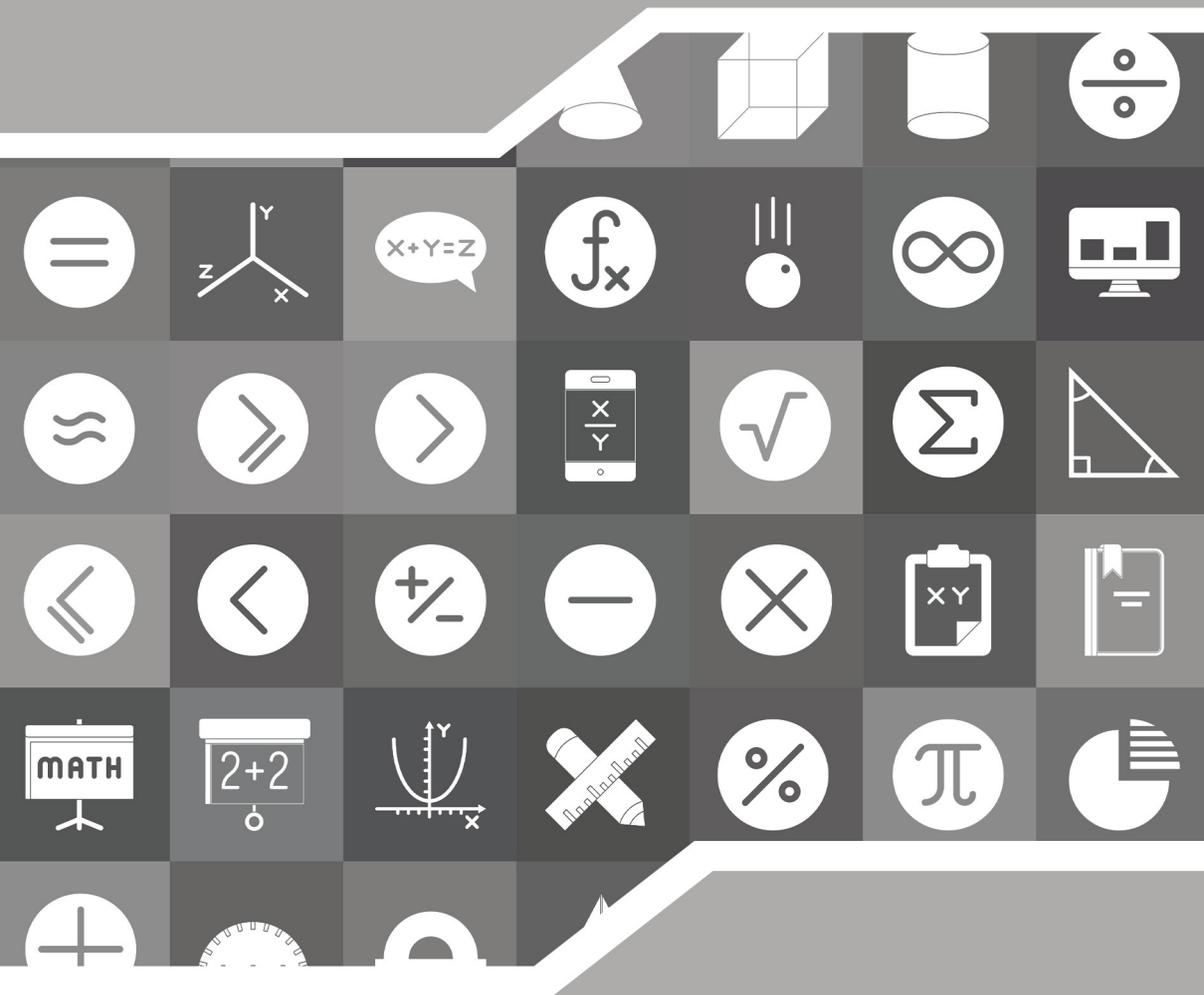


Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecário

Maurício Amormino Júnior

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Karine de Lima Wisniewski

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^a Dr^a Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^a Dr^a Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^a Dr^a Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^a Dr^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^a Dr^a Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^a Dr^a Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^a Dr^a Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^a Dr^a Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^a Dr^a Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^a Dr^a Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^a Dr^a Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^a Dr^a Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^a Dr^a Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^a Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^a Dr^a Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Andrezza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-362-0

DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro **“Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas”**, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
JOGOS DIGITAIS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	
Valdinei Cezar Cardoso	
Ana Paula Santos Pereira	
Arina de Jesus Rozario	
Camila Muniz de Oliveira	
Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior	
DOI 10.22533/at.ed.6202008091	
CAPÍTULO 2	15
OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NO COTIDIANO DA FEIRA LIVRE: UMA INVESTIGAÇÃO FEITA PELOS ALUNOS DA EJA	
Tacio Vitaliano da Silva	
Francisca Vandilma Costa	
DOI 10.22533/at.ed.6202008092	
CAPÍTULO 3	23
O PENSAMENTO COMPUTACIONAL COMO ESTRATÉGIA DE REFORÇO DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO MENTAL	
Julio Cezar Romero	
Juliano Schimiguel	
DOI 10.22533/at.ed.6202008093	
CAPÍTULO 4	35
UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER	
Marcel Lucas Picanço Nascimento	
Vinícius Lemos dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.6202008094	
CAPÍTULO 5	50
EL USO DE GEOGEBRA PARA VISUALIZAR FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES	
Cesar Martínez Hernández	
Rodolfo Rangel Alcántar	
DOI 10.22533/at.ed.6202008095	
CAPÍTULO 6	62
A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE	
Onofre Alves Simões	
DOI 10.22533/at.ed.6202008096	
CAPÍTULO 7	75
O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA	
Jonathan Bregochi Delmondes	

Roseni Aparecida Pereira de Macedo

DOI 10.22533/at.ed.6202008097

CAPÍTULO 8..... 87

OS TRILHOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Isabel Vale

Ana Barbosa

DOI 10.22533/at.ed.6202008098

CAPÍTULO 9..... 99

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Daniel Freitas Martins

Mehran Sabeti

Nicolly Ramalho Silva

DOI 10.22533/at.ed.6202008099

CAPÍTULO 10.....110

A DIVISÃO EM PARTES UTILIZADA NA PESCA ARTESANAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EMBASADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCÍTICA

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

DOI 10.22533/at.ed.62020080910

CAPÍTULO 11 126

TEOREMA DE CARNOT: UMA VALIDAÇÃO COM GEOMETRIA DINÂMICA

Giancarlo Secci de Souza Pereira

Cristiane Ruiz Gomes

Antônio Carlos Ferreira

Paulo Vilhena da Silva

DOI 10.22533/at.ed.62020080911

CAPÍTULO 12..... 138

OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERÍMETRO, ÁREA E PROPORCIONALIDADE DE POLÍGONOS VIA HOMOTETIA

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

DOI 10.22533/at.ed.62020080912

CAPÍTULO 13..... 152

UMA ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE BOÉCIO E DA OBRA *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* PARA A MATEMÁTICA

Francisco Aureliano Vidal

Márcio Alisson Leandro Costa

DOI 10.22533/at.ed.62020080913

CAPÍTULO 14.....	161
UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)	
Débora Gaspar Soares	
Márcio Rufino Silva	
DOI 10.22533/at.ed.62020080914	
CAPÍTULO 15.....	173
A REGRAS DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO <i>LIBER QUADRATORUM</i>	
Denivaldo Pantoja da Silva	
José dos Santos Guimarães Filho	
João Cláudio Brandemberg	
DOI 10.22533/at.ed.62020080915	
CAPÍTULO 16.....	187
AS CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA SALA DE AULA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Thaís Cristina Barros Machado	
DOI 10.22533/at.ed.62020080916	
CAPÍTULO 17.....	200
O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BRASILEIRAS	
Miriam Ferrazza Heck	
Carmen Teresa Kaiber	
DOI 10.22533/at.ed.62020080917	
CAPÍTULO 18.....	210
HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: RESULTADOS DO USO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO NA GRADUAÇÃO	
Jessie Heveny Saraiva Lima	
Miguel Chaquiam	
DOI 10.22533/at.ed.62020080918	
CAPÍTULO 19.....	224
A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR	
Keith Gabriella Flenik Moraes	
Angelita Minetto Araújo	
Tiago Skroch de Almeida	
DOI 10.22533/at.ed.62020080919	
CAPÍTULO 20.....	240
O USO DE JOGOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS	
Ana Lorena Miranda Gomes	

Éllen Beatriz Araújo da Silva
Francisco das Chagas Ferreira Carvalho
Maria Iêda Rodrigues de Oliveira Silva
Wanderson de Oliveira Lima

DOI 10.22533/at.ed.62020080920

CAPÍTULO 21 245

ENSINO DE FATORAÇÃO: ALUNO APRENDENDO A FAZER MATEMÁTICA

Daniellen Costa Protazio
Cinara Damacena Cardoso
Aline Lorinho Rodrigues
Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante
Ashiley Sarmiento da Silva
Yara Julyana Rufino dos Santos Silva
Camila Americo Neri
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Odivânia Ferreira de Moraes
Izaías Silva Rodrigues
Priscila da Silva Santos
Cristiane Matos Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.62020080921

SOBRE OS ORGANIZADORES 252

ÍNDICE REMISSIVO 253

A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 04/07/2020

Onofre Alves Simões

ISEG-UL (Lisbon School of Economics and Management – Universidade de Lisboa) e REM – Research in Economics and Mathematics, CEMAPRE
Lisboa, Portugal
ORCID 0000-0002-9129-3499

RESUMO: Embora apresente os seus aspetos particulares, não se pode dizer que a história da proteção social em Portugal seja muito diferente da de outros países. Aliás, se se excetuarem os exemplos pioneiros da Prússia e da Dinamarca, no século dezanove, e do Reino Unido, já depois da segunda guerra mundial, quando se aprecia a evolução da proteção social nos países europeus, conclui-se que existem muitos traços comuns num grande número de casos. A ocorrência de contingências tais como a morte prematura, a invalidez e o próprio envelhecimento implica frequentemente uma perda de rendimentos, que pode ser muito gravosa. Por essa razão, estas contingências estiveram presentes em todos os esforços realizados no país, com o objetivo de estabelecer um sistema de assistência/proteção/segurança/estado social. Assim, ao longo dos anos, várias soluções legislativas foram surgindo, com maior ou menor sucesso prático, tendo o propósito da atribuição de prestações adequadas, na medida das possibilidades, aos atingidos. Paralelamente a este avanço, desafios

de múltiplas ordens se foram colocando com o passar do tempo, exigindo um tratamento analítico adequado das questões. Em especial, nos últimos anos, grande tem sido a apreensão suscitada pelo duplo envelhecimento evidenciado pelas pirâmides etárias, devido ao duplo perigo que representa para a sustentabilidade dos sistemas, tanto a nível das prestações públicas como dos planos e fundos privados de pensões. O trabalho presente procura fazer o levantamento dos aspetos de Matemática Atuarial que acompanharam a evolução observada, com natural particular destaque para o período mais recente. Sublinha-se o papel principal que tem desempenhado na procura de soluções que viabilizem a continuidade das prestações.

PALAVRAS-CHAVE: Pensões, Segurança Social, Matemática Atuarial, Portugal.

PENSION MATHEMATICS IN PORTUGAL: THE RECENT HISTORY

ABSTRACT: Although it shows a few particular aspects, it is not true that the history of social protection in Portugal is very different from that in other countries. In fact, except for the pioneering examples of Prussia and Denmark, in the nineteenth century, and of the United Kingdom, after the Second World War, when one considers the evolution of social protection in most European countries, it is noticeable that many common features can be identified in a large number of cases. Given the seriousness of the consequences resulting from its occurrence, the concern with situations of premature death, disability and old age was present in all efforts

made in the country with the aim of establishing a system of assistance / protection / security / welfare state. Thus, over the years, several legislative solutions have emerged, with greater or lesser practical success, with the purpose of attributing adequate benefits, as much as possible, to those affected by such contingencies. In parallel with this advance, challenges of multiple orders have been posed over time, requiring an appropriate analytical treatment of the issues. In particular, in recent years, the apprehension caused by the double aging shown by the age pyramids has been great, due to the double danger it represents for the sustainability of the pension schemes, both public and private. The present work seeks to survey the aspects of Actuarial Mathematics that go along with the observed evolution, with a particular emphasis on the most recent period. We underline the main role it has played in the search for solutions that enable the continuity of benefits.

KEYWORDS: Pensions, Social Security, Actuarial Mathematics, Portugal.

1 | INTRODUÇÃO

Menos de um mês após a revolução de 25 de Abril de 1974, foi aprovado em Portugal o Decreto-Lei 203/74, preconizando a substituição progressiva dos sistemas existentes de previdência e assistência por um sistema integrado de Segurança Social (SS).

O direito à SS foi pela primeira vez consagrado no artigo nº 63 da Constituição da República Portuguesa de 1976. Aí se estabelece o papel do Sistema de SS na proteção de todos os cidadãos, em todas as situações de falta ou diminuição de meios de subsistência ou de capacidade para o trabalho, em particular nas situações de velhice, invalidez, viuvez, orfandade, desemprego e doença.

A primeira Lei de Bases da SS surgiu em 1984 (Lei nº 28/84), onde se destacam, no artigo 5º, os princípios da universalidade, da unidade, da igualdade, da eficácia, da descentralização, da garantia judiciária, da solidariedade e da participação. Depois de várias reformas, a atual Lei de Bases é a Lei nº 4/2007. De forma a assegurar o seu cumprimento foram acrescentados alguns princípios aos anteriores, entre os quais, os princípios da equidade social, da inserção social, da coesão intergeracional, do primado da responsabilidade pública e da informação (artigos 5º ao 22º).

2 | DEMOGRAFIA E SUSTENTABILIDADE DO SISTEMA DE SS

O Sistema de SS português é financiado pela repartição dos rendimentos do trabalho e a maior componente da despesa do sistema previdencial é a despesa com as pensões, com um peso superior a 80% (ver, por exemplo, IGFSS (2019) e Ministério das Finanças (2018), Anexo 6). Assim sendo, a evolução evidenciada pelos indicadores demográficos nas últimas décadas faz aumentar cada vez mais a

preocupação com a sua sustentabilidade financeira. A raiz do problema são as baixas taxas de fertilidade. Para o seu agravamento contribuem também os progressos na mortalidade, expressos de forma muito clara nos acréscimos da esperança de vida à nascença e também aos 65 anos, tradicionalmente a idade normal de reforma.

Baixas taxas de fertilidade e longevidade acrescida explicam a forma da pirâmide populacional (cf Instituto Nacional de Estatística - INE (2020abc) e Pordata - <https://www.pordata.pt/>). Nos últimos dez anos, é visível um duplo envelhecimento demográfico: a base da pirâmide é reduzida e o topo é alargado. Nesse período, o número de idosos (65 anos ou mais) aumentou em 350 000 e a população mais jovem (menos de 15 anos) diminuiu em 221 000. A população em idade ativa (15 a 64 anos) também diminuiu, em cerca de 406 000 indivíduos. Desde 2010 que o número de pessoas em idade potencial de saída do mercado de trabalho não é compensado pelo número de pessoas em idade potencial de entrada. A taxa de fertilidade apresenta uma tendência decrescente há mais de 50 anos e está abaixo do nível de reposição (2.1) desde meados da década de 80. O saldo natural é negativo desde 2009 e o número de habitantes começou a diminuir em 2010. A migração líquida também foi negativa de 2011 a 2016, período da crise da dívida soberana portuguesa. No Quadro 1 sumarizam-se estas informações.

As previsões para o futuro não apontam para um reverter da situação, pelo contrário. Entre 2018 e 2080, de acordo com o chamado cenário central (ver INE 2020a), Portugal perderá mais de 2 milhões de habitantes, diminuindo o número de jovens para cerca de 1 milhão e aumentando o número de idosos para 3 milhões. A população em idade ativa diminuirá cerca de 2,4 milhões, de 6,6 para 4,2 milhões de pessoas. O número de indivíduos ativos por idoso (relação de sustentabilidade potencial) cairá para 1.38.

	1970	1981	1991	2001	2011	2019
População residente (10 ³)	8680.6	9851.3	9960.2	10362.7	10557.6	10295.9
Índ sint fec (nº. médio de filhos por mulher em idade fértil)	3.20	3.00	2.13	1.56	1.45	1.42
Saldo natural (nasc - óbits - 10 ³)	87.6	56.3	12.4	7.7	- 6.0	- 25.2
Saldo migratório (img - emg - 10 ³)	-122.3	8.3	-32.8	56.2	-24.3	44.5
Jovens (menos de 15 anos -10 ³)	-	2493.8	1959.7	1679.21	1584.0	1397.0
Jovens (menos de 15 anos -%)	-	25.3	19.7	16.2	15.0	13.6
Pop idade ativa (15 a 64 anos -10 ³)	-	6224.9	6628.0	6978.3	6981.5	6618.5
Pop idade ativa (15 a 64 anos - %)	-	63.2	66.5	67.3	66.1	64.3
Idosos (65 e mais anos - 10 ³)	-	1132.6	1372.5	1705.3	1992.0	2280.4
Idosos (65 e mais anos - %)	-	11.5	13.8	16.5	18.9	22.1

Índ envelh (idosos por 100 jovens)	32.9	45.4	70.0	101.6	125.8	163.2
Indiv em idade ativa por idoso	6.6	5.5	4.8	4.1	3.5	2.9
Esp vida à nascença (Total)	67.1	72.1	74.3	76.9	79.8	80.9
Esp vida à nascença (Homens)	64.0	68.2	70.6	73.3	76.7	78.0
Esp vida à nascença (Mulheres)	70.3	75.2	77.6	80.1	82.6	83.5
Esp vida aos 65 anos (Total)	13.5	14.9	15.9	17.3	18.8	19.6
Esp vida aos 65 anos (Homens)	12.2	13.3	14.2	15.4	16.9	17.7
Esp vida aos 65 anos (Mulheres)	14.6	16.3	17.3	18.8	20.3	21.0

Quadro 1: Indicadores demográficos em Portugal 1970-2019

Fonte: Pordata e INE

Esta é, evidentemente, uma situação perigosa para a sustentabilidade do Sistema de Segurança Social e também, sobretudo devido aos aumentos na longevidade, para os planos e fundos de pensões privados. Na secção seguinte, mostra-se como a legislação procurou ajustar a fórmula de cálculo das pensões da SS, no sentido de as tornar actuarialmente mais ajustadas à realidade.

3 I A MATEMÁTICA DAS PENSÕES DA SS

3.1 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 329/93

A primeira Lei de Bases da Segurança Social estabeleceu nos artigos 26º e 27º diretrizes genéricas para o cálculo dos montantes das prestações, em particular das pensões. Nessa época, havia dois contribuintes por pensionista. Nove anos mais tarde, quando o rácio já havia caído para 1.7, surgiu o Decreto-Lei 329/93, do regime de proteção na velhice e na invalidez dos beneficiários do regime geral de Segurança Social, visando afinar o cálculo em termos atuariais.

Já então, 27 anos atrás, o preâmbulo do diploma refere

as profundas mudanças que nos aspetos sociais, demográficos e económicos se têm feito sentir nos últimos anos (...). Os problemas e desafios que se colocam decorrem de fatores que, em Portugal, à semelhança dos demais países europeus, se enquadram no progressivo envelhecimento da população, quer por força do decréscimo da taxa de natalidade, quer pelo crescimento dos níveis de esperança de vida.

Atendendo a estas preocupações, o valor da pensão de velhice (P_{93}) passaria a ser calculado com a fórmula

$$P_{93} = 0.02 \times N \times RR_{93}, \quad (1)$$

onde N é o número de anos com registo suficiente de contribuições e RR é a

Remuneração de Referência; RR_{93} é igual a $R/140$, sendo R o total das remunerações dos dez anos civis onde se encontrem as remunerações com montantes mais elevados, dos últimos 15 anos de registo. Estas remunerações são revalorizadas através do Índice de Preços do Consumidor (IPC), protegendo os rendimentos dos efeitos da inflação. A taxa global de formação da pensão ($0.02 \times N$) tem por limites 30% (mínimo) e 80% (máximo).

Com a aplicação de (1), obrigou-se o período contributivo mínimo a passar de dez para 15 anos, o cálculo de RR passou a incluir o IPC e a taxa de formação da pensão foi reduzida de 2.2% para 2%.

3.2 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 35/2002

Decorrido novo período de nove anos, novas - e complexas - alterações ao cálculo da pensão foram aprovadas (Decreto-Lei 35/2002), sempre com o objetivo de o tornar mais acomodado à realidade.

O primeiro ajustamento foi na Remuneração de Referência (RR_{02}), que passou a ser calculada incluindo *toda a carreira contributiva* (N), com um máximo de 40 anos. Quer dizer, agora $RR_{02} = \frac{TR}{N \times 14}$, com TR igual ao total de remunerações anuais revalorizadas dos N anos de contribuições. Quando $N > 40$, tomam-se as 40 remunerações revalorizadas mais elevadas.

Um segundo acerto refere-se ao modo de revalorização da base de cálculo: as remunerações registadas até 31/12/2001 continuam a ser revalorizadas com o IPC; as remunerações posteriores são revalorizadas pela aplicação de um índice composto por 75% do IPC e 25% da evolução média dos ganhos subjacentes às contribuições declaradas à SS, com máximo igual ao IPC acrescido de 0,5%.

A terceira correção respeitou à taxa anual de formação da pensão, que passou a variar entre 2,3% e 2%, tendo em consideração o número de anos civis de contribuições e o valor apurado de RR_{02} por comparação com o Salário Mínimo Nacional (SMN). Distinguiram-se dois casos.

Aos beneficiários com 20 ou menos anos de registo de remunerações, aplica-se uma taxa anual de formação de 2% (qualquer que seja o valor de RR_{02}), sendo a taxa global de formação igual ao produto de 2% pelo número de anos civis, com o limite mínimo de 30%, correspondente aos 15 anos do prazo de garantia. O valor da pensão de velhice será então

$$P_{02} = 0.02 \times N \times RR_{02}, \quad (2)$$

Aos beneficiários com pelo menos 21 anos de contribuições, aplicam-se taxas anuais decrescentes, do seguinte modo: à parcela de RR_{02} que não exceda 1.1 SMN aplica-se a taxa de 2.3%; à parcela seguinte, até 2 SMN aplica-se 2.25%; à parcela seguinte, até 4 SMN aplica-se 2.2%; à parcela seguinte, até 8 SMN aplica-se 2.1%; finalmente, aplica-se a taxa de 2% ao valor que exceda 8 SMN . Daqui resulta

que a pensão passa a ser calculada de acordo com a fórmula

$$P_{02} = \begin{cases} 0.0230 \times N \times RR_{02} & RR_{02} \leq 1.1SMN \\ 0.0225 \times N \times RR_{02} + 0.00055 \times N \times SMN & 1.1SMN < RR_{02} \leq 2SMN \\ 0.0220 \times N \times RR_{02} + 0.00155 \times N \times SMN & 2SMN < RR_{02} \leq 4SMN \\ 0.0210 \times N \times RR_{02} + 0.00555 \times N \times SMN & 4SMN < RR_{02} \leq 8SMN \\ 0.0200 \times N \times RR_{02} + 0.01355 \times N \times SMN & RR_{02} > 8SMN \end{cases} \quad (3)$$

Os artigos 13.º, 14.º e 15.º do diploma garantem que a transição para a nova fórmula de cálculo não contraria as expectativas dos beneficiários, numa perspetiva de salvaguarda de direitos adquiridos.

3.3 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 187/2007

No preâmbulo deste Decreto-Lei lê-se que

A aprovação do presente decreto-lei procura concretizar as medidas mais adequadas para enfrentar os riscos do envelhecimento demográfico (...) Prevê-se a aplicação, na determinação do montante das pensões, de um factor de sustentabilidade, relacionado com a evolução da esperança média de vida e que é elemento fundamental de adequação do sistema de pensões às modificações de origem demográfica ou económica.

O diploma refere ainda o envelhecimento ativo, incentivando a permanência no mercado de trabalho. É neste sentido que cria o fator de sustentabilidade (*FS*), que é a sua principal inovação e visa produzir um corte no valor das pensões, à medida que a longevidade dos pensionistas vai aumentando. A idade normal de reforma permanece nos 65 anos e as fórmulas (2) e (3) continuam válidas, sendo a única alteração resultante da substituição do *SMN* pelo Indexante dos Apoios Sociais (*IAS*), em (3).

O *IAS* é um referencial adotado na fixação, cálculo e atualização das contribuições, das pensões e outras prestações sociais. Aplica-se desde 1 de Janeiro de 2007 e, em princípio, é atualizado todos os anos de acordo com o crescimento real do Produto Interno Bruto e a variação do IPC. Em 2007 correspondia a 99% do *SMN*; atualmente, não chega a 70%. Esta evolução também se repercute no valor das pensões, fazendo diminuir sobretudo as mais elevadas.

Na realidade, o montante mensal da pensão (P_{07}) passou a ser determinado meramente multiplicando o fator de sustentabilidade pelo valor obtido com a aplicação de (2) ou (3), considerando nesta *IAS* em vez de *SMN*, ou seja,

$$P_{07} = FS \times P_{02}, \quad (4)$$

sendo

$$FS = \frac{EV_{2006}}{EV_{ano_{i-1}}}, \quad (5)$$

onde EV_{2006} é a esperança de vida aos 65 anos observada em 2006 (18.1 anos) e $EV_{ano_{i-1}}$ é a esperança de vida aos 65 anos observada no ano anterior ao do início da pensão. A esperança de vida aos 65 anos relativa a cada ano é publicada pelo INE. FS começou por trazer um corte de 0.56%, em 2008; em 2013, último ano em que se calculou com (5), a redução já ia em 4.78%.

Também agora se procura salvaguardar direitos tidos como adquiridos. Por exemplo, para os beneficiários inscritos até 31 de Dezembro de 2001 e que iniciam a sua pensão até 31 de Dezembro de 2016, aplica-se a fórmula

$$P_{07} = \frac{P_1 \times N_1 + P_2 \times N_2}{N}, \quad (6)$$

onde P_1 é calculada com (1), P_2 é calculada com (4), N_1 é o número de anos com registo de remunerações para efeitos da taxa de formação da pensão até 31 de Dezembro de 2006, N_2 é o número de anos contáveis a partir de 1 de Janeiro de 2007 e N é o número total de anos.

Para os beneficiários inscritos até 31 de Dezembro de 2001, que iniciem a pensão após 1 de Janeiro de 2017, vem

$$P_{07} = \frac{P_1 \times N_3 + P_2 \times N_4}{N}, \quad (7)$$

onde P_1 e P_2 se calculam como atrás, N_3 é o número de anos com registo de remunerações para efeitos da taxa de formação da pensão até 31 de Dezembro de 2001 e N_4 é o número de anos contáveis a partir de 1 de Janeiro de 2002.

3.4 O Presente

As fórmulas de cálculo introduzidas pelo Decreto-Lei 187/2007 continuam em vigor, mas passaram já por adaptações várias, fruto da conjuntura particularmente difícil que o país atravessou.

Assim, em janeiro de 2014, a idade legal da reforma aumentou de 65 para 66 anos. Em 2015, manteve-se nos 66 anos, mas de 2016 em diante passou a variar de acordo com a evolução da esperança de vida. Em 2020, é de 66 anos e cinco meses e aumentará mais um mês em 2021, para os 66.5 anos.

Também em 2014, o fator de sustentabilidade começou a ser calculado com base na esperança de vida aos 65 anos *no ano 2000* (17 anos), em vez de ser em 2006 (18.1 anos), como até então, o que é muito penalizador:

$$FS = \frac{EV_{2000}}{EV_{ano_{i-1}}}. \quad (8)$$

A boa notícia é que *passou a abranger apenas as reformas antecipadas* (que sofrem ainda uma redução de 0.5%, por cada mês de antecipação relativamente à idade normal de reforma). Na conjuntura particularmente difícil que o país então atravessava, o Governo queria a todo o custo travar as reformas antecipadas.

Em geral, num quadro em que os progressos na longevidade têm sido contínuos e a idade de reforma tende a refleti-los, é cada vez mais penalizador antecipar a reforma, por sua vez, mais e mais tardia. A percentagem da redução era 4.78% em 2013. Em 2014, ano da mudança, saltou para 12.34%, embora abrangendo apenas as reformas antecipadas. Em 2020 o corte será de 15.2% (penalização a que se somará 0.5% por cada mês de antecipação). Só em circunstâncias particulares, previstas na lei, é que se abrem exceções à aplicação destes cortes.

Deve notar-se que, quando o valor da pensão calculada nos termos gerais for inferior aos valores mínimos garantidos, o respetivo montante é acrescido do chamado complemento social, igual à diferença entre o valor mínimo garantido e o valor da pensão estatutária.

3.5 Invalidez e Sobrevivência

As secções anteriores respeitam ao cálculo das pensões de velhice (64% do total da despesa do sistema previdencial), mas são também importantes as pensões de invalidez (6%) e de sobrevivência (13%), ver IGFSS (2019) e Ministério das Finanças (2018).

3.5.1 Pensões de Invalidez

As pensões de invalidez são atribuídas aos beneficiários com incapacidade permanente para o trabalho, relativa ou absoluta, de causa não profissional, certificada pelo Sistema de Verificação de Incapacidades

A incapacidade permanente para o trabalho resulta de invalidez relativa (o beneficiário não pode obter mais de um terço da remuneração correspondente ao exercício normal da sua profissão e presume-se que nos três anos seguintes não recupere a capacidade de obter mais de 50% dessa remuneração) ou de invalidez absoluta (o beneficiário apresenta incapacidade permanente e definitiva para toda e qualquer profissão ou trabalho, presumindo-se que não recupere, até à idade legal de acesso à pensão de velhice, a capacidade de obter quaisquer meios de subsistência). O prazo de garantia para atribuição da pensão de invalidez relativa é igual a cinco anos. No caso da invalidez absoluta é de três anos (ver <http://www.seg-social.pt/pensao-de-invalidez>).

O montante da pensão de invalidez (PI) é calculado, com as necessárias adaptações, usando as equações (2), (3), (4), (6) e (7), com $FS = 1$ Tal como no caso

da pensão de velhice, há valores mínimos garantidos para este benefício.

3.5.2 Pensões de Sobrevivência

As pensões de sobrevivência são atribuídas aos familiares, por morte do beneficiário. Têm direito (ver <http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia>) o cônjuge, ex-cônjuges (se à data da morte do beneficiário dele receberem pensão de alimentos), pessoa em união de facto, descendentes (incluindo os nascituros e os adotados plenamente e enteados, ou outros, se estiverem a cargo do beneficiário falecido à data da morte) e ascendentes (se à data do falecimento estiverem a cargo do beneficiário e não existirem cônjuge, ex-cônjuge e descendentes com direito à pensão).

Os descendentes com idade igual ou superior a 18 anos só têm direito se não exercerem atividade enquadrada em qualquer regime de proteção social de inscrição obrigatória, com exceção da atividade prestada ao abrigo de contrato de trabalho em período de férias escolares, e satisfizerem ainda alguma das seguintes condições: terem menos de 25 anos e estarem matriculados em curso de nível secundário, pós-secundário não superior, ou superior; terem menos de 27 anos e estarem matriculados em pós-graduações, ciclos de estudos de mestrado ou doutoramento ou a realizar estágio indispensável à obtenção do respetivo grau; serem deficientes e, nessa qualidade, destinatários de prestações familiares ou da prestação social para a inclusão.

A pensão de sobrevivência é atribuída se, à data da morte, o beneficiário falecido tiver completado o prazo de garantia de 36 meses de contribuições.

O valor da pensão de sobrevivência é calculado pela aplicação das percentagens do Quadro 2 ao valor da pensão de invalidez ou velhice que o beneficiário recebia, ou daquela a que teria direito a receber, à data do falecimento. Quando houver mais do que um titular, o montante é repartido em partes iguais.

Titular	Número de titulares		
	1	2	3 ou mais
Cônjuge/ex-cônjuge/pessoa em união de facto	60%	70%	70%
Descendentes*	20%	30%	40%
Ascendentes**	30%	50%	80%

Quadro 2: Pensão de sobrevivência, em percentagem da pensão de velhice/invalidez

*Estas percentagens duplicam, caso não haja cônjuge ou ex-cônjuge com direito à pensão.

** Se não houver cônjuge, ex-cônjuge e descendentes com direito à pensão

Fonte: <http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia>

Uma vez que o valor da pensão de sobrevivência (PS) é calculado por mera aplicação de percentagens ao valor da pensão de velhice (ou de invalidez) que o beneficiário recebia, ou teria direito a receber, à data do falecimento, continuam a aplicar-se as fórmulas antes indicadas, ou os montantes mínimos correspondentes. A terminar, um reparo: na exposição anterior apenas foi tratada o caso geral para cada tipo de pensão, mas a verdade é que existem situações especiais que a legislação também prevê e ultrapassam os objetivos deste texto.

4 I AVALIAÇÃO DAS RESPONSABILIDADES

O apuramento das responsabilidades com o pagamento das pensões é indispensável, quer sejam financiadas num sistema de *pay-as-you-go*, como acontece com a SS portuguesa, quer se trate de esquemas privados. Pode ser uma questão bastante complexa, que extravasa muito os limites deste texto. Por essa razão, aflora-se aqui apenas o essencial. Para mais detalhes ver, por exemplo, Garcia e Simões (2010).

Uma renda financeira, ou anuidade, é uma qualquer série de pagamentos equidistantes. As pensões de velhice, invalidez e sobrevivência são rendas financeiras.

A tipificação das rendas pode fazer-se tendo em consideração vários fatores. Neste caso são rendas incertas, pois a realização dos pagamentos está dependente da sobrevivência do beneficiário. Mais ainda, são rendas vitalícias (com exceção de algumas rendas de sobrevivência a dependentes, que são temporárias), ou seja, os pagamentos cessam com a morte do anuitante, e podem ser imediatas ou diferidas, caso ainda não estejam a pagamento.

Assim, considerando um indivíduo que iniciou as contribuições com idade e que tem atualmente a idade x e espera obter um benefício anual (estimado) B_{IR} quando atingir a idade normal de reforma, o valor atual total das responsabilidades (responsabilidade atuarial) com a sua pensão de velhice é

$$VABT_x = v^{IR-x} \frac{S_a(IR)}{S_a(x)} B_{IR} a_{IR}^*, v = \frac{1}{1+i}, \quad (9)$$

onde $S_a(\dots)$ é a função de sobrevivência para um beneficiário que inicia as contribuições com idade α , i é a taxa de atualização dos pagamentos futuros ao momento presente e a_{IR}^* é o valor atuarial de uma unidade de pensão na idade normal de reforma (anuidade vitalícia que poderá não ser constante ou ter um fracionamento especial, para incluir o subsídio de férias e o subsídio de Natal, por exemplo). Se a perpetuidade for constante (em princípio, não é e ajustamentos devem ser feitos), e os pagamentos da pensão forem feitos no início de cada mês, então

$$a_{IR}^* = \ddot{a}_{IR}^{(12)} = \frac{1}{12} \sum_{k \in \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots\right\}} v^k \frac{S_a(IR+k)}{S_a(IR)}. \quad (10)$$

Ainda que o benefício seja definido à partida, a determinação de B_{IR} pode não ser trivial. Em geral, a realização destes cálculos obriga a estabelecer hipóteses relativamente a um conjunto significativo de variáveis sensíveis, determinantes para o resultado. Para um aprofundamento no caso específico da Segurança Social, ver Iyer (1999).

5 | CONCLUSÕES

Como se viu, as ameaças à sustentabilidade do Sistema de Segurança Social português estão fortemente associadas ao pagamento das pensões de velhice e também de sobrevivência e invalidez.

Projeções são feitas todos os anos, com conclusões variáveis de ano para ano, ver Moreira *et al.* (2019), para uma análise comparada. Esta variabilidade é notória.

No relatório ao Orçamento do Estado para 2015 (Ministério das Finanças (2014) estima-se que o Fundo de Estabilização Financeira da Segurança Social (FEFSS) se esgotará a partir de 2030. Já no relatório ao Orçamento do Estado para 2019, onde se apresentam projeções muito detalhadas, pode ler-se que o FEFSS deverá fazer face a saldos negativos do sistema previdencial a partir do final da década de 2020, ficando esgotado no final da década de 2040 (Ministério das Finanças (2018). E, no relatório do Orçamento do ano seguinte (Ministério das Finanças (2019)), fala-se ainda de nova (e substancial) melhoria, relativamente a 2019, pois só se prevê o esgotamento do FEFSS na segunda metade da década de 50...

Recorde-se que O FEFSS é um património autónomo que tem por objetivo assegurar a estabilização financeira da Segurança Social, designadamente cobrindo as despesas previsíveis com pensões por um período mínimo de dois anos (art. 1º do Regulamento de Gestão do FEFSS aprovado pela Portaria 1273/2004, de 7 de outubro).

Naturalmente, existe a consciência de que, ainda que se esteja numa fase em que a evolução é favorável, é grande a volatilidade de conclusões derivadas a partir de projeções com um prazo de 50 anos. A reviravolta que a atual pandemia trouxe ao mundo como o conhecíamos, e cujas consequências estamos bem longe de avaliar, é um sinal disso.

Seja como for, o que resulta evidente da análise que se fez é que a Matemática Atuarial virá sempre em socorro dos políticos, quando se trata de

equilibrar o sistema. Nos esquemas privados, em que a possibilidade de modificar a fórmula de cálculo de benefícios definidos está afastada, observa-se uma tendência cada vez maior para a substituição de planos de benefício definido por planos de contribuição definida, transferindo-se também desse modo a maior parte do risco para os participantes, ver Antolin *et al.* (2009).

REFERÊNCIAS

ANTOLIN, P.; SCHEUENSTUHL, G. F.; BLOME S.; KARIM, D.; PAYET, S.; YERMO, J. Investment regulations and defined contribution pensions. **OECD Working paper on insurance and private pensions**, 37, 2009.

GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática Actuarial, Vida e Pensões**. Almedina, Lisboa, 2010.

INSTITUTO DE GESTÃO FINANCEIRA DA SEGURANÇA SOCIAL - IGFSS. **Conta da Segurança Social 2017**. Lisboa, 2019. <http://www.seg-social.pt/publicacoes?bundleId=16519111>

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE a). **Projeções da População Residente em Portugal 2018-2080**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=406534255&DESTAQUESmodo=2&xlang=pt

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE b). **Tábuas de Mortalidade para Portugal 2017 – 2019**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=414427684&DESTAQUEStema=55466&DESTAQUESmodo=2

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE c). **Estimativas da População Residente em Portugal 2019**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=414436913&DESTAQUEStema=55466&DESTAQUESmodo=2

IYER, S. **Actuarial mathematics of social security pensions**. Quantitative Methods in Social Protection Series. Geneva, International Labour Office / International Social Security Association, 1999.

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2015 – Relatório**. Lisboa, 2014. <https://www.dgo.pt/politicaorcamental/OrcamentodeEstado/2015/Proposta%20do%20Or%20C3%A7amento/Documentos%20do%20OE/Rel-2015.pdf>

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2019 – Relatório**. Lisboa, 2018. <https://www.dgo.pt/politicaorcamental/OrcamentodeEstado/2019/Proposta%20do%20Or%20C3%A7amento/Documentos%20do%20OE/Rel-2019.pdf>

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2020 – Relatório**. Lisboa, 2019. <https://www.oe2020.gov.pt/wp-content/uploads/2019/12/Relatorio-Orcamento-do-Estado-2020.pdf>

Moreira, A. (coordenador); Azevedo, A. B.; Manso, L. P.; Nicola, R. **Financial and Social Sustainability of the Portuguese Pension System**. Fundação Francisco Manuel dos Santos, Lisboa, 2019.

Legislação

PORTUGAL. [Constituição (1976)]. **Constituição da República Portuguesa**. Assembleia Constituinte, 1976. <https://dre.pt/application/file/a/502573>

PORTUGAL. Lei n.º 28/84, de 27 de julho de 1984. Lei de Bases da Segurança Social. **Diário da República** n.º 188/1984, p. 2501-2510. Série I de 1984-08-14. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/382393/details/normal>

PORTUGAL. Lei n.º 04/2007, de 6 de janeiro de 2007. Aprova as bases gerais do sistema de segurança social. **Diário da República** n.º 11/2007, p. 345-356, Série I de 2007-01-16. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/522781/details/maximized>

PORTUGAL. Decreto-Lei n.º 203/74, de 15 de maio de 1974. Define o programa do Governo Provisório e estabelece a respectiva orgânica. **Diário do Governo** n.º 113/1974, p. 623-627, Série I de 15-05-1974. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/623386/details/normal>

PORTUGAL. Decreto-Lei n.º 329/93, de 25 de setembro de 1993. Estabelece o regime de protecção na velhice e na invalidez dos beneficiários do regime geral de segurança social. **Diário da República** n.º 226/1993, p. 5378-5391, Série I-A de 1993-09-25. <https://dre.pt/web/guest/pesquisa/-/search/653127/details/normal?q=Decreto-Lei+329%2F93>

PORTUGAL. Decreto-Lei n.º 35/2002, de 19 de fevereiro de 2002. Define novas regras de cálculo para as pensões de invalidez e velhice a atribuir pelo sistema de solidariedade e segurança social no âmbito da nova Lei de Bases da Solidariedade e Segurança Social. **Diário da República** n.º 42/2002, p. 1355-1359, Série I-A de 19-02-2002. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/278032/details/maximized>

PORTUGAL. Decreto-Lei n.º 187/2007, de 10 de maio de 2007. Aprova o regime de protecção nas eventualidades invalidez e velhice dos beneficiários do regime geral de segurança social. **Diário da República** n.º 90/2007, p. 3100-3116, Série I de 10-05-2007. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/520669/details/maximized>

PORTUGAL. Portaria n.º 1273/2004, de 7 de outubro de 2004. Aprova o Regulamento de Gestão do Fundo de Estabilização Financeira da Segurança Social. **Diário da República** n.º 236/2004, p. 6233-6236, Série I-B de 07-10-2004. <https://dre.pt/pesquisa/-/search/590479/details/maximized>

Outros sites consultados:

<https://www.pordata.pt/>

<http://www.seg-social.pt/pensao-de-invalidez>

<http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia>

ÍNDICE REMISSIVO

A

Área 2, 17, 26, 80, 85, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 149, 150, 164, 169, 188, 193, 195, 196, 197, 201, 204, 207, 210, 223, 228, 230, 232, 233, 234, 236, 243, 249, 252

Atividade matemática 26, 202, 204, 246

B

Boécio 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159

C

Cálculo mental 19, 20, 23, 25, 27

Computação 23, 24, 25, 26, 33, 34, 84, 157

Contextos não formais 87, 88

Cotidiano 15, 16, 17, 18, 20, 21, 76, 79, 83, 111, 161, 162, 163, 165, 166, 190, 206, 224, 230, 241, 245, 250

Criatividade 84, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 190

Currículo de matemática 200

D

De Institutione Arithmetica 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160

Dinâmica populacional 99, 101, 104, 105, 107, 109

Diretrizes curriculares 200

E

Educação matemática 14, 21, 22, 33, 110, 111, 112, 118, 123, 124, 125, 126, 139, 159, 173, 186, 187, 198, 199, 212, 223, 239, 247, 250, 252

EJA 15, 16, 17, 18, 19, 21

Ensino da matemática 75, 76, 85, 86, 90, 127, 129, 185, 187, 188, 196, 241

Ensino fundamental 2, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 32, 75, 76, 78, 79, 86, 112, 124, 129, 138, 139, 143, 151, 187, 188, 193, 197, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 208, 209, 238, 250

Ensino médio 19, 110, 112, 113, 129, 130, 136, 223, 224, 225, 226, 227, 236, 237, 238, 240, 241, 244

Espaço de Schwartz 35, 41

F

Fatoração 245, 246

Feira 15, 16, 17, 18, 19

Filosofia 152, 153, 154, 157, 159, 160, 252

Formação de professores 34, 87, 88, 89, 90, 161, 164, 165, 173, 211, 212, 224, 233, 234, 250, 252

Formulação de problemas 87, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 191

Frações 1, 3, 9, 10, 11, 12, 13

Função afim 240

Função quadrática 240

Funciones en variable compleja 50, 51, 54

G

GeoGebra 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 137, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 148, 151

Geometria 2, 6, 94, 96, 126, 128, 129, 130, 131, 135, 136, 139, 155, 156, 159, 185, 200, 201, 203, 206, 208, 209, 234, 237

H

História da matemática 126, 127, 130, 136, 137, 152, 154, 156, 158, 159, 160, 173, 174, 180, 184, 186, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223

História no ensino de matemática 210

Homotetia 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151

I

Interdisciplinaridade 219, 224, 227, 230, 239

J

Jogo digital 1, 3, 9, 13, 14

Jogos matemáticos 240, 244

L

Liber Quadratorum 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Linguagem algébrica 1, 3, 184

Ludicidade 244, 246, 252

M

Matemática 1, 2, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 39, 48, 50, 52, 61, 62, 65, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 135, 136, 137, 138, 139, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174,

180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252

Matemática atuarial 62, 72

Modelagem matemática 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 232, 233, 234, 238

Modelagem matemática crítica 110, 112, 113, 123

P

Pensamento computacional 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34

Pensões 62, 63, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74

Perímetro 131, 132, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 234

Pesca artesanal 110, 111, 112, 114, 117, 119, 120, 121, 122, 123

PIBID 240, 241, 245, 246, 252

Portugal 62, 63, 64, 65, 73, 74, 87

Praxeologia 173, 174, 181, 184, 186

Proporção 20, 105, 110, 112, 122, 123, 177, 182, 183, 233, 234, 237

Proporcionalidade 112, 138, 139, 140, 149, 150, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 207

R

Realidade 21, 65, 66, 67, 78, 89, 92, 110, 111, 112, 113, 117, 124, 163, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 198, 206, 212, 226, 230, 232, 238, 246

Recorrência linear 99, 102

Regra de Três 19, 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Resolução de problemas 23, 24, 26, 34, 37, 87, 89, 90, 91, 92, 112, 113, 129, 183, 191, 204, 207, 225, 237, 242, 244

S

Scratch 1, 2, 3, 4, 34

Segurança social 62, 63, 65, 72, 73, 74

Softwares de ensino 75, 77

T

Tecnologias 2, 3, 13, 26, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 127, 129, 136, 138, 139, 150, 161, 166, 201, 203, 252

Teorema de Carnot 126, 129, 130, 132

Territórios virtuais 161, 162, 163

Tilápia-do-nilo 99, 104, 107, 108, 109

Transformada de Fourier 35

Trilhos matemáticos 87, 88, 89, 91, 92, 94, 97

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

@atenaeditora 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

@atenaeditora 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 