

Américo Junior Nunes da Silva  
(Organizador)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Américo Junior Nunes da Silva  
(Organizador)



# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

### **Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

### **Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

### **Bibliotecária**

Janaina Ramos

### **Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremona

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

### **Imagens da Capa**

Shutterstock

### **Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

### **Revisão**

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dr. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Alborno – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

## Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecária:** Janaina Ramos  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Correção:** Mariane Aparecida Freitas  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizador:** Américo Junior Nunes da Silva

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia.

ISBN 978-65-5706-440-5

DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro ***“Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática”***, nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se

enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
CALIBRATION OF LOCAL VOLATILITY SURFACES WITH UNCERTAIN ASSET PRICE: AN ENKF-ENKF APPROACH	
Xu Yang	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027101</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>9</b>
A MATEMÁTICA AUXILIANDO NO COMBATE A OBESIDADE INFANTIL	
Nilton Rosini	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027102</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>16</b>
APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAIRE	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027103</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>26</b>
UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM $\mathbb{P}$	
Michele Martins Lopes	
Angela Leite Moreno	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027104</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>41</b>
O PRINCÍPIO DO MÁXIMO E APLICAÇÕES	
Francisco Erisson Batista Gomes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027105</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>47</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO 3D DE GRÃOS AGRÍCOLAS NO PROCESSO DE ARMAZENAGEM	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Rodolfo França de Lima	
Ricardo Klein Lorenzoni	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027106</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>58</b>
DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DE DESEMPENHO DE UMA FILA $M/M/1$ ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM BAYESIANA	
Nilson Luiz Castelucio Brito	
Celimar Reijane Alves Damasceno Paiva	
Pedro Humberto de Almeida Mendonca Gonzaga	
Rodrigo Fonseca Santana Costa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4052027107</b>	

<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>68</b>
DERIVABILIDADE E DIFERENCIABILIDADE NO ENSINO DO CÁLCULO Pedro Pablo Durand Lazo <b>DOI 10.22533/at.ed.4052027108</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>84</b>
A MATEMÁTICA NA SUSTENTABILIDADE Silvana Grimes Daiana Lana Janete Bizatto Ferreira <b>DOI 10.22533/at.ed.4052027109</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>89</b>
INFLUÊNCIA DA PARTICIPAÇÃO DA FAMÍLIA NO PROCESSO DE ENSINO- APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL Diane Saraiva Fronza Guilherme Schildt Duarte Lara Rafaela Menezes Marcelo Eder Lamb <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271010</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>98</b>
OPERAÇÕES E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA Leniedson Guedes dos Santos Rodrigo Ferreira dos Santos Ulisses Suriano da Silva Neto Maurílio Messias Bomfim Alves <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271011</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>102</b>
TEM ÂNGULO EM TODO LUGAR Alessandra dos Santos Fernandes <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271012</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>108</b>
INVESTIGANDO AS POTENCIALIDADES DO YOUTUBE: UMA PRÁTICA COM MODELAGEM João Carlos Lemos Junior Martinho Wojdylo Ronaldo Jacumazo Dionísio Burak <b>DOI 10.22533/at.ed.40520271013</b>	

<b>CAPÍTULO 14.....</b>	<b>122</b>
ASPECTOS PRÁTICOS NA FORMAÇÃO DO DOCENTE EM PEDAGOGIA A PARTIR DO TRABALHO COM MAPAS CONCEITUAIS COMO ESTRATÉGIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA	
André Ricardo Lucas Vieira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271014</b>	
<b>CAPÍTULO 15.....</b>	<b>134</b>
AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A APROPRIAÇÃO DO WEB CURRÍCULO PELOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA COMO O "X" DA QUESTÃO	
Vera Lúcia de Oliveira Freitas Ruas	
Josué Antunes de Macêdo	
Edson Crisostomo dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271015</b>	
<b>CAPÍTULO 16.....</b>	<b>145</b>
A PASSAGEM DO 3D ↔ 2D NOS ANOS INICIAIS: UMA PROPOSTA POSSÍVEL	
Julio Silva de Pontes	
Celso Ribeiro Campos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271016</b>	
<b>CAPÍTULO 17.....</b>	<b>155</b>
CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS DE PEDAGOGIA SOBRE A QUALIDADE DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL	
Michela Caroline Macêdo	
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271017</b>	
<b>CAPÍTULO 18.....</b>	<b>165</b>
LEITURA, INTERPRETAÇÃO E ESCRITA MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA AS VIVÊNCIAS EM UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA NO SEMIÁRIDO BAIANO	
Eliane Ferreira de Santana	
Américo Junior Nunes da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271018</b>	
<b>CAPÍTULO 19.....</b>	<b>180</b>
APLICATIVO EDUCACIONAL ARTE AQUI!: UMA PROPOSTA BASEADA NA CARTOGRAFIA DOS SENTIDOS	
Kelen Ricardo dos Reis	
Carine Geltrudes Webber	
Roberta Dall Agnese da Costa	
Isolda Gianni de Lima	
Laurete Teresinha Zanol Sauer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271019</b>	

<b>CAPÍTULO 20.....</b>	<b>195</b>
<b>MODELAGEM E ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA</b>	
Felipe Manoel Cabral	
Marcela Lima Santos	
Claudia Mazza Dias	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271020</b>	
<b>CAPÍTULO 21.....</b>	<b>210</b>
<b>O SABOR DA MATEMÁTICA – O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS E RECEITAS CULINÁRIAS</b>	
Domingos Antonio Lopes	
Cristiana Andrade Poffal	
Cinthy Maria Schneider Meneghetti	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271021</b>	
<b>CAPÍTULO 22.....</b>	<b>222</b>
<b>VIVÊNCIAS MATEMÁTICAS: RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE FRAÇÕES</b>	
Mírian Silva Ferreira	
Jairo Alves Batalha	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271022</b>	
<b>CAPÍTULO 23.....</b>	<b>229</b>
<b>ENSINO DE MATEMÁTICA: SISTEMA NUMERICO EGÍPCIO POR MEIO DE UM CENÁRIO.</b>	
Jeizi Ferreira Santos	
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa	
Eusom Passos Lima	
Izaías Silva Rodrigues	
Karoline de Sarges Fonseca	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
Maiky Bailão Sardinha	
Marcos Vinicius Silva Alves	
Otavio Junior Reis de Moraes	
Pedro Augusto Lopes Rosa	
Rosana Pinheiro Tavares	
Sebastião Erik Pinheiro e Pinheiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271023</b>	
<b>CAPÍTULO 24.....</b>	<b>241</b>
<b>PROCESSOS (NÃO) HEGEMÔNICOS DE MATEMATIZAR: ANÁLISE DE LIVROS (PARA) DIDÁTICOS SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS</b>	
Weverton Augusto da Vitória	
Rodolfo Chaves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.40520271024</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR.....</b>	<b>256</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO.....</b>	<b>257</b>

Data de aceite: 01/10/2020

**Pedro Pablo Durand Lazo**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná -  
UNIOESTE

<http://lattes.cnpq.br/6562031070856171>

**RESUMO:** Discute-se o uso dos termos *derivada de uma função num ponto*, *diferencial de uma função num ponto*, *função derivada* e *função diferencial* no contexto das disciplinas de Cálculo. Constata-se que as definições nem sempre correspondem ao quadro teórico que a Análise oferece e como os abusos de linguagem e de notação escondem ou distorcem a verdadeira natureza destes objetos.

**PALAVRAS - CHAVE:** Cálculo, Derivabilidade, Diferenciabilidade.

### DERIVABILITY AND DIFFERENTIABILITY IN THE TEACHING OF CALCULUS

**ABSTRACT:** The use of the terms *derivative of a function at a point*, *differential of a function at a point*, *derived function* and *differential function* is discussed in the context of Calculus disciplines. It turns out that the definitions do not always correspond to the theoretical framework that the Analysis offers and how abuses of language and of notation hide or distort the true nature of these objects.

**KEYWORDS:** Calculus; Derivability; Differentiability.

## 1 | INTRODUÇÃO

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciência e Tecnologia estudam-se os conceitos, propriedades e aplicações das derivadas de funções reais de variável real. Pretende-se, através da leitura de alguns textos de freqüente uso, se constatar se as definições se correspondem com as dadas nos textos de Análise. A Seção 1 trata dos conceitos de *Derivada e Diferencial*. A Seção 2 trata acerca da *derivada de uma função num ponto* e da *função derivada*. Finalmente, na Seção 3, define-se a *diferencial de uma função num ponto* e a *diferencial de uma função*.

## 2 | DERIVADA E DIFERENCIAL

A *derivabilidade* e a *diferenciabilidade*, são conceitos fundamentais no Cálculo e por isso formam parte do conteúdo das disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciências e Engenharia. Trata-se então de verificar se as definições dadas no ensino, particularmente nos textos, se correspondem com as dadas num marco teórico de um nível aceitável na matemática. Iniciemos esta tarefa comentando definições encontradas em dois textos.

### 1.3 A Derivada

Suponha que uma curva seja o gráfico de uma função  $f(x)$ . Geralmente é possível obter a fórmula que fornece a inclinação da curva  $y = f(x)$  em cada ponto. Esta fórmula para a inclinação é chamada de **derivada** de  $f(x)$  e é escrita  $f'(x)$ . Para cada valor de  $x$ ,  $f'(x)$  fornece a inclinação da curva  $f(x)$  no ponto com primeira coordenada  $x$ . (...). O processo de obter  $f'(x)$  para uma dada função  $f(x)$  é chamado de **diferenciação**.

(GOLDSTEIN, 2000, P.70)

Aqui, **derivada é uma fórmula para a inclinação** (da curva  $y = f(x)$ ) e **diferenciação** (talvez devesse se disser *derivação*) **é o processo de obter  $f'(x)$** , isto é, de aplicar a fórmula. É compreensível a necessidade de orientar-se pelo desejo de uma aplicação “prática” imediata do conceito, porém isto não deveria fazer-se dando definições que não caracterizam de forma precisa os objetos. A seguir extraímos também de um texto de cálculo a definição de diferencial. Neste texto define-se primeiro a **diferencial da variável dependente** e logo a **diferencial da variável independente**.

4.20.2 Diferencial.

Sejam  $y = f(x)$  uma função derivável e  $\Delta x$  um acréscimo de  $x$ . Definimos:

(a) a diferencial da variável independente  $x$ , denotada por  $dx$ , como  $dx = \Delta x$

(b) a diferencial da variável dependente  $y$ , denotada por  $dy$ , como

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

De acordo com a definição anterior, podemos escrever

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Assim, a notação  $\frac{dy}{dx}$  já usada para  $f'(x)$ , pode agora ser considerada um quociente de diferenciais.

(FLEMMING, 2006, p.174).

Das definições dadas, se deduz a interpretação de derivada como quociente de diferenciais. Isto é, **derivada é quociente de diferenciais**.

Se considerarmos que a Análise, de alguma forma, é fundamentação do Cálculo,

registremos algumas definições dadas em textos desta disciplina. Vejamos primeiro a seguinte definição de **função diferenciável num ponto**.

**Definition.**

On dit qu'une fonction  $f$  est **différentiable** au point  $x_0$  s'il existe une application linéaire  $h \rightarrow lh$  et une fonction  $h \rightarrow \alpha(h)$  définie sur une intervalle  $I$  de centre zéro telles que

$$(\forall h \in I): f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\alpha(h) \quad (1)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha.$$

L'application:  $h \rightarrow lh$  est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fonction  $f$  au point  $x_0$  ou encore **différentielle** de  $f$  au point  $x_0$ . On la note  $df_{x_0}$ . Le nombre  $l$  s'appelle le coefficient de la différentielle de  $f$  au point  $x_0$ .

On a donc pour tout  $h$  reel,  $df_{x_0}(h) = lh$ .

GOURION, 1971, p.50).

Observe-se que é a função  $a$  que tem diferencial num ponto e não a sua variável dependente e a sua variável independente. Observe também que a **diferencial de uma função num ponto é uma função linear e não um número**.

**Definição 1.** *é diferenciável no ponto  $x_0$  se existe uma função linear  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h \rightarrow ah$  e uma função  $h \rightarrow \varphi(h)$  definida num intervalo  $I$  de centro 0 tais que*

$$\forall h \in I : f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

A função linear  $h \rightarrow ah$  chama-se a *diferencial da função  $f$  no ponto  $x_0$* , denota-se  $df_{x_0}$ . Assim,

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; df_{x_0}(h) = ah$$

### **Théorème et définitions**

Dire que  $f$  est différentiable au point  $x_0$  est équivalent à dire que la fonction:

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite au point  $h = 0$ . Cette limite, quand elle existe, est le coefficient de la différentielle de  $f$  au point  $x_0$ . Cette limite, quand elle existe, s'appelle **dérivée** de  $f$  au point  $x_0$  et on dit que  $f$  est **dérivable** au point  $x_0$ . (GOURION, 1971, p.50).

**Definição 2.**  $f$  é derivável no ponto  $x_0$  se a função  $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  definida num intervalo  $I$  de centro 0 tem limite em  $h = 0$ . Isto é,

$$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

O número real  $a$  chama-se a *derivada da função  $f$  no ponto  $x_0$*  e denota-se  $f'(x_0)$ . Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Teorema 3.** Sejam  $f$  uma função definida num Intervalo aberto  $I$  e  $x_0$ . Então

$$f \text{ é derivável em } x_0 \Leftrightarrow f \text{ é diferenciável em } x_0$$

*Demonstração.*

( $\Leftarrow$ )  $f$  é derivável em  $x_0$ . Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \right) = 0$$

Fazendo  $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a$ . Temos que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Logo,  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .

( $\Leftarrow$ )  $f$  é diferenciável em  $x_0$ . Então

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Donde,

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

Logo  $f$  é derivável em  $x_0$ .

### 3 I DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E FUNÇÃO DERIVADA.

No texto citado a seguir definem-se *função derivável num ponto*, *função derivável num intervalo* e *função derivada*.

#### DÉFINITION 16.1

- Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $x_0$  un élément de  $I$  et  $f$  une application définie sur  $I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand  $h$  tend vers 0. Cette limite, note  $f'(x_0)$ , est appelée dérivée de  $f$  en  $x_0$ .

- On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $J \subset I$  si pour tout  $x \in J$ ,  $f$  est dérivable en  $x$ . On appelle dans ce cas dérivée de  $f$  et on note  $f'$  l'application de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $x \in J$  associe  $f'(x)$  la dérivée de  $f$  en  $x$ .

(BALAC, 2009, p.747)

A seguir se enuncia o teorema que liga os conceitos de *função derivável num ponto* e *função diferenciável num ponto*. Nele afirma-se também sua equivalência.

Le théorème fondamental de la dérivation en un point

a) Le théorème:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ . Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour tout  $h$  tel que  $x_0 + h$  appartienne à  $I$ , on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$

(le taux d'accroissement de  $f$  au point  $x_0$  admet  $a$  por limite en zéro).(...).

b) Définitions :

Pour exprimer qu'une fonction satisfait 1. ou 2. du théorème fondamental, on dit que  $f$  est dérivable au point  $x_0$ . De plus, le nombre réel  $a$  est appelé nombre

dérive de  $f$  au point  $x_0$ . L'écriture  $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$  est appelée développement limité à l'ordre 1 de  $f$  au point .

(TERRACHER, 1987, p.285)

Demonstração<sup>1</sup>. Seja  $a$  um número real qualquer. Consideremos a função  $\varphi$  definida por:

$$\varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \text{ quando } x_0 + h \in I \text{ e } h \neq 0$$

Então, para todo  $h$  tal que  $x_0$  (incluindo  $h = 0$ ):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$$

Da definição de limite de uma função em zero segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

Anotemos aqui algumas observações:

1.  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  e  $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. O teorema fundamental diz que

$$f \text{ é derivável no ponto } x_0 \Leftrightarrow f \text{ é diferenciável no ponto } x_0$$

3. Pode-se observar que **ser derivável num ponto** não é o mesmo que **ser diferenciável num ponto**. São sim **equivalentes**. De forma natural, a **derivabilidade** deveria significar a **existência da derivada** enquanto que a **diferenciabilidade** teria que significar a **existência da diferencial**.

4. Também a derivada de  $f$  no ponto  $x$ ,  $f'(x)$ , é o coeficiente da diferencial de  $f$  no ponto  $x$ :

$$df_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

5. A escrita  $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$  chama-se **desenvolvimento limite de ordem 1 de  $f$  no ponto  $x_0$** .

Em muitos textos de cálculo os autores associam a diferenciabilidade com a existência da derivada. Além dos citados anteriormente, temos, por exemplo:

We recall that a function  $f$  is *differentiable* at a point  $x_0$  if it has a derivative at  $x_0$ .  
When we say that  $f$  is *differentiable*, we mean that it has a derivative at every

<sup>1</sup> Traduzido pelo autor deste artigo do texto original de TERRACHER.

point of its domain.

(MOISE, 1972, p.89)

Aqui, o autor lembra definições dadas: uma função  $f$  é **diferenciável** em um ponto  $x_0$  se tiver **derivada** em  $x_0$ . Quando dizemos que  $f$  é **diferenciável**, queremos dizer que ela tem **derivada** em cada ponto de seu domínio.<sup>2</sup>

A seguir uma definição de *função derivada*  $f'$ :

Para qualquer função  $f$ , definimos a função derivada  $f'$  por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que este limite exista. Dizemos que a função é **diferenciável** ou **derivável** em qualquer ponto  $a$  em que a função derivada exista. (HUGHES-HALLETT, 1999, p.109)

Nesta definição resulta pouco claro qual é o domínio da função derivada  $f'$ . Tentemos reescrever esta definição:

Seja  $A = \text{Dom } f' \cap \{a \mid f'(a) \text{ existe}\}$ , então, definimos  $f'$  como sendo  $f': A \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto f'(a)$

Finalmente, damos uma definição de *função derivada de uma função*  $f$ .

**Definição 4.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $I$ . Diz-se que  $f$  é *derivável num intervalo*  $J \subset I$ , quando é derivável em todo ponto deste intervalo. A função de  $J$  em  $\mathbb{R}$  que a todo número real  $x$  de  $J$  associa a derivada de  $f$  no ponto  $x$ , chama-se *derivada de  $f$*  e denota-se  $f'$ . Assim,

$$f': J \rightarrow \mathbb{R}; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## 4 | DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E DIFERENCIAL

O primeiro parágrafo da seguinte citação textual merece um comentário. Nele se observa o fato que a definição da derivada dada não permite generalizar de forma natural a noção de derivada às funções de varias variáveis. Para verificar este fato é suficiente constatar que a expressão

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \text{ não tem sentido para } h \in \mathbb{R}^n, \text{ se } n > 1.$$

La définition de la dérivée donnée à la définition 16.1, page 747, ne permet pas de généraliser de manière naturelle la notion de dérivée aux fonctions de

<sup>2</sup> O sublinhado e a tradução são do autor deste artigo.

plusieurs variables. Cette généralisation passe par la notion de *différentielle* que nous allons étudier dans le cas des fonctions d'une variable réelle.(...)

**DÉFINITION 16.3** Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **différentiable en**  $x_0 \in I$  s'il existe une application  $\epsilon$  définie dans un voisinage  $V$  de 0 et un réel  $\alpha$  tel que

$$(\forall h \in V): f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h + h\epsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

L'application linéaire  $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha h$$

est appelée différentielle de  $f$  en  $x_0$ . (BALAC, 2009, p.758)

Para superar esta limitação, podemos tomar em consideração que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

Donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - a \cdot h|}{|h|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \alpha(h)|}{|h|} = 0 \text{ com } \alpha(h) = a \cdot h$$

Aparece assim a diferencial de  $f$  no ponto  $x_0$  como a função linear  $\alpha$  definida por  $\alpha(h) = a \cdot h$ . No caso de uma função  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  poderia considerar-se as normas e a expressão:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \alpha(h)\|}{\|h\|} = 0 \text{ onde } \alpha(h) = a \cdot h \text{ com } a \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n).$$

A seguinte citação textual enuncia a equivalência de *ser derivável num ponto e ser diferenciável num ponto* e que a *diferencial de  $f$  em  $x_0$  é a função  $h \mapsto f'(x_0)h$* .

**PROPOSITION 16.6** Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un élément de  $I$  et  $f$  une fonction application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  est différentiable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $x_0$ . De plus, la différentielle de  $f$  en  $x_0$  est

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0) \cdot h$$

(BALAC, 2009, p.759)

A seguinte definição, extraída de um texto de Análise, assim como a definição citada acima, não revela de forma imediata a natureza da diferencial de uma função num ponto. Só mais na frente fala da função linear correspondente e a define como a diferencial da função no ponto.

6°) **Différentielle.**-a) On dit que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{C}$  est différentiable au point  $x_0$  de  $\mathbf{C}$  s'il existe un nombre  $\alpha$  tel que la fonction  $\epsilon$  définie, pour  $h \neq 0$ , par la formule

$$(3) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + |h| \cdot \epsilon(h)$$

admette la limite 0 quand  $h$  tend vers 0. (On suppose  $|h|$  assez petit pour que  $x_0 + h \in \mathbf{C}$ ).

(CANAG, 1972, p.120).

Observe-se que nesta definição, assim como na definição 16.3 citada anteriormente, se diz que **existe um número**  $a$  e na expressão (3) aparece o termo  $a \cdot h$ . Pode-se de uma forma natural identificar o numero real  $a$  com a função linear  $h \rightarrow a \cdot h$ . Esta identificação é possível pela bijeção:

$$\mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \alpha \mapsto \psi_\alpha, \text{ onde } \psi_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \alpha \mapsto \psi_\alpha(h) = \alpha \cdot h.$$

**Proposição 5.** *Uma função  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  é linear se, e somente se, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\psi(h) = a \cdot h.$$

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  um número real e seja a função  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \psi(h) = a \cdot h$ . Temos que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R} : \psi(h + k) = \alpha(h + k) = \alpha h + \alpha k = \psi(h) + \psi(k)$$

Também,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \psi(\lambda \cdot h) = \alpha \cdot (\lambda \cdot h) = \lambda \cdot (\alpha \cdot h) = \lambda \cdot \psi(h)$$

Logo  $\psi$  é linear. Suponhamos agora que  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é linear. Então

$$\forall h \in \mathbb{R} : \psi(h) = \psi(h \cdot 1) = h \cdot \psi(1) = \psi(1) \cdot h$$

Fazendo  $a = \psi(1)$ , temos que existe  $a$  tal que  $\psi(h) = a \cdot h$ .

Donde, pode-se expressar a definição acima da forma seguinte: a função  $f$  definida sobre  $C$  é diferenciável num ponto  $x_0$  de  $C$  se existe uma função linear  $\psi$  definida por  $\psi(h) = a \cdot h$  tal que a função  $\epsilon$  definida para  $h \neq 0$ , pela fórmula

$$(3) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \psi(h) + |h| \cdot \epsilon(h)$$

admite limite 0 quando  $h$  tende para 0.

Prova-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a = f'(x_0)$$

Finalmente, dizer que uma função  $f$  é diferenciável em  $x_0$  equivale a dizer que existe uma função linear  $\psi$  definida por  $\psi(h) = f'(x_0) \cdot h$ . Esta função linear  $\psi$  é a diferencial da função  $f$  no ponto  $x_0$  que pode ser denotado por  $df_{x_0}$  para envolver na notação a função  $f$  e o ponto  $x_0$ , isto é,  $\psi = df_{x_0}$ .

b) La forme linéaire  $\mathfrak{L}$ , sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$  est dite *application différentielle de  $f$  au point  $x$* . De la même façon que l'on désigne par  $y$  l'image par  $f$  de l'élément générique de  $C$ , on désigne par  $dy$  l'image par l'application linéaire  $\mathfrak{L}$  de l'élément générique de  $\mathbb{R}$ , que l'on conveint d'écrire  $dx$  au lieu de  $h$ . On a ainsi, au point considéré  $x$  de  $C$

$$(4) \quad dy = f'(x)dx$$

Par abus de langage, on dit que  $dy$  est la différentielle de  $f$  au point  $x$ .

On peut écrire aussi  $d[f(x)] = f'(x) dx$ , ou, par abus d'écriture,  $df = f'(x) dx$ .

(CANAG, 1972, p.120).

A forma linear  $\mathfrak{L}$ , sobre  $\mathbb{R}$ , tal que  $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$  diz-se *aplicação diferencial de  $f$  no ponto  $x$* . Do mesmo modo que se designa por  $y$  a imagem por  $f$  do elemento genérico de  $C$ , se designa por  $dy$  a imagem pela aplicação linear  $\mathfrak{L}$  do elemento genérico de  $\mathbb{R}$ , resulta conveniente escrever  $dx$  em lugar de  $h$ . Se tem assim que no ponto considerado  $x$  de  $C$ :

$$(4) \quad dy = f'(x)dx.$$

Por abuso de linguagem, se diz que  $dy$  é a diferencial de  $f$  no ponto  $x$ .

Pode-se escrever também  $d[f(x)] = f'(x)dx$ , ou, por abuso de escrita,  $df = f'(x) dx$ .<sup>3</sup>

Aqui se caracteriza a **diferencial de uma função  $f$  num ponto  $x$**  como uma aplicação linear  $\mathfrak{L}$  sobre  $\mathbb{R}$ . Assim,

$$\mathfrak{L}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto \mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$$

---

<sup>3</sup>  $y = f(x)$ ,  $x \in C$  com  $x \in C$  (Intervalo de definição de  $f$ ). Traduzido do texto original em francês pelo autor deste artigo.

Das definições dadas na seção anterior e do Teorema Fundamental, temos que

$$\Omega = df_x: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

A notação proposta nos diz que  $dy = f'(x) \cdot h$ , isto é, a imagem de  $h$  pela aplicação linear  $df_x$ . Aplicando a própria definição à função  $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; id_{\mathbb{R}}(x) = x$ , temos que

$$d[id_{\mathbb{R}}]_x: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto id'_{\mathbb{R}}(x) \cdot h = 1 \cdot h = h = id_{\mathbb{R}}(h)$$

Assim,  $d[id_{\mathbb{R}}]_x = id_{\mathbb{R}}$ . Fazendo o abuso de notação pelo qual se identifica uma função  $g$  com sua imagem  $g(x)$ , temos  $id_{\mathbb{R}}(x) = x$  e  $id'_{\mathbb{R}}(h) = h$ . Logo, por detrás da expressão de que resulta conveniente escrever  $dx$  em lugar de  $h$ , se esconde um abuso de notação,  $dx = h$ . Isto justifica também a notação  $dy = f'(x)dx$ .

Examinemos as definições de diferencial dadas em alguns textos de cálculo freqüentemente usados nos cursos de graduação.

#### 4.9.1. DEFINIÇÃO

Se a função  $f$  for definida por  $y = f(x)$ , então a **diferencial de  $y$** , denotada por  $dy$ , será dada por

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (3)$$

onde  $x$  está no domínio de  $f'$  e  $\Delta x$  é um incremento arbitrário de  $x$ . (...).

#### 4.9.2. DEFINIÇÃO

Se a função  $f$  for definida por  $y = f(x)$ , então a **diferencial de  $x$** , denotada por  $dx$ , será dada por  $dx = \Delta x$ , onde  $\Delta x$  é um incremento arbitrário de  $x$  e  $x$  é qualquer número no domínio de  $f'$ .

Das definições 4.9.1 e 4.9.2,

$$dy = f'(x)dx \quad (5)$$

Dividindo ambos os membros de (5) por  $dx$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ se } dx \neq 0$$

Essa relação expressa à derivada como o quociente de dois diferenciais.

(LEITHOLD, 1994, p.269-270).

Aqui se define primeiro **a diferencial de  $y$**  em seguida **a diferencial de  $x$** , deduz que  $dy = f'(x)dx$ , finalmente que esta relação expressa à *derivada como o quociente de dois diferenciais*. Aceitando os abusos de linguagem e de notação contidos nesta definição, a definição da “diferencial da variável dependente” se faz desnecessária, pois se pode obter a partir da definição da “diferencial da variável independente”: pondo  $g(x) = x$ , temos  $g'(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então

$$dx = g'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x.$$

Até aqui  $\frac{dy}{dx}$  tem sido visto como uma simples notação para a derivada de  $y = f(x)$ . O que faremos a seguir é interpretar  $\frac{dy}{dx}$  como um quociente de dois acréscimos. Inicialmente, vamos olhar  $dx$  como um acréscimo em  $x$  e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo  $dy$ . (...).

Fixado  $x$ , podemos olhar para **a função linear** que a cada  $dx \in \mathbb{R}$ , associa  $dy \in \mathbb{R}$ , onde

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Tal função denomina-se *diferencial de  $f$  em  $x$* , ou, simplesmente, *diferencial de  $y = f(x)$* .

(GUIDORIZZI, 2008, p.192)

O último parágrafo do texto acima citado menciona o fato de que a função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ ;

$$dx \mapsto dy = f'(x)dx$$

é linear e define como *diferencial de  $f$  em  $x$* . Não se explica como é que  $dx$  resulta variável independente.

8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea  $y = f(x)$ , una función definida en cada punto del intervalo abierto  $I$ . Decimos que  $f(x)$  es diferenciable (o derivable) en un punto  $x$  de  $I$  si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En este caso, dicho límite se designa por  $\frac{dy}{dx}, f'(x), \frac{df}{dx}(x)$  o  $D_x f(x)$  y se llama la derivada de  $f(x)$  en el punto  $x$ . (KONG, 2001, p.199)

A definição citada acima, eliminando os abusos de notação, diz: Seja  $f$  uma função definida por  $y = f(x)$  em cada ponto  $x$  do intervalo  $I$ . Diz-se que  $f$  é diferenciável (**ou**

**derivável)** num ponto  $x$  de  $I$  se existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Assim, se associa a derivabilidade com a existência da derivada.

Tratando-se da diferencial, temos:

9.8 DIFERENCIALES.

9.8.1 DEFINICIÓN

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable en el punto  $x$ . La diferencial de  $y$  (en el punto  $x$ ,  $y$  para un incremento  $\Delta x$ ) es dada por

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

donde  $\Delta x$  es un incremento arbitrario de  $x$ .

9.8.2 OBSERVACIONES. (...).

2) La diferencial  $df$  es una función de las dos variables  $x$  y  $\Delta x$ , donde  $x$  es cualquier punto donde existe  $f'(x)$  y  $\Delta x$  es un número real arbitrario. Así, con propiedad debería escribirse

$$dy = df(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

(KONG, 2001, p.310).

Nesta definição destacamos a expressão “diferencial de  $y$  (no ponto  $x$ ,  $y$  para um acréscimo  $\Delta x$ ) é dada por  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ ”. Aqui, podemos entender de forma implícita que há uma função que mantém constante  $x$ , considera  $\Delta x$  variável e cujo valor funcional (imagem) é dada por  $f'(x) \cdot \Delta x$ . A segunda observação do texto acima citado é importante pois caracteriza a diferencial  $df$  da função  $f$  como uma função de duas variáveis:  $df: (x, y) \mapsto f'(x) \cdot \Delta x$ . Como  $\Delta x$  é arbitrário, pode-se escrever  $df: (x, h) \mapsto f'(x) \cdot h$ . Fixando  $x$  temos  $df(x, h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$ . Assim, chegamos facilmente ao conceito de *diferencial da função  $f$  no ponto  $x$* .

Examinemos agora como o autor obtém a diferencial  $dx$  a partir da definição 9.8.1:

9.8.4 LA DIFERENCIAL  $dx$

(1) Para la función  $I(x) = x$  la diferencial es, de acuerdo a la definición 9.8.1,

$$dx = \frac{d}{dx}(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

$$dx = \Delta x$$

Donde  $\Delta x$  es un incremento arbitrario de  $x$ .

(2) Si  $y = f(x)$  es una función diferenciable en el punto  $x$ , entonces  $df$  se expresa como un múltiplo de la diferencial  $dx$ . En efecto,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \quad (\text{pues } dx = \Delta x \text{ por (1)})$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

(3) Observemos que tenemos  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  en la notación de derivada) si  $y$  sólo si  $dy = f'(x)$  (en la notación de diferenciales). (KONG, 2001, p.312)

De forma natural aparece  $dx = \Delta x$  no caso particular da diferencial da função definida por  $I(x) = x$ . Donde también deduz que a derivada  $f'(x)$  é o quociente dos **valores** das diferenciais correspondentes.

Supongamos que la función  $y = f(x)$  es derivable sobre el segmento  $[a,b]$  la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , la razón  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  tiende a um número determinado  $f'(x)$  y, por tanto, se diferencia de la derivada  $f'(x)$  en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde  $\alpha \rightarrow 0$ , cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Multiplicando todos los términos de la última igualdad por  $\Delta x$ , obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \quad (1)$$

Dado que en el caso general  $f'(x) \neq 0$ , entonces, cuando  $x$  es constante y  $\Delta x \rightarrow 0$ , el producto  $f'(x)\Delta x$  es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a  $\Delta x$ . El producto  $\alpha\Delta x$  es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a  $\Delta x$  ya que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ . Así, pues, el incremento  $\Delta y$  de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el

primeiro recebe o nome [quando  $f'(x) \neq 0$ ] de parte *principal* do incremento, que é *linear* com relação a  $\Delta x$ . O produto  $f'(x) \Delta x$  se denomina *diferencial* da função e se designa por  $dy$  ou  $df(x)$ . (PISKUNOV, 1977, p.115)

O parágrafo final desta citação, a partir da igualdade (1) que caracteriza a diferenciabilidade, diz que  $\Delta y$  está composto como soma de dois termos, o primeiro dos quais é linear com relação a  $\Delta x$  e se denomina a diferencial da função. Como em outros, o conceito de diferencial de uma função num ponto não se explicita e fica escondida detrás dos abusos de linguagem e de notação.

## DIFERENCIAIS

Os símbolos  $dy$  e  $dx$  que apareceram na derivada são chamados **diferenciais**, e nosso próximo objetivo é definir estes símbolos, de tal forma que se possa tratar  $dy/dx$  como uma razão. Com esta finalidade, vamos considerar  $x$  como fixo e definir como uma variável independente, para a qual possa ser atribuído um valor arbitrário. Se  $f$  for diferenciável em  $x$ , então **definimos** pela fórmula:

$$dy = f'(x)dx$$

Se  $dx \neq 0$ , então podemos dividir ambos os lados de (5) por  $dx$  para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Assim sendo atingimos a nossa meta definindo  $dy$  e  $dx$  de tal forma que sua razão seja  $f'(x)$ .

(HOWARD, 2000, p.212)

Segundo isto,  $dx$  e  $dy$  são símbolos que apareceram na derivada. Para tratar a derivada  $\frac{dy}{dx}$  como uma razão, fixa  $x$  e define  $dx$  como variável independente (muito difícil de explicar!). Na seqüência define  $dy$  pela fórmula  $dy = f'(x) dx$ . Assim,  $dx$  e  $dy$  são números e se  $dx \neq 0$ , tem-se que  $dy/dx$  é uma razão (quociente). Tentemos reescrever esta definição: se  $x$  é fixo e  $f$  é derivável em  $x$ ,  $f'(x)$  é fixo (constante). Logo temos uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R} : h \mapsto f'(x) \cdot h$ . Se  $f$  é definida por  $y = f(x)$ , denotemos  $dy = f'(x) \cdot h$ . Para a função definida por  $g(x) = x$ , tem-se  $dx = g'(x) \cdot h$ . Assim,  $dx = h$ , daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x) \text{ se } h \neq 0.$$

Finalmente, vejamos a definição de **diferencial de uma função**:

**DÉFINITION 16.4** Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  admettant une différentielle  $df_{x_0}$  en tout  $x_0 \in I$ . On appelle différentielle de  $f$ , et on note  $df$ , l'application de  $I$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par

$$df: x_0 \in I \mapsto df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(BALAC, 2009, p.760)

Conforme a definição acima citada a *diferencial de uma função*  $f$ ,  $df$ , é uma aplicação de  $I$  em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , isto é,  $df \in F(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ . Assim,

$$\begin{aligned} df: I &\mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \\ x &\mapsto [df](x) = df_x: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \\ &h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h \end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS

BALAC, S.; STURN, F. **Algèbre et analyse**. 2<sup>e</sup> edition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes: Lyon, 2009.

CANAG, G.; RAMIS, E. and COMMEAU, J. **Traité de Mathématiques Spéciales: 2 Analyse**. Masson et C<sup>ie</sup> Éditeurs: Paris, 1972.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**. Pearson Prentice Hall: São Paulo, 2006.

GOLDSTEIN, L.J.; LAY, D.C.; SCHNEIDER, D.I. **Matemática Aplicada**. 8<sup>a</sup> edição. Bookman: Porto Alegre, 2000.

GOURION, M. **Analyse** Collection Queysanne-Revuz: Mathématique Tome 2. Fernand Nathan Editeur: Paris 1971.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Volume 1 - 5<sup>a</sup> edição. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: Rio de Janeiro, 2008.

HOWARD, A. **Cálculo: um novo horizonte**. Volume 1 - 6<sup>a</sup> edição. Bookman: São Paulo, 2000.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A.M. et al. **Cálculo e Aplicações**. Editora Edgard Blücher Ltda.: São Paulo, 1999.

KONG, Maynard. **Cálculo Diferencial**. Cuarta Edición. Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica: Lima, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1 - 3<sup>ra</sup> edição. Editora Harbra Ltda.: São Paulo, 1994.

MOISE, E. **Calculus**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Wesley Publishing Company, Inc.: United States of America, 1972.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Tomo 1 3<sup>a</sup> edição. Editorial MIR: Moscú, 1977.

TERRACHER, P. et al. **Mathématiques 1e. S et E Analyse**. Hacchete: France, 1987.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aeração de Grãos 47

Algoritmos 98, 99, 100, 101, 172, 173, 174, 178

Análise estatística 9, 10

Análise Matemática 16

Ângulo 12, 102, 103, 104, 105, 107

Aplicativo 13, 180, 182, 183, 184, 185, 187, 190, 191, 192, 193

Aprendizagem 9, 12, 13, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 104, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 142, 143, 145, 148, 150, 151, 152, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 191, 192, 194, 195, 197, 209, 210, 211, 212, 213, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 234, 239, 250, 253

Aprendizagem Significativa 101, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 194

Arte 13, 86, 111, 115, 128, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 240

Asset Price 11, 1, 3, 4

### B

BNCC 135, 136, 139, 144, 167, 169, 178, 182, 183, 210, 211, 212, 215, 219, 220

### C

Cálculo 12, 14, 10, 12, 68, 69, 73, 78, 83, 92, 115, 116, 119, 172, 173, 174, 176, 199, 231, 241, 242, 246, 247, 248, 249, 250, 253

Campos Semânticos 241, 243, 244, 254, 255

Cartografia 13, 180, 183, 184, 185, 191, 192, 193, 194

Circunferência da cintura 9, 10, 11, 12, 13

Conjunto Denso 26

Contextualização 165, 166, 167, 169, 170, 171, 178, 188, 189, 192

Curso de Pedagogia 126, 128, 155, 160

### D

Derivabilidade 12, 68, 73, 80

Desenhos 104, 105, 107, 145, 146, 149, 150, 151, 152, 185, 189, 193

Diferenciabilidade 12, 68, 73, 82

Distribuição de Ar 47

## E

EDPs 41

Educação Básica 9, 10, 88, 94, 98, 99, 110, 111, 112, 121, 135, 136, 139, 140, 142, 143, 168, 170, 174, 175, 195, 210, 221, 240, 256

Educação Matemática 13, 100, 101, 108, 110, 111, 112, 120, 121, 132, 134, 135, 139, 143, 144, 153, 155, 157, 159, 165, 166, 168, 179, 209, 228, 240, 241, 243, 244, 254, 255, 256

Egito 229, 230, 233, 236

Ensemble Kalman filter 1

Ensino 9, 10, 12, 13, 14, 68, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 100, 101, 102, 108, 109, 110, 111, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 174, 175, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 188, 191, 192, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 206, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 250, 253, 254, 255, 256

Espaços de Banach 16

Espaços  $L_p$  26

Etnomatemática 179, 228, 241, 243, 244, 245, 254, 255

## F

Família 12, 19, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 127, 128, 254

Ferramenta de Ensino 125, 195, 196, 198

Filas 58, 59, 66

Formação de Professores 9, 122, 138, 142, 153, 158, 160, 179, 233, 244, 256

Formação inicial de Professores 155, 163

Frações 14, 103, 104, 105, 203, 217, 222, 223, 224, 226, 227

Função Simples 26, 36, 37, 39, 40

## I

Infantil 11, 9, 10, 13, 14, 84, 85, 86, 87, 88, 118, 143, 153, 178, 194, 228

Inferência Bayesiana 58, 60

Integral de Lebesgue 26, 40

Interdisciplinaridade 108, 109, 144, 165, 168, 169, 170, 171, 177, 178, 179, 181, 213, 220, 240

## L

Letramento Matemático 165, 167, 171

Local volatility 11, 1, 2, 3, 7, 8

Lúdico 84, 210, 212, 219, 226

## **M**

Mapas Conceituais 13, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132

Matemática 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 9, 10, 12, 16, 26, 41, 47, 48, 56, 68, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 176, 177, 178, 179, 184, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 208, 209, 210, 211, 213, 220, 221, 222, 223, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 238, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 250, 252, 254, 255, 256

Medida 10, 14, 26, 27, 33, 40, 102, 103, 104, 127, 148, 193, 217, 246, 247, 251, 252

Metodologia 10, 42, 91, 94, 98, 100, 108, 110, 111, 113, 120, 126, 132, 138, 143, 145, 146, 151, 152, 161, 170, 199, 210, 211, 212, 213, 219, 221, 229, 230, 232, 234, 239, 240, 241, 254

Metodologia Ativa 210, 211, 212, 213, 219, 221

Mobile Art 180, 184, 185, 187, 191

Modelagem Computacional 47

Modelagem Matemática 11, 47, 108, 109, 110, 111, 112, 120, 177, 178, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 203, 206, 209

## **N**

Números Decimais 195, 211, 217, 220, 223, 228

## **O**

Obesidade 11, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 209

Operações 12, 98, 99, 100, 101, 167, 171, 195, 196, 198, 199, 211, 215, 217, 219, 228

Operadores Elípticos 41

## **P**

Princípio da Limitação Uniforme 16, 17, 22, 24, 25

Princípios do Máximo 41

Professor 9, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 101, 102, 103, 106, 108, 109, 112, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 139, 142, 145, 146, 148, 149, 150, 151, 153, 158, 159, 161, 163, 164, 167, 170, 171, 174, 177, 178, 179, 182, 195, 196, 209, 212, 213, 219, 222, 224, 227, 232, 234, 244, 245, 252, 254, 256

## **R**

Recursos didáticos 14, 222

Relação de proporção direta 9, 12

Representação 131, 138, 141, 145, 146, 147, 148, 150, 151, 152, 181, 183, 188, 189, 197, 199, 200, 203, 222, 223, 227, 236, 237

Resolução de Problemas 128, 131, 165, 167, 168, 197

## **S**

Sentidos 13, 123, 139, 159, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194

Significar 73, 222

Simulação 11, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 56, 58, 66, 183

Sistema Numérico 230, 234, 235, 238, 239

Sistemas de Numeração 12, 98, 99, 100, 101, 234

Sistemas Lineares 195, 196

Sustentabilidade 12, 84, 85, 86, 87

## **T**

Tecnologias Digitais 13, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 181, 182, 220

Teorema de Banach-Steinhaus 16, 22, 24, 25

Tikhonov regularization 1

Transferidor 102, 103, 104

## **V**

Visualização 14, 117, 145, 146, 148, 149, 150, 152

## **W**

Web Currículo 13, 134, 135, 137, 143

## **Y**

YouTube 12, 108, 109, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)   
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)   
[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)   
[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática