Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Maria Alice Pinheiro
Correção:	Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizador:	Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5706-440-5
DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um "novo normal"; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

DERIVABILIDADE E DIFERENCIABILIDADE NO ENSINO DO CÁLCULO

Data de aceite: 01/10/2020

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
http://lattes.cnpq.br/6562031070856171

RESUMO: Discute-se o uso dos termos *derivada de uma função num ponto, diferencial* de uma função num ponto, função derivada e função diferencial no contexto das disciplinas de Cálculo. Constata-se que as definições nem sempre correspondem ao quadro teórico que a Análise oferece e como os abusos de linguagem e de notação escondem ou distorcem a verdadeira natureza destes objetos.
PALAVRAS - CHAVE: Cálculo, Derivabilidade, Diferenciabilidade.

DERIVABILITY AND DIFFERENTIABILITY IN THE TEACHING OF CALCULUS

ABSTRACT: The use of the terms *derivative of a function at a point, differential of a function* at a point, derived function and differential function is discussed in the context of Calculus disciplines. It turns out that the definitions do not always correspond to the theoretical framework that the Analysis offers and how abuses of language and of notation hide or distort the true nature of these objects.
KEYWORDS: Calculus; Derivability; Differentiability.

1 I INTRODUÇÃO

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciência e Tecnologia estudam-se os conceitos, propriedades e aplicações das derivadas de funções reais de variável real. Pretende-se, através da leitura de alguns textos de frequênte uso, se constatar se as definições se correspondem com as dadas nos textos de Análise. A Seção 1 trata dos conceitos de *Derivada e Diferencial*. A Seção 2 trata acerca da *derivada de uma função num ponto* e da *função derivada*. Finalmente, na Seção 3, define-se a *diferencial de uma função num ponto* e a *diferencial de uma função*.

2 I DERIVADA E DIFERENCIAL

A *derivabilidade* e a *diferenciabilidade*, são conceitos fundamentais no Cálculo e por isso formam parte do conteúdo das disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciências e Engenharia. Trata-se então de verificar se as definições dadas no ensino, particularmente nos textos, se correspondem com as dadas num marco teórico de um nível aceitável na matemática. Iniciemos esta tarefa comentando definições encontradas em dois textos.

1.3 A Derivada

> Suponha que uma curva seja o gráfico de uma função $f(x)$. Geralmente é possível obter a fórmula que fornece a inclinação da curva y = $f(x)$ em cada ponto. Esta fórmula para a inclinação é chamada de ***derivada*** de $f(x)$ e é escrita . Para cada valor de ***x***, $f'(x)$ fornece a inclinação da curva $f'(x)$ no ponto com primeira coordenada ***x***. (...). O processo de obter $f'(x)$ para uma dada função $f(x)$ é chamado de ***diferenciação***.
>
> (GOLDSTEIN, 2000, P.70)

Aqui, **derivada é uma fórmula para a inclinação** (da curva y = $f(x)$) e **diferenciação** (talvez deviesse se disser *derivação*) **é o processo de obter $f'(x)$**, isto é, de aplicar a fórmula. É compreensível a necessidade de orientar-se pelo desejo de uma aplicação "prática" imediata do conceito, porém isto não deveria fazer-se dando definições que não caracterizam de forma precisa os objetos. A seguir extraímos também de um texto de cálculo a definição de diferencial. Neste texto define-se primeiro a **diferencial da variável dependente** e logo a **diferencial da variável independente**.

> 4.20.2 Diferencial.
>
> Sejam y = $f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x. Definimos:
>
> (a) a diferencial da variável independente x, denotada por dx, como $dx = \Delta x$
>
> (b) a diferencial da variável dependente y, denotada por dy, como
>
> $$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$
>
> De acordo com a definição anterior, podemos escrever
>
> $$dy = f'(x) \cdot dx \ \ ou \ \ \frac{dy}{dx} = f'(x).$$
>
> Assim, a notação $\frac{dy}{dx}$ já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente de diferenciais.
>
> (FLEMMING, 2006, p.174).

Das definições dadas, se deduz a interpretação de derivada como quociente de diferenciais. Isto é, **derivada é quociente de diferenciais**.

Se considerarmos que a Análise, de alguma forma, é fundamentação do Cálculo, registremos algumas definições dadas em textos desta disciplina. Vejamos primeiro a seguinte definição de **função diferenciável num ponto**.

Definition.

On dit qu'une fonction *f* est **différentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire $h \rightarrow lh$ et une fonction $h \rightarrow a\ (h)$ définie sur une intervalle I de centre zéro telles que

$$(\forall h \in I): f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\alpha(h) \qquad (1)$$

$$avec \ \lim_{h \to 0} \alpha.$$

L'application: $h \rightarrow lh$ est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fontion *f* au point x_0 ou encore **différentielle** de *f* au point x_0. On la note df_{x0}. Le nombre *l* s'appelle le coefficient de la différentielle de *f* au point x_0.

On a donc pour tout *h* reel, $df_{x0}(h) = lh$.

GOURION, 1971, p.50).

Observe-se que é a função a que tem diferencial num ponto e não a sua variável dependente e a sua variável independente. Observe também que a **diferencial de uma função num ponto é uma função linear e não um número**.

Definição 1. *f é diferenciável no ponto* x_0 se existe uma função linear $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h \rightarrow ah$ e uma função $h \rightarrow \varphi\ (h)$) definida num intervalo *I* de centro 0 tais que

$$\forall h \in I: f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \ com \ \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

A função linear $h \rightarrow ah$ chama-se a *diferencial da função* f *no ponto* x_o, denota-se df_{x0}. Assim,

$$df_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};\ df_{x_0}(h) = ah$$

Théorème et définitions

Dire que f est différentiable au point x_0 est équivalent à dire que la fonction:

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite au point $h = 0$. Cette limite, quand elle existe, est le coefficient de la differentielle de f au point x_o. Cette limite, quand elle existe, s'appelle **dérivée** de f au point x_o et on dit que f est **dérivable** au point x_o. (GOURION, 1971, p.50).

Definição 2. f é *derivável no ponto* x_o se a função $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ definida num intervalo I de centro 0 tem limite em $h = 0$. Isto é,

$$\exists a \in \mathbb{R}: \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

O número real a chama-se a *derivada da função* f *no ponto* x_o e denota-se $f'(x_o)$. Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Teorema 3. *Sejam* f *uma função definida num Intervalo aberto I e* x_o. *Então*

$$f \text{ é } derivável\ em\ x_0 \Leftrightarrow f \text{ é } deferenciável\ em\ x_0$$

Demonstração.

($\Longleftarrow$) f é derivável em x_o. Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a\right) = 0$$

Fazendo $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a$. Temos que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \ \ com \ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Logo, f é diferenciável em x_o.

($\Longleftarrow$) f é diferenciável em x_o. Então

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \ \ com \ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Donde,

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \ \ e \ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

Logo f é derivável em x_o.

3 I DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E FUNÇÃO DERIVADA.

No texto citado a seguir definem-se *função derivável num ponto, função derivável num intervalo e função derivada*.

DÉFINITION 16.1

- Soient I un intervalle ouvert, x_o un élément de I et f une application définie sur I. On dit que f est dérivable en x_o si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite, note $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si pour tout $x \in J$, f est dérivable en x. On appelle dans ce cas dérivée de f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x.

(BALAC, 2009, p.747)

A seguir se enuncia o teorema que liga os conceitos de *função derivável num ponto* e *função diferenciável num ponto*. Nele afirma-se também sua equivalência.

Le théorème fondamental de la dérivation en un point

a) Le téorème:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour tout h tel que $x_0 + h$ appartienne à I, on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \ \ com \ \ \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$

(le taux d'accroissement de f au point x_0 admet a por limite en zéro).(…).

b) Définitions :

Pour exprimer qu'une fonction satisfait 1. ou 2. du théorème fondamental, on dit que f *est dérivable au point* x_0 De plus, le nombre réel a est appelé nombre

> dérive de f au point x_0. L'écriture $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ est appelée développement limité à l'ordre 1 de f au point .
>
> (TERRACHER, 1987, p.285)

Demonstração[1]. Seja a um número real qualquer. Consideremos a função φ definida por:

$$\varphi(0) = 0 \ \ e \ \ \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \ \ quando \ x_0 + h \in I \ \ e \ \ h \neq 0$$

Então, para todo h tal que x_0 (incluindo $h = 0$):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$$

Da definição de limite de uma função em zero segue que

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

Anotemos aqui algumas observações:

1. $f'(x_0) \in \mathbb{R} \ \ e \ \ df_{x_0} \in \ \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. O teorema fundamental diz que

$$f \text{ é } derivável\ no\ ponto\ x_0 \ \Leftrightarrow f \text{é } diferenciável\ no\ ponto\ x_0$$

3. Pode-se observar que **ser derivável num ponto** não é o mesmo que **ser diferenciável num ponto**. São sim **equivalentes**. De forma natural, **a derivabilidade** deveria significar a **existência da derivada** enquanto que a **diferenciabilidade** teria que significar a **existência da diferencial**.

4. Também a derivada de f no ponto x, $f'(x)$, é o coeficiente da diferencial de f no ponto x:

$$df_x \colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}; df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

5. A escrita $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ chama-se **desenvolvimento limite de ordem 1 de f no ponto x_0**.

Em muitos textos de cálculo os autores associam a diferenciabilidade com a existência da derivada. Além dos citados anteriormente, temos, por exemplo:

> We recall that a function f is *differentiable* at a point x_0 if it has a derivative at x_0. When we say that f is *differentiable*, we mean that it has a derivative at every

1 Traduzido pelo autor deste artigo do texto original de TERRACHER.

point of its domain.

(MOISE, 1972, p.89)

Aqui, o autor lembra definições dadas: uma função f é **diferenciável** em um ponto x_0 se tiver **derivada** em x_0. Quando dizemos que f é **diferenciável**, queremos dizer que ela tem **derivada** em cada ponto de seu domínio.[2]

A seguir uma definição de *função derivada* f':

> Para qualquer função f, definimos a função derivada f' por
>
> $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> desde que este limite exista. Dizemos que a função é **diferenciável** ou **derivável** em qualquer ponto a em que a função derivada exista. (HUGHES-HALLETT, 1999, p.109)

Nesta definição resulta pouco claro qual é o domínio da função derivada f'. Tentemos reescrever esta definição:

Seja $A = Dom\, f' \cap \{a \mid f'(a) \text{ existe}\}$, então, definimos f' como sendo $f': A \mapsto \mathbb{R};\, a \mapsto f'(a)$

Finalmente, damos uma definição de *função derivada de uma função* f.

Definição 4. Seja f uma função definida num intervalo I. Diz-se que f é *derivável num intervalo* $J \subset I$, quando é derivável em todo ponto deste intervalo. A função de J em $\mathbb{R}$ que a todo número real x de J associa a derivada de f no ponto x, chama-se derivada de f e denota-se f'. Assim,

$$f': J \mapsto \mathbb{R};\; f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4 | DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E DIFERENCIAL

O primeiro parágrafo da seguinte citação textual merece um comentário. Nele se observa o fato que a definição da derivada dada não permite generalizar de forma natural a noção de derivada às funções de varias variáveis. Para verificar este fato é suficiente constatar que a expressão

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, não tem sentido para $h \in \mathbb{R}^n$, se $n > 1$.

> La définition de la dérivée donnée à la définition 16.1, page 747, ne permet pas de généraliser de manière naturelle la notion de dérivée aux fonctions de

2 O sublimado e a tradução são do autor deste artigo.

plusieurs variables. Cette généralisation passe par la notion de ***différentielle*** que nous allons étudier dans le cas des fonctions d'une variable réelle.(...)

DÉFINITION 16.3 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **différentiable en** $x_0 \in I$ s'il existe une application ϵ définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tel que

$$(\forall h \in V): f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h + h\epsilon(h)\ avec\ \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

L'application linéaire $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \to \alpha h$$

est appelée différentielle de f en x_0. (BALAC, 2009, p.758)

Para superar esta limitação, podemos tomar em consideração que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

Donde

$$\lim_{\text{h}\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - a \cdot h|}{|h|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\text{h}\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \alpha(h)|}{|h|} = 0\ com\ \alpha(h) = a \cdot h$$

Aparece assim a diferencial de f no ponto x_0 como a função linear α definida por α (h) =α · h. No caso de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^{\text{n}} \to \mathbb{R}^{\text{m}}$ poderia considerar-se as normas e a expressão:

$$\lim_{\text{h}\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \alpha(h)\|}{\|h\|} = 0\ onde\ \alpha(h) = a \cdot h\ com\ a \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n).$$

A seguinte citação textual enuncia a equivalência de s*er derivável num ponto e ser diferenciável num ponto* e que a *diferencial de* f *em* x_0 *é a função* $h \mapsto f'(x_0)h$.

PROPOSITION 16.6 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction application de I dans $\mathbb{R}$. f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. De plus, la différentielle de f en x_0 est

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0) \cdot h$$

(BALAC, 2009, p.759)

A seguinte definição, extraída de um texto de Análise, assim como a definição citada acima, não revela de forma imediata a natureza da diferencial de uma função num ponto. Só mais na frente fala da função linear correspondente e a define como a diferencial da função no ponto.

> 6°) **Différentielle.**-a) On dit que la fonction f définie sur **C** est différentiable au point x_0 de C s'il existe un nombre α tel que la fonction ϵ définie, pour $h \neq 0$, par la formule
>
> $$(3) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + |h| \cdot \epsilon(h)$$
>
> admette la limite 0 quand h tend vers 0. (On suppose $|h|$ assez petit pour que $x_0 + h \in$ C).
>
> (CANAG, 1972, p.120).

Observe-se que nesta definição, assim como na definição 16.3 citada anteriormente, se diz que **existe um número** a e na expressão (3) aparece o termo $a \cdot h$. Pode-se de uma forma natural identificar o numero real a com a função linear $h \to a \cdot h$. Esta identificação é possível pela bijeção:

$$\mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ \alpha \mapsto\ \psi_\alpha\, , onde\ \psi_\alpha:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ \alpha \mapsto \psi_\alpha(h) = \alpha \cdot h.$$

Proposição 5. *Uma função ψ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\psi(h) = \alpha \cdot h.$$

Demonstração. Seja α um número real e seja a função ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\psi(h) = a \cdot h$. Temos que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}:\ \psi(h + k) = \alpha(h + k) = \alpha h + \alpha k = \psi(h) + \psi(k)$$

Também,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}:\ \psi(\lambda \cdot h) = \alpha \cdot (\lambda \cdot h) = \lambda \cdot (\alpha \cdot h) = \lambda \cdot \psi(h)$$

Logo ψ é linear. Suponhamos agora que ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear. Então

$$\forall h \in \mathbb{R}:\ \psi(h) = \psi(h \cdot 1) = h \cdot \psi(1) = \psi(1) \cdot h$$

Fazendo $a = \psi(1)$, temos que existe a tal que $\psi(h) = a \cdot h$.

Donde, pode-se expressar a definição acima da forma seguinte: a função f definida sobre C é diferenciável num ponto x_0 de C se existe uma função linear ψ definida por $\psi(h) = a \cdot h$ tal que a função ϵ definida para $h \neq 0$, pela fórmula

$$(3) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \psi(h) + \lfloor h \rfloor \cdot \epsilon(h)$$

admite limite 0 quando h tende para 0.

Prova-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha = f'(x_0)$$

Finalmente, dizer que uma função f é diferenciável em x_0 equivale a dizer que existe uma função linear ψ definida por $\psi(h) = f'(x_0) \cdot h$. Esta função linear ψ é a diferencial da função f no ponto x_0 que pode ser denotado por df_{x0} para envolver na notação a função f e o ponto x_0, isto é, $\psi = df_{x0}$.

> b) La forme linéaire $\mathfrak{L}$, sur $\mathbb{R}$, telle que $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$ est dite *application différentielle de f au point x*. De la même façon que l'on designe par ***y*** l'image par f de l'élément générique de C, on désigne par ***dy*** l'image par l'application linéaire $\mathfrak{L}$ de l'élément générique de $\mathbb{R}$, que l'on conveint d'écrire ***dx*** au lieu de ***h***. On a ainsi, au point considéré x de C
>
> $$(4) \qquad dy = f'(x)dx$$
>
> Par abus de langage, on dit que ***dy*** est la différentielle de f au point ***x***.
>
> On peut écrire aussi $d[f(x)] = f'(x)\,dx$, ou, par abus d'écriture, $df = f'(x)\,dx$.
>
> (CANAG, 1972, p.120).

A forma linear $\mathfrak{L}$, sobre $\mathbb{R}$, tal que $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$ diz-se *aplicação diferencial de f no ponto x*. Do mesmo modo que se designa por y a imagem por f do elemento genérico de C, se designa por dy a imagem pela aplicação linear $\mathfrak{L}$ do elemento genérico de $\mathbb{R}$, resulta conveniente escrever dx em lugar de h. Se tem assim que no ponto considerado x de C:

$$(4) \qquad dy = f'(x)dx.$$

Por abuso de linguagem, se diz que dy é a diferencial de f no ponto x.

Pode-se escrever também $d[f(x)] = f'(x)dx$, ou, por abuso de escrita, $df = f'(x)\,dx$.[3]

Aqui se caracteriza a **diferencial de uma função f num ponto x** como uma aplicação linear $\mathfrak{L}$ sobre $\mathbb{R}$. Assim,

$$\mathfrak{L}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto \mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$$

3 $y = f(x)$, x Є C com x Є C (Intervalo de definição de f).Traduzido do texto original em francês pelo autor deste artigo.

Das definições dadas na seção anterior e do Teorema Fundamental, temos que

$$\mathfrak{L} = df_x\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

A notação proposta nos diz que $dy = f'(x) \cdot h$, isto é, a imagem de h pela aplicação linear df_x. Aplicando a própria definição à função $id_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $id_{\mathbb{R}}(x) = x$, temos que

$$d[id_{\mathbb{R}}]_x\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto id'_{\mathbb{R}}(x) \cdot h = 1 \cdot h = h = id_{\mathbb{R}}(h)$$

Assim, $d[id_{\mathbb{R}}]_x = id_{\mathbb{R}}$. Fazendo o abuso de notação pelo qual se identifica uma função g com sua imagem $g(x)$, temos $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ e $id_{\mathbb{R}}(h) = h$. Logo, por detrás da expressão de que resulta convenente escrever dx em lugar de h, se esconde um abuso de notação, $dx = h$. Isto justifica também a notação $dy = f'(x)dx$.

Examinemos as definições de diferencial dadas em alguns textos de cálculo freqüentemente usados nos cursos de graduação.

> 4.9.1. DEFINIÇÃO
>
> Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** y, denotada por dy, será dada por
>
> $$dy = f'(x)\Delta x \qquad (3)$$
>
> onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x. (...).
>
> 4.9.2. DEFINIÇÃO
>
> Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** x, denotada por dx, será dada por $dx = \Delta x$, onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f'.
>
> Das definições 4.9.1 e 4.9.2,
>
> $$dy = f'(x)\mathrm{d}x \qquad (5)$$
>
> Dividindo ambos os membros de (5) por dx, temos
>
> $$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ se } dx \neq 0$$
>
> Essa relação expressa à derivada como o quociente de dois diferenciais.
>
> (LEITHOLD, 1994, p.269-270).

Aqui se define primeiro **a diferencial de y** em seguida **a diferencial de x**, deduz que $dy = f'(x)\mathrm{d}x$, finalmente que esta relação expressa à *derivada como o quociente de dois diferenciais*. Aceitando os abusos de linguagem e de notação contidos nesta definição, a definição da “diferencial da variável dependente” se faz desnecessária, pois se pode obter a partir da definição da “difenrencial da variável independente”: pondo $g(x) = x$, temos $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$dx = g'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x.$$

> Até aquí $\frac{dy}{dx}$ tem sido visto como uma simples notação para a derivada de $y = f(x)$. O que faremos a seguir é interpretar $\frac{dy}{dx}$ como um quociente de dois acréscimos. Inicialmente, vamos olhar dx como um acréscimo em x e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo dy. (...).
>
> Fixado x, podemos olhar para ***a função linear*** que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, onde
>
> $$dy = f'(x)\Delta x.$$
>
> Tal função denomina-se ***diferencial de*** f ***em*** x, ou, simplesmente, ***diferencial de*** $y = f(x)$.
>
> (GUIDORIZZI, 2008, p.192)

O último parágrafo do texto acima citado menciona o fato de que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;

$$dx \mapsto dy = f'(x)\mathrm{d}x$$

é linear e define como *diferencial de* f *em* x. Não se explica como é que dx resulta variável independente.

> 8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea $y = f(x)$, una función definida en cada punto del intervalo abierto I. Decimos que $f(x)$ es diferenciable (o derivable) en un punto x de I si existe
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
>
> En este caso, dicho límite se designa por $\frac{dy}{dx}, f'(x), \frac{df}{dx}(x)$ o $D_x f(x)$ y se llama la derivada de $f(x)$ en el punto x. (KONG, 2001, p.199)

A definição citada acima, eliminando os abusos de notação, diz: Seja f uma função definida por $y = f(x)$ em cada ponto x do intervalo I. Diz-se que f é diferenciável **(ou**

derivável) num ponto x de I se existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Assim, se associa a derivabilidade com a existência da derivada.

Tratando-se da diferencial, temos:

> 9.8 DIFERENCIALES.
>
> 9.8.1 DEFINICIÓN
>
> Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x. La diferencial de y (en el punto x, y para un incremento Δx) es dada por
>
> $$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$
>
> donde Δx es un incremento arbitrario de x.
>
> 9.8.2 OBSERVACIONES. (...).
>
> 2) La diferencial df es una función de las dos variables xy Δx, donde x es cualquier punto donde existe $f'(x)$ y Δx es un número real arbitrario. Así, con propiedad debería escribirse
>
> $$dy = df(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta\mathrm{x}.$$
>
> (KONG, 2001, p.310).

Nesta definição destacamos a expressão “diferencial de y (**no ponto x, y para um acréscimo Δx)** é dada por $dy = f'(x) \cdot \Delta x$”. Aqui, podemos entender de forma implícita que há uma função que mantém constante x, considera Δx variável e cujo valor funcional (imagem) é dada por $f'(x) \cdot \Delta x$. A segunda observação do texto acima citado é importante pois caracteriza a diferencial df da função f como uma função de duas variáveis: $df: (x, y) \mapsto f'(x) \cdot \Delta x$. Como Δx é arbitrário, pode-se escrever $df: (x, h) \mapsto f'(x) \cdot \mathrm{h}$. Fixando x temos $df(x, h) = df_x(h) = f'(x) \cdot \mathrm{h}$. Assim, chegamos facilmente ao conceito de *diferencial da função f no ponto x.*

Examinemos agora como o autor obtém a diferencial *dx* a partir da definição 9.8.1:

> 9.8.4 LA DIFERENCIAL dx
>
> (1) Para la función $I(x) = x$ la diferencial es, de acuerdo a la definición 9.8.1,

$$dx = \frac{d}{dx}(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$
$$dx = \Delta x$$

Donde Δx es un incremento arbitrario de x.

(2) Si $y = f(x)$ es una función diferenciable en el punto x, entonces df se expresa como un múltiplo de la diferencial dx. En efecto,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \quad (pues\ dx = \Delta x\ por\ (1))$$
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

(3) Observemos que tenemos $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ en la notación de derivada) si y sólo si $dy = f'(x)$ (en la notación de diferenciales). (KONG, 2001, p.312)

De forma natural aparece $dx = \Delta x$ no caso particular da diferencial da função definida por $I(x) = x$. Donde também deduz que a derivada $f'(x)$ é o quociente dos **valores** das diferenciais correspondentes.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a,b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a um número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde $a \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Multiplicando todos los términos de la ultima igualdad por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (1)$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x)$ Δx es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx. El producto a Δx es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx ya que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nonbre [cuando $f'(x) \neq 0$] de parte *principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx. El producto $f'(x)\ \Delta x$) se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy ou $df(x)$. (PISKUNOV, 1977, p.115)

O parágrafo final desta citação, a partir da igualdade (1) que caracteriza a diferenciabilidade, diz que Δy está composto como soma de dois termos, o primeiro dos quais é linear com relação a Δx e se denomina a diferencial da função. Como em outros, o conceito de diferencial de uma função num ponto não se explicita e fica escondida detrás dos abusos de linguagem e de notação.

DIFERENCIAIS

Os símbolos dy e dx que apareceram na derivada são chamados **diferenciais**, e nosso próximo objetivo é definir estes símbolos, de tal forma que se possa tratar dy/dx como uma razão. Com esta finalidade, vamos considerar x como fixo e definir como uma variável independente, para a qual possa ser atribuido um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x, então *definimos* pela fórmula:

$$dy = f'(x)dx$$

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por *dx* para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Assim sendo atingimos a nossa meta definindo dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$.

(HOWARD, 2000, p.212)

Segundo isto, dx e dy são símbolos que apareceram na derivada. Para tratar a derivada $\frac{dy}{dx}$ como uma razão, fixa x e define dx como variável independente (muito difícil de explicar!). Na seqüência define dy pela fórmula $dy = f'(x)\,dx$. Assim, dx e dy são números e se $dx \neq 0$, tem-se que dy/dx é uma razão (quociente). Tentemos reescrever esta definição: se x é fixo e f é derivável em x, $f'(x)$ é fixo (constante). Logo temos uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $h \mapsto f'(x) \cdot h$. Se f é definida por $y = f(x)$, denotemos $dy = f'(x) \cdot h$. Para a função definida por $g(x) = x$, tem-se $dx = g'(x) \cdot h$. Assim, $dx = h$, daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\cdot h}{h} = f'(x) \ \ se\ h \neq 0.$$

Finalmente, vejamos a definição de **diferencial de uma função**:

DÉFINITION 16.4 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ admettant une différentielle df_{x0} en tout $x_0 \in I$. On appelle différentielle de f, et on note df, l'application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$df: x_0 \in I \mapsto df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(BALAC, 2009, p.760)

Conforme a definição acima citada a *diferencial de uma função* f, df, é uma aplicação de I em $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, isto é, $df \in F(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Assim,

$$\begin{aligned} df: I &\mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \\ x &\mapsto [df](x) = df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \\ &\qquad\qquad h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

BALAC,S.; STURN, F. **Algèbre et analyse**. 2^{e} edition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes: Lyon, 2009.

CANAG, G.; RAMIS, E. and COMMEAU, J. **Traité de Mathématiques Spéciales: 2 Analyse**. Masson et C^{ie} Éditeurs: Paris, 1972.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**. Pearson Prentice Hall: São Paulo, 2006.

GOLDSTEIN, L.J.; LAY, D.C.; SCHNEIDER, D.I. **Matemática Aplicada**. 8^{a} edição. Bookman: Porto Alegre, 2000.

GOURION, M. **Analyse** Collection Queysanne-Revuz: Mathématique Tome 2. Fernand Nathan Editeur: Paris 1971.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Volume 1 -5^{a} edição. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: Rio de Janeiro, 2008.

HOWARD, A. **Cálculo: um novo horizonte**. Vólume 1- 6^{a} edição. Bookman: São Paulo, 2000.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A.M. et al. **Cálculo e Aplicações**. Editora Edgard Blücher Ltda.: São Paulo, 1999.

KONG, Maynard. **Cálculo Diferencial**. Cuarta Edición. Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica: Lima, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1 - 3ra edição. Editora Harbra ltda.: São Paulo, 1994.

MOISE, E. **Calculus**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.Wesley Publishing Company, Inc.: United States of America, 1972.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Tomo 1 3^{a} edição. Editorial MIR: Moscú, 1977.

TERRACHER, P. et all. **Mathématiques 1e. S et E Analyse**. Hacchete: France, 1987.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

I

L

R

S

T

V

W

Y

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020