

Américo Junior Nunes da Silva  
(Organizador)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Américo Junior Nunes da Silva  
(Organizador)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

### **Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

### **Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

### **Bibliotecária**

Janaina Ramos

### **Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

### **Imagens da Capa**

Shutterstock

### **Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

### **Revisão**

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

## Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecária:** Janaina Ramos  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Correção:** Mariane Aparecida Freitas  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizador:** Américo Junior Nunes da Silva

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia.

ISBN 978-65-5706-440-5

DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática”***, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se

enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
CALIBRATION OF LOCAL VOLATILITY SURFACES WITH UNCERTAIN ASSET PRICE: AN ENKF-ENKF APPROACH	
Xu Yang	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027101</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>9</b>
A MATEMÁTICA AUXILIANDO NO COMBATE A OBESIDADE INFANTIL	
Nilton Rosini	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027102</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>16</b>
APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAIRE	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027103</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>26</b>
UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM $\mathbb{P}$	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027104</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>41</b>
O PRINCÍPIO DO MÁXIMO E APLICAÇÕES	
Francisco Erisson Batista Gomes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027105</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>47</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO 3D DE GRÃOS AGRÍCOLAS NO PROCESSO DE ARMAZENAGEM	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Rodolfo França de Lima	
Ricardo Klein Lorenzoni	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027106</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>58</b>
DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DE DESEMPENHO DE UMA FILA $M/M/1$ ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM BAYESIANA	
Nilson Luiz Castelucio Brito	
Celimar Reijane Alves Damasceno Paiva	
Pedro Humberto de Almeida Mendonca Gonzaga	
Rodrigo Fonseca Santana Costa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027107</b>	

<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>68</b>
DERIVABILIDADE E DIFERENCIABILIDADE NO ENSINO DO CÁLCULO Pedro Pablo Durand Lazo <b>DOI 10.22533/at.ed.4052027108</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>84</b>
A MATEMÁTICA NA SUSTENTABILIDADE Silvana Grimes Daiana Lana Janete Bizatto Ferreira <b>DOI 10.22533/at.ed.4052027109</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>89</b>
INFLUÊNCIA DA PARTICIPAÇÃO DA FAMÍLIA NO PROCESSO DE ENSINO- APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL Diane Saraiva Fronza Guilherme Schildt Duarte Lara Rafaela Menezes Marcelo Eder Lamb <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271010</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>98</b>
OPERAÇÕES E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA Leniedson Guedes dos Santos Rodrigo Ferreira dos Santos Ulisses Suriano da Silva Neto Maurílio Messias Bomfim Alves <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271011</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>102</b>
TEM ÂNGULO EM TODO LUGAR Alessandra dos Santos Fernandes <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271012</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>108</b>
INVESTIGANDO AS POTENCIALIDADES DO YOUTUBE: UMA PRÁTICA COM MODELAGEM João Carlos Lemos Junior Martinho Wojdylo Ronaldo Jacumazo Dionísio Burak <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271013</b>	

<b>CAPÍTULO 14.....</b>	<b>122</b>
ASPECTOS PRÁTICOS NA FORMAÇÃO DO DOCENTE EM PEDAGOGIA A PARTIR DO TRABALHO COM MAPAS CONCEITUAIS COMO ESTRATÉGIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA	
André Ricardo Lucas Vieira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271014</b>	
<b>CAPÍTULO 15.....</b>	<b>134</b>
AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A APROPRIAÇÃO DO WEB CURRÍCULO PELOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA COMO O "X" DA QUESTÃO	
Vera Lúcia de Oliveira Freitas Ruas	
Josué Antunes de Macêdo	
Edson Crisostomo dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271015</b>	
<b>CAPÍTULO 16.....</b>	<b>145</b>
A PASSAGEM DO 3D ↔ 2D NOS ANOS INICIAIS: UMA PROPOSTA POSSÍVEL	
Julio Silva de Pontes	
Celso Ribeiro Campos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271016</b>	
<b>CAPÍTULO 17.....</b>	<b>155</b>
CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS DE PEDAGOGIA SOBRE A QUALIDADE DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL	
Michela Caroline Macêdo	
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271017</b>	
<b>CAPÍTULO 18.....</b>	<b>165</b>
LEITURA, INTERPRETAÇÃO E ESCRITA MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA AS VIVÊNCIAS EM UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA NO SEMIÁRIDO BAIANO	
Eliane Ferreira de Santana	
Américo Junior Nunes da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271018</b>	
<b>CAPÍTULO 19.....</b>	<b>180</b>
APLICATIVO EDUCACIONAL ARTE AQUI!: UMA PROPOSTA BASEADA NA CARTOGRAFIA DOS SENTIDOS	
Kelen Ricardo dos Reis	
Carine Geltrudes Webber	
Roberta Dall Agnese da Costa	
Isolda Gianni de Lima	
Laurete Teresinha Zanol Sauer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271019</b>	

<b>CAPÍTULO 20.....</b>	<b>195</b>
<b>MODELAGEM E ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA</b>	
Felipe Manoel Cabral	
Marcela Lima Santos	
Claudia Mazza Dias	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271020</b>	
<b>CAPÍTULO 21.....</b>	<b>210</b>
<b>O SABOR DA MATEMÁTICA – O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS E RECEITAS CULINÁRIAS</b>	
Domingos Antonio Lopes	
Cristiana Andrade Poffal	
Cinthy Maria Schneider Meneghetti	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271021</b>	
<b>CAPÍTULO 22.....</b>	<b>222</b>
<b>VIVÊNCIAS MATEMÁTICAS: RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE FRAÇÕES</b>	
Mírian Silva Ferreira	
Jairo Alves Batalha	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271022</b>	
<b>CAPÍTULO 23.....</b>	<b>229</b>
<b>ENSINO DE MATEMÁTICA: SISTEMA NUMERICO EGÍPCIO POR MEIO DE UM CENÁRIO.</b>	
Jeizi Ferreira Santos	
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa	
Eusom Passos Lima	
Izaías Silva Rodrigues	
Karoline de Sarges Fonseca	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
Maiky Bailão Sardinha	
Marcos Vinicius Silva Alves	
Otavio Junior Reis de Moraes	
Pedro Augusto Lopes Rosa	
Rosana Pinheiro Tavares	
Sebastião Erik Pinheiro e Pinheiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271023</b>	
<b>CAPÍTULO 24.....</b>	<b>241</b>
<b>PROCESSOS (NÃO) HEGEMÔNICOS DE MATEMATIZAR: ANÁLISE DE LIVROS (PARA) DIDÁTICOS SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS</b>	
Weverton Augusto da Vitória	
Rodolfo Chaves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271024</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR.....</b>	<b>256</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO.....</b>	<b>257</b>

## A PASSAGEM DO 3D ↔ 2D NOS ANOS INICIAIS: UMA PROPOSTA POSSÍVEL

*Data de aceite: 01/10/2020*

*Data de submissão: 06/07/2020*

### **Julio Silva de Pontes**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
Duque de Caxias - RJ  
<http://lattes.cnpq.br/8830608061432625>

### **Celso Ribeiro Campos**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
São Paulo - SP  
<http://lattes.cnpq.br/2456415045021832>

**RESUMO:** O presente trabalho é um recorte da tese que está sendo escrita pelo primeiro autor em relação ao conhecimento do professor que ensina matemática nos anos iniciais quanto ao ensino e aprendizagem da geometria no ensino fundamental. A proposta é contribuir com a formação do docente que atua nesta etapa em relação a passagem da exploração das figuras espaciais para a plana. Entre os objetivos investigados se refere a como ocorre o processo da visualização de figuras tridimensionais em representações bidimensionais, e vice-versa. Foi levantada e uma revisão de literatura de pesquisas bibliográficas em relação a esse tema. Utilizamos a metodologia do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele para buscar estratégias e sugestões de como esse processo poderá ser feito, focando em seu primeiro nível (Visualização). Concluímos com as propostas ofertadas neste trabalho que são possíveis para os professores no desenvolvimento do processo

de visualização tão importante na vida escolar dos alunos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Visualização; Desenhos; Representação; Objetos.

### THE PASSAGE OF 3D ↔ 2D IN THE EARLY YEARS: POSSIBLE PROPOSAL

**ABSTRACT:** The present work is an excerpt of the thesis that is being written by the first author in relation to the knowledge of the teacher who teaches mathematics in the early years regarding the teaching and learning of geometry in elementary school. The proposal is to contribute to the training of the teacher who works at this stage in relation to the transition from the exploration of spatial figures to the plane. Among the objectives investigated, it refers to how the process of visualizing three-dimensional figures in two-dimensional representations occurs, and vice versa. It was raised and a literature review of bibliographic research in relation to this topic. We use Van Hiele's methodology for the development of geometric thinking to seek strategies and suggestions for how this process can be done, focusing on its first level (Visualization). We conclude with the proposals offered in this work that are possible for teachers in the development of the visualization process so important in the students' school life.

**KEYWORDS:** Visualization; Graphics; Representation; Objects.

## 1 | INTRODUÇÃO

A ideia deste trabalho surgiu por conta

de conversas informais entre o primeiro autor, que foi o formador, com os professores dos anos iniciais, em formação do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) em Angra dos Reis no ano de 2016. Foram observadas várias dúvidas pertinentes ao uso de objetos geométricos e a metodologia utilizada, além do anseio de uma formação específica para esta área.

[...] muitos professores, principalmente das primeiras séries, declaram ter duas razões para não se sentirem à vontade para aplicar tais materiais em suas salas de aula. A primeira é por não estarem familiarizados com os procedimentos didáticos requeridos por estes tipos de recursos manipulativos, e a segunda, por não terem conhecimento de como reproduzi-los por meio de materiais de baixo custo (KALEFF, 2008, p. 10).

Assim sendo, nas aulas de Geometria os professores costumam usar muitas figuras, desenhos e objetos geométricos, por conta da facilidade que eles normalmente têm para apresentá-los. Porém, nem sempre o aluno consegue entender aquilo que o professor está ensinando, muitas vezes por não estar visualizando as características importantes do objeto em questão.

Para conduzir uma boa interpretação do objeto é preciso que se faça uso de estímulos, segregação visual das partes do objeto, a unificação destas partes, assim como reconhecer a continuidade de uma figura com traçados, seu fechamento mesmo com partes faltando, associação com outras figuras, além de considerar semelhanças associadas com o agrupamento de suas partes.

Desta forma, segundo a Teoria de Piaget as primeiras transformações são através dos aspectos topológicos dos objetos, e só mais tarde é possível transferir os atributos geométricos Euclidianos dos objetos para sua representação do espaço.

[...] o espaço mais elementar, que se define através das relações mais abertas entre objetos, é o espaço topológico. As relações definidas pelas transformações operadas sobre os objetos, nesse espaço, são as de manutenção de vizinhança e fronteira entre dois ou mais pontos contidos no objeto (BECKER, 2002, p.78).

Segundo Murakami e Franco (2008, p. 4), as relações topológicas são as mais elementares, "nas quais a criança constrói a noção de conservação de formas e grandezas, noção esta que é condição para a construção das relações espaciais posteriores".

Para por em prática esse processo, utilizamos o modelo Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, mas precisamente o seu primeiro Nível, que é o da Visualização. Segundo Gutiérrez (1996b) os níveis de van Hiele de raciocínio nos dão possibilidade de completar o modelo de visualização e incorporar a avaliação de atividades de visualização para o contexto da avaliação em matemática.

## 2 | MATERIAIS E DESENHOS

Os materiais e os desenhos muito utilizados nas aulas de matemática e são, segundo Fischbein (1993), como modelos materializados pelas entidades mentais. Não existe em nosso dia a dia cópia fiel dos objetos geométricos, e isso só acontece no campo conceitual.

Uma figura geométrica pode, então, ser descrita como tendo propriedades intrinsecamente conceitual. No entanto, uma figura geométrica não é um mero conceito. É uma imagem, uma imagem visual. Possui uma propriedade que os conceitos usuais não possuem, isto é, inclui a representação mental da propriedade espacial. (FISCHBEIN, 1993, p. 141)

Qualquer figura geométrica é uma representação com propriedades que definem o conceito. Um bom exemplo é imaginarmos um paralelepípedo. Não importa a massa, a cor e o tamanho, ele será definido por um conceito, incluindo em sua representação as suas propriedades que auxiliarão no raciocínio matemático.

Assim sendo, é por meio do uso de figuras manipulativas, que o aluno pode fazer a experimentação, observação, indução, comparação e generalização, permitindo que ocorra um processo mental entre os conceitos e a imagem. Um dos grandes obstáculos no raciocínio geométrico é, segundo Fischbein (1993), do aluno em manipular conceitos figurativos, negligenciando a definição.

## 3 | IMAGENS MENTAIS

A imagem mental é “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 7). A primeira imagem mental é involuntária, e vai se formando através dos estímulos cultural, experiência pessoal, e através da associação entre a figura e a linguagem verbal.

O núcleo psicológico do entendimento, eu devo assumir, consiste em ter um “modelo de trabalho” do fenômeno em sua mente. Se você entende a inflação, uma prova matemática, o modo como funciona um computador, DNA ou o divórcio, então você tem uma representação mental que serve como um modelo de uma entidade, da mesma forma que, por exemplo, um relógio funciona como um modelo da rotação da Terra. (JOHNSON-LAIRD, 1995, p. 2, tradução nossa)

Pode ocorrer de haver uma concepção errada de um conceito, gerando um conflito ao se deparar com outra imagem do mesmo conceito. Exemplo disso é o aluno considerar errada a imagem de um quadrado transladado cuja diagonal se apresenta da vertical.

Esse conflito mental ocorre geralmente pelo fato de os professores e livros didáticos apresentarem figuras sempre da mesma forma. Quando isso ocorre, segundo (D’AMORE, 2007), temos uma *misconception*, ou seja, uma concepção errada do conceito. Esses conflitos mentais fazem com que o aluno vá construindo novas imagens mentais do conceito em estudo. Porém, vai chegar um momento em que para todos os estímulos feitos

a imagem mental será a mesma. Nesse caso, ainda segundo D'Amore, (2007), temos um *modelo* do conceito, ou seja, a imagem que melhor define todas as informações em relação às solicitações ulteriores.

Assim sendo, o processo de geração de imagens mentais de Gutiérrez (1996a), na qual o aluno, ao se deparar com a figura espacial, realiza a associação com outras imagens mentais, como ver um paralelepípedo e chamá-lo de caixa, ver um cubo e chamá-lo de dado, etc., ou iniciar o processo de construção da imagem mental de um objeto novo cujas representações ainda não foram construídas.

Desta forma, o processo de construção das imagens mentais da figura geométrica se iniciaria antes mesmo da exploração da visualização, que corresponde ao primeiro nível do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo van Hiele.

## 4 | MODELO VAN HIELE

Trata-se de um modelo criado pelo casal Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, na década de 1950, a partir das dificuldades que seus alunos do curso secundário da Holanda apresentavam sobre a geometria.

Esse modelo do pensamento geométrico consiste em desenvolver a aprendizagem da geometria por meio de 5 níveis hierárquicos independentes e sequenciais. Para facilitar esse desenvolvimento cognitivo pode-se utilizar 5 fases didáticas, não hierárquicas e não obrigatórias, e o uso de cada uma delas dependerá muito do tipo da atividade, do material utilizado e do nível cognitivo em que se encontra o aluno.

O primeiro nível de van Hiele é chamado de visualização ou básico ou de reconhecimento, dependendo do autor a que se refere. É o foco principal deste trabalho, pois permitirá reconhecer a figura em qualquer representação. Por esse motivo explicitaremos apenas esse nível, que corresponde a fornecer ao aluno, os materiais manipulativos para que possam fazer a investigação visual.

O aluno consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir um desenho com papel quadriculado. Por exemplo, pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas. (VIANA, 2014, p. 24)

Para desenvolver cada nível utilizamos linguagens específicas, o que significa que a linguagem vai mudando na medida em que o processo vai avançando para o nível seguinte. Assim, com o refino das propriedades de um conceito e para que essa progressão ocorra, “as estratégias metodológicas, os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário devem ser adequados ao nível de pensamento geométrico que o aluno está” (UTIMURA, 2015, p. 41).

As fases didáticas que facilitarão essa progressão são:

- Fase 1 – Informação ou Questionamento: há um diálogo entre o professor e o aluno, sobre o material a ser utilizado, o problema a ser resolvido, e as observações levantadas;
- Fase 2 – Orientação Rígida ou Orientação Direta: os alunos exploram o material;
- Fase 3 – Explicitação: os alunos expressam verbalmente suas opiniões;
- Fase 4 – Orientação Livre: o professor deve incentivar os alunos a resolverem problemas de diversas formas;
- Fase 5 – Integração ou Fechamento: uma revisão do que foi estudado.

## 5 | VISUALIZAÇÃO

A observação de um objeto e a obtenção de suas características aparentemente óbvias pelo processo visual não é tão simples assim, pois é preciso que essa habilidade cognitiva esteja desenvolvida. A visualização é uma habilidade importante para a pessoa ser capaz de pensar naquilo que não está diante dos olhos. Segundo Gutiérrez (1996a), a visualização em Matemática é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos mentais ou físicos para resolver problemas ou provar propriedades visuais ou espaciais. Desta forma, promover a visualização em Matemática e, nas ciências, se justifica, segundo Bloom (1988), tanto na importância de se ensinar Geometria, assim como, no seu papel nas atividades do dia a dia.

Apesar da utilidade da visualização e das representações geométricas no ensino da Matemática ser reconhecida pela maioria dos educadores matemáticos e também por professores de Matemática, além de ser apontada como fundamental para a formação matemática dos estudantes nos guias curriculares e nas propostas de ensino, há pouca ênfase a esse respeito na sala de aula. (PASSOS, 2000, p. 95)

O processo de visualização é a habilidade de ver aquilo que não está em nossa frente. Esse processo “[...] precisa de um bom tipo de gatilho ou estímulo, então diferentes tarefas estimularão imagens diferentes” (BISHOP, 1988, p. 190). Segundo Catalá, Flamarich e Aymemmi (1995), os estímulos visuais para obter uma adequada percepção espacial no desenvolvimento desse processo poderão ser feito por meio do uso de modelos concretos, desenhos, dobraduras ou imagens na tela do computador.

Os diferentes tipos de visualização de que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhes seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78)

Alguns autores defendem que alguns alunos não têm um suporte visual necessário para realização das atividades propostas, e os outros apresentam essa habilidade desenvolvida pelo contexto onde está inserida. Exemplo disso é que o filho de um pedreiro que costuma ajudar seu pai tem uma noção de simetria maior do que os outros alunos.

De estudos como esses, há algumas evidências de que uma aprendizagem ambiente em que materiais estruturados e manipuladores predominar pode ajudar a incentivar a criação de visualizações e, portanto, o próprio processo de visualização. (BISHOP, 1988, p. 191)

Desta forma, surgiu o interesse na investigação deste trabalho e na busca de uma proposta que auxilie os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental na melhor prática da matemática escolar.

## 6 | PROPOSTA PARA TRANSPOR DO 3D ↔ 2D

É comum alunos terem dificuldades para desenhar no plano objetos tridimensionais, por conta da incapacidade de reconhecer e identificar os elementos do objeto. Mesmo assim, muitos professores continuam insistindo em desenhar as figuras no quadro (quando sabem desenhar), pois é a forma mais confortável para eles no preparo de sua aula. Alternativamente, muitas vezes eles recorrem aos livros didáticos, nos quais normalmente a figura é apresentada sempre da mesma forma, evitando o estímulo da *misconception*.

Nossa vida comum oferece muitas interações entre plano e espaço, e a maioria deles implicam na disseminação de algum tipo de informação espacial por meio de certas figuras planas (desenhos, esquemas, imagens, figuras, etc.). E as que aparecem nos livros didáticos são planas! Esta questão é particularmente importante para Geometria Espacial, pois qualquer tipo de representação plana de objetos espaciais tem alguma perda de informação. Portanto, uma pessoa que lê uma representação plana de um sólido precisa recuperar o máximo de informações perdidas. (GUTIÉRREZ, 1996b, p. 34)

Tendo em vista esse tipo de comportamento, deixamos a seguir algumas sugestões de como esse processo poderá ser empregado pelos professores dos anos iniciais ao abordar em sala de aula cada novo conceito geométrico.

Ao iniciar qualquer atividade em geometria na qual seja necessária a utilização de sua representação, e seguindo o primeiro nível de van Hiele, que é o da Visualização, devemos apresentar aos alunos os objetos manipulativos. Para entender esse processo, escolhemos como exemplo a aprendizagem do conceito de pirâmide. Primeiramente devemos mostrar para aos alunos as diversas formas de pirâmides através dos objetos concretos, para que os alunos possam manipula-los.

Ao mostrar as diferentes pirâmides aos alunos, de diferentes bases, oblíquas ou não, e depois que os mesmos puderam manipula-las, o professor deve dialogar com alunos levantando questionamentos (fase 1), tais como: “Todas as figuras são iguais?”, “Quais são

as semelhanças e diferenças entre elas?”, “Quais as figuras que se encontram em cada uma de suas fases (lados)?”. A nomenclatura *fase* já poderá ser introduzida, mas não será um erro mencionar *lado* nessa fase inicial. Mas é sempre bom mostrar a diferença entre ambos os nomes<sup>1</sup>.

Após esse momento deve-se deixar que os alunos expressem livremente as observações levantadas (fase 3). Os nomes errados não serão considerados erros, e sim uma âncora para introduzir a nomenclatura correta.

Se necessário, o professor poderá pedir que os alunos coloquem todas as pirâmides na mesa, primeiramente com a fase triangular apoiada na mesa e depois com a fase que não é triangular, ou seja, a base (fase 2). Assim, o professor pode continuar o questionamento aos alunos (fase 1): “Em qual posição as pirâmides ficaram mais confortáveis para serem vistas? Se os alunos responderem a primeira, o professor deve repetir o processo anterior; mas caso eles considerem a segunda, isso gera uma oportunidade de informar que o polígono que está apoiado na mesa é a base da pirâmide e seus diferentes nomes dependerá da figura que se encontra em sua base. Pirâmide de base...

O fechamento (fase 5) se dará após os alunos reconhecerem as figuras pelo nome, quando o professor mostra cada uma das pirâmides para eles. Será normal se os alunos não souberem alguns dos nomes dos polígonos, é uma oportunidade de o professor comentar ou relembrar seus nomes. Além disso os alunos ainda precisam desenvolver a habilidade de reconhecer uma pirâmide qualquer no meio de outros sólidos. Para tal, o professor poderá mostrar vários sólidos e perguntar aos alunos quais deles são pirâmides.

Numa segunda aula para desenvolver esse processo visual de reconhecer a pirâmide também representado em 2D, é interessante mostrar sua figura pela tela do computador. Um programa que permite fazer isso é o Poly Pro, no qual os alunos além de visualizar os objetos, eles também podem manipulá-los. Esse é o primeiro passo para introduzir ao aluno a representação bidimensional de um objeto tridimensional.

De uma perspectiva didática, o conhecimento das potencialidades do ambiente computacional constitui-se em um importante fator na formação inicial e continuada do professor. Os estudantes podem usar diferentes estratégias de solução de problemas e, nesse sentido, se um estilo particular de ensino for usado pelo professor, como única metodologia de ensino, poderá estar contribuindo para se tornar em mais um obstáculo à aprendizagem dos estudantes. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 129)

Somente após esses processos que se poderia abordar os desenhos, mas sem que os alunos o façam. O professor poderia recorrer aos desenhos dos livros, ou até mesmo feitos no quadro, mas este último será somente se o professor souber desenhar a figura. Um desenho mal feito poderá atrapalhar a aprendizagem e criar nos alunos falsas imagens mentais. Os alunos reconheceriam assim que aquela imagem é apenas um ponto de vista daquele objeto, pois já teriam a imagem mental da pirâmide.

<sup>1</sup> Lado é linha que limita uma figura plana e Face é qualquer um dos polígonos que limitam um poliedro.

[...] resultados obtidos mostram uma grande variedade de formas de representação de sólidos que, independentemente da sua correção e qualidade, vão do totalmente gráfico para o totalmente verbal, com um grupo variado de representações misturadas em que desenhos e textos têm mais ou menos o mesmo peso na descrição. Além disso, a diversidade das formas de representação que surgem em uma experiência específica, e a frequência de cada um, tem muito a ver com a forma como o exercício foi planejado [...]. (GUTIÉRREZ, 1998, p. 202)

Com a representação bidimensional de um objeto tridimensional, por meio do desenho ou figuras variadas, é preciso fazer com que os alunos as analisem para encontrar relações e informações através de termos visuais. Muitas vezes é necessário para facilitar esse processo, também apresentar o objeto real do desenho ou figura analisada.

Nessa última etapa voltariam os questionamentos e orientação direta (fase 1 e 2 respectivamente). “Qual é a base do objeto?”, “Onde se encontra a base no desenho ou figura?”. Sempre deixando os alunos explicitarem suas opiniões (fase 3), assim como perguntar à turma o que acham da opinião do colega.

O desenho propriamente dito do objeto tridimensional não é recomendável para essa fase de ensino, pois os alunos ainda estão em processo inicial do desenvolvimento do pensamento geométrico, além de não estar com a coordenação motora fina desenvolvida. Além do mais, o aluno que não conseguir reproduzir o desenho se sentirá frustrado, e esse é um sentimento que não combina com o processo de ensino e aprendizagem.

A construção do desenho de uma figura tridimensional é um processo ainda em pesquisa pelo primeiro autor deste trabalho. Muitas leituras e pesquisas ainda devem ser feitas para se aprofundar mais nesta temática.

## 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os professores que lecionam nos anos iniciais, vêm apresentando dificuldades de trabalhar com a geometria, com os materiais geométricos, e muitas vezes repetem a metodologia adotada por seus professores quando alunos, ou por colegas de trabalho. Além disso, tem professores que preferem não ensinar esta parte do conteúdo ou quando o faz, ensinam muito superficialmente, dando preferência a nomenclatura, construção e reconhecimento sem seguir uma estratégia específica.

Em relação à metodologia adotada por esses professores, muitos seguem o livro didático que apresentam as figuras geralmente da mesma forma, ou por meio de desenhos mal feitos ou mal interpretados.

Quanto ao uso dos materiais concretos, existem aqueles que não contribuem com a aprendizagem, e às vezes até mesmo dificultam. Exemplo disso são os blocos geométricos, nos quais um quadrado tem espessura significativa, construindo uma imagem mental errada nos alunos. Por isso muitas vezes um cubo é um quadrado para os alunos, pois a imagem mental formada foi apenas de uma das faces laterais.

Ainda é preciso mais pesquisa de trabalhos que explorem o desenvolvimento da visualização, principalmente nos anos iniciais, formação adequadas aos profissionais que atuam nesta fase de ensino, materiais geométricos adequados, livros didáticos que se preocupam com essa temática e um sistema de ensino que propicie todos os aspectos mencionados anteriormente.

## 8 | REFERÊNCIAS

BECKER, Fernando; FRANCO, Sérgio. *Revisitando Piaget*. 3ª ed. Porto Alegre: Mediação, 2002.

BISHOP, Alan J. A review of research on visualisation in mathematics education. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 12th, 1988, Veszprem, Hungary. *Anais...Hungary: To the educational resources information center*, 1988. 1 v. pp. 187 – 193.

CATALÁ, C. A., FLAMARICH, C. B. e AYMEMMI, J. M. F. *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis. 1995.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. *Springer*, Netherlands, 1993. Educational Studies in Mathematics, vol. 24, n. 2, pp. 139-162

GUTIÉRREZ, Angel. Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures. In A. R. BATTURO (ed.). *New Directions in Geometry Education*. Brisbane, Australia: Centre for Math. And Sc. Education, Q.U.T, 1996b, pp. 33-42

GUTIÉRREZ, Angel. Las Representaciones Planas de Cuerpos 3-Dimensionales en la Enseñanza de La Geometría Espacial. Separata de: *Revista Ema*, vol. 3, n.3, pp. 193-220, 1998.

GUTIÉRREZ, Angel. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.). *Proceedings of the 20<sup>th</sup> PME Conference*. Spain: University of Valencia, July, v.1, 1996a, pp. 3-19

JOHNSON-LAIRD, Philip N. *Mental Models*. 6 ed. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1995. 234 p.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. *Novas tecnologias no ensino da matemática: tópicos em ensino de geometria*. Rio de Janeiro: UFF, 2008. 223 p.

MURAKAMI, Cristiane; FRANCO, Valdeni S. *Relações Topológicas na educação infantil: o que conhece o professor?* EBRAPEM, Unesp: Rio Claro, 2008.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Cármen Lucia Brancaglioni; *A Geometria nas Séries Iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: UDFSCAR, 2003. 151 p.

PASSOS, Cármen Lúcia B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na*

sala de aula. Campinas, 2000. 364 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

UTIMURA, Grace Z. *Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5º ano*. São Paulo, 2015. 191 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

VIANA, Odalea A.; Figuras Planas e Espaciais: como trabalhar com elas nos anos iniciais do ensino fundamental. Salto para o futuro: *Geometria no Ciclo de Alfabetização*. TV Escola/MEC, Boletim 7, pp. 23-30, set. 2014.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aeração de Grãos 47

Algoritmos 98, 99, 100, 101, 172, 173, 174, 178

Análise estatística 9, 10

Análise Matemática 16

Ângulo 12, 102, 103, 104, 105, 107

Aplicativo 13, 180, 182, 183, 184, 185, 187, 190, 191, 192, 193

Aprendizagem 9, 12, 13, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 104, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 152, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 191, 192, 194, 195, 197, 209, 210, 211, 212, 213, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 234, 239, 250, 253

Aprendizagem Significativa 101, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 194

Arte 13, 86, 111, 115, 128, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 240

Asset Price 11, 1, 3, 4

### B

BNCC 135, 136, 139, 144, 167, 169, 178, 182, 183, 210, 211, 212, 215, 219, 220

### C

Cálculo 12, 14, 10, 12, 68, 69, 73, 78, 83, 92, 115, 116, 119, 172, 173, 174, 176, 199, 231, 241, 242, 246, 247, 248, 249, 250, 253

Campos Semânticos 241, 243, 244, 254, 255

Cartografia 13, 180, 183, 184, 185, 191, 192, 193, 194

Circunferência da cintura 9, 10, 11, 12, 13

Conjunto Denso 26

Contextualização 165, 166, 167, 169, 170, 171, 178, 188, 189, 192

Curso de Pedagogia 126, 128, 155, 160

### D

Derivabilidade 12, 68, 73, 80

Desenhos 104, 105, 107, 145, 146, 149, 150, 151, 152, 185, 189, 193

Diferenciabilidade 12, 68, 73, 82

Distribuição de Ar 47

## E

EDPs 41

Educação Básica 9, 10, 88, 94, 98, 99, 110, 111, 112, 121, 135, 136, 139, 140, 142, 143, 168, 170, 174, 175, 195, 210, 221, 240, 256

Educação Matemática 13, 100, 101, 108, 110, 111, 112, 120, 121, 132, 134, 135, 139, 143, 144, 153, 155, 157, 159, 165, 166, 168, 179, 209, 228, 240, 241, 243, 244, 254, 255, 256

Egito 229, 230, 233, 236

Ensemble Kalman filter 1

Ensino 9, 10, 12, 13, 14, 68, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 100, 101, 102, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 174, 175, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 188, 191, 192, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 206, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 250, 253, 254, 255, 256

Espaços de Banach 16

Espaços Lp 26

Etnomatemática 179, 228, 241, 243, 244, 245, 254, 255

## F

Família 12, 19, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 127, 128, 254

Ferramenta de Ensino 125, 195, 196, 198

Filas 58, 59, 66

Formação de Professores 9, 122, 138, 142, 153, 158, 160, 179, 233, 244, 256

Formação inicial de Professores 155, 163

Frações 14, 103, 104, 105, 203, 217, 222, 223, 224, 226, 227

Função Simples 26, 36, 37, 39, 40

## I

Infantil 11, 9, 10, 13, 14, 84, 85, 86, 87, 88, 118, 143, 153, 178, 194, 228

Inferência Bayesiana 58, 60

Integral de Lebesgue 26, 40

Interdisciplinaridade 108, 109, 144, 165, 168, 169, 170, 171, 177, 178, 179, 181, 213, 220, 240

## L

Letramento Matemático 165, 167, 171

Local volatility 11, 1, 2, 3, 7, 8

Lúdico 84, 210, 212, 219, 226

## **M**

Mapas Conceituais 13, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132

Matemática 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 9, 10, 12, 16, 26, 41, 47, 48, 56, 68, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 178, 179, 184, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 208, 209, 210, 211, 213, 220, 221, 222, 223, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 238, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 250, 252, 254, 255, 256

Medida 10, 14, 26, 27, 33, 40, 102, 103, 104, 127, 148, 193, 217, 246, 247, 251, 252

Metodologia 10, 42, 91, 94, 98, 100, 108, 110, 111, 113, 120, 126, 132, 138, 143, 145, 146, 151, 152, 161, 170, 199, 210, 211, 212, 213, 219, 221, 229, 230, 232, 234, 239, 240, 241, 254

Metodologia Ativa 210, 211, 212, 213, 219, 221

Mobile Art 180, 184, 185, 187, 191

Modelagem Computacional 47

Modelagem Matemática 11, 47, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 177, 178, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 209

## **N**

Números Decimais 195, 211, 217, 220, 223, 228

## **O**

Obesidade 11, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 209

Operações 12, 98, 99, 100, 101, 167, 171, 195, 196, 198, 199, 211, 215, 217, 219, 228

Operadores Elípticos 41

## **P**

Princípio da Limitação Uniforme 16, 17, 22, 24, 25

Princípios do Máximo 41

Professor 9, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 101, 102, 103, 106, 108, 109, 112, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 139, 142, 145, 146, 148, 149, 150, 151, 153, 158, 159, 161, 163, 164, 167, 170, 171, 174, 177, 178, 179, 182, 195, 196, 209, 212, 213, 219, 222, 224, 227, 232, 234, 244, 245, 252, 254, 256

## **R**

Recursos didáticos 14, 222

Relação de proporção direta 9, 12

Representação 131, 138, 141, 145, 146, 147, 148, 150, 151, 152, 181, 183, 188, 189, 197, 199, 200, 203, 222, 223, 227, 236, 237

Resolução de Problemas 128, 131, 165, 167, 168, 197

## **S**

Sentidos 13, 123, 139, 159, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194

Significar 73, 222

Simulação 11, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 56, 58, 66, 183

Sistema Numérico 230, 234, 235, 238, 239

Sistemas de Numeração 12, 98, 99, 100, 101, 234

Sistemas Lineares 195, 196

Sustentabilidade 12, 84, 85, 86, 87

## **T**

Tecnologias Digitais 13, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 181, 182, 220

Teorema de Banach-Steinhaus 16, 22, 24, 25

Tikhonov regularization 1

Transferidor 102, 103, 104

## **V**

Visualização 14, 117, 145, 146, 148, 149, 150, 152

## **W**

Web Currículo 13, 134, 135, 137, 143

## **Y**

YouTube 12, 108, 109, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática