área 2, 17, 26, 80, 85, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 149, 150, 164, 169, 188, 193, 195, 196, 197, 201, 204, 207, 210, 223, 228, 230, 232, 233, 234, 236, 243, 249, 252

Atividade matemática 26, 202, 204, 246

B

Boécio 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159

C

Cálculo mental 19, 20, 23, 25, 27

Computação 23, 24, 25, 26, 33, 34, 84, 157

Contextos não formais 87, 88

Cotidiano 15, 16, 17, 18, 20, 21, 76, 79, 83, 111, 161, 162, 163, 165, 166, 190, 206, 224, 230, 241, 245, 250

Criatividade 84, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 190

Currículo de matemática 200

D

De Institutione Arithmetica 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160

Dinâmica populacional 99, 101, 104, 105, 107, 109

Diretrizes curriculares 200

E

Educação matemática 14, 21, 22, 33, 110, 111, 112, 118, 123, 124, 125, 126, 139, 159, 173, 186, 187, 198, 199, 212, 223, 239, 247, 250, 252

EJA 15, 16, 17, 18, 19, 21

Ensino da matemática 75, 76, 85, 86, 90, 127, 129, 185, 187, 188, 196, 241

Ensino fundamental 2, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 32, 75, 76, 78, 79, 86, 112, 124, 129, 138, 139, 143, 151, 187, 188, 193, 197, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 208, 209, 238, 250

Ensino médio 19, 110, 112, 113, 129, 130, 136, 223, 224, 225, 226, 227, 236, 237, 238, 240, 241, 244

Espaço de Schwartz 35, 41

F

Fatoração 245, 246

Feira 15, 16, 17, 18, 19

Filosofia 152, 153, 154, 157, 159, 160, 252

Formação de professores 34, 87, 88, 89, 90, 161, 164, 165, 173, 211, 212, 224, 233, 234, 250, 252

Formulação de problemas 87, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 191

Frações 1, 3, 9, 10, 11, 12, 13

Função afim 240

Função quadrática 240

Funciones en variable compleja 50, 51, 54

G

GeoGebra 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 137, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 148, 151

Geometria 2, 6, 94, 96, 126, 128, 129, 130, 131, 135, 136, 139, 155, 156, 159, 185, 200, 201, 203, 206, 208, 209, 234, 237

H

História da matemática 126, 127, 130, 136, 137, 152, 154, 156, 158, 159, 160, 173, 174, 180, 184, 186, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223

História no ensino de matemática 210

Homotetia 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151

I

Interdisciplinaridade 219, 224, 227, 230, 239

J

Jogo digital 1, 3, 9, 13, 14

Jogos matemáticos 240, 244

L

Liber Quadratorum 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Linguagem algébrica 1, 3, 184

Ludicidade 244, 246, 252

M

Matemática 1, 2, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 39, 48, 50, 52, 61, 62, 65, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 135, 136, 137, 138, 139, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174,

180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252

Matemática atuarial 62, 72

Modelagem matemática 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 232, 233, 234, 238

Modelagem matemática crítica 110, 112, 113, 123

P

Pensamento computacional 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34

Pensões 62, 63, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74

Perímetro 131, 132, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 234

Pesca artesanal 110, 111, 112, 114, 117, 119, 120, 121, 122, 123

PIBID 240, 241, 245, 246, 252

Portugal 62, 63, 64, 65, 73, 74, 87

Praxeologia 173, 174, 181, 184, 186

Proporção 20, 105, 110, 112, 122, 123, 177, 182, 183, 233, 234, 237

Proporcionalidade 112, 138, 139, 140, 149, 150, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 207

R

Realidade 21, 65, 66, 67, 78, 89, 92, 110, 111, 112, 113, 117, 124, 163, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 198, 206, 212, 226, 230, 232, 238, 246

Recorrência linear 99, 102

Regra de Três 19, 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Resolução de problemas 23, 24, 26, 34, 37, 87, 89, 90, 91, 92, 112, 113, 129, 183, 191, 204, 207, 225, 237, 242, 244

S

Scratch 1, 2, 3, 4, 34

Segurança social 62, 63, 65, 72, 73, 74

Softwares de ensino 75, 77

T

Tecnologias 2, 3, 13, 26, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 127, 129, 136, 138, 139, 150, 161, 166, 201, 203, 252

Teorema de Carnot 126, 129, 130, 132

Territórios virtuais 161, 162, 163

Tilápia-do-nilo 99, 104, 107, 108, 109

Transformada de Fourier 35

Trilhos matemáticos 87, 88, 89, 91, 92, 94, 97

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

@atenaeditora 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

@atenaeditora 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 