Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena
Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecário
Maurício Amormino Júnior
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Karine de Lima Wisniewski
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-362-0
DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro “***Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas***”, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .... **1**

JOGOS DIGITAIS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Valdinei Cezar Cardoso
Ana Paula Santos Pereira
Arina de Jesus Rozario
Camila Muniz de Oliveira
Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

DOI 10.22533/at.ed.6202008091

CAPÍTULO 2 .... **15**

OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NO COTIDIANO DA FEIRA LIVRE: UMA INVESTIGAÇÃO FEITA PELOS ALUNOS DA EJA

Tacio Vitaliano da Silva
Francisca Vandilma Costa

DOI 10.22533/at.ed.6202008092

CAPÍTULO 3 .... **23**

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL COMO ESTRATÉGIA DE REFORÇO DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO MENTAL

Julio Cezar Romero
Juliano Schimiguel

DOI 10.22533/at.ed.6202008093

CAPÍTULO 4 .... **35**

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Marcel Lucas Picanço Nascimento
Vinícius Lemos dos Santos

DOI 10.22533/at.ed.6202008094

CAPÍTULO 5 .... **50**

EL USO DE GEOGEBRA PARA VISUALIZAR FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES

Cesar Martínez Hernández
Rodolfo Rangel Alcántar

DOI 10.22533/at.ed.6202008095

CAPÍTULO 6 .... **62**

A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE

Onofre Alves Simões

DOI 10.22533/at.ed.6202008096

CAPÍTULO 7 .... **75**

O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Jonathan Bregochi Delmondes

Roseni Aparecida Pereira de Macedo

DOI 10.22533/at.ed.6202008097

CAPÍTULO 8 87

OS TRILHOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Isabel Vale

Ana Barbosa

DOI 10.22533/at.ed.6202008098

CAPÍTULO 9 99

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Daniel Freitas Martins

Mehran Sabeti

Nicolly Ramalho Silva

DOI 10.22533/at.ed.6202008099

CAPÍTULO 10 110

A DIVISÃO EM PARTES UTILIZADA NA PESCA ARTESANAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EMBASADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCRÍTICA

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baia da Silva

Fábio José da Costa Alves

DOI 10.22533/at.ed.62020080910

CAPÍTULO 11 126

TEOREMA DE CARNOT: UMA VALIDAÇÃO COM GEOMETRIA DINÂMICA

Giancarlo Secci de Souza Pereira

Cristiane Ruiz Gomes

Antônio Carlos Ferreira

Paulo Vilhena da Silva

DOI 10.22533/at.ed.62020080911

CAPÍTULO 12 138

OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERÍMETRO, ÁREA E PROPORCIONALIDADE DE POLÍGONOS VIA HOMOTETIA

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baia da Silva

Fábio José da Costa Alves

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

DOI 10.22533/at.ed.62020080912

CAPÍTULO 13 152

UMA ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE BOÉCIO E DA OBRA *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* PARA A MATEMÁTICA

Francisco Aureliano Vidal

Márcio Alisson Leandro Costa

DOI 10.22533/at.ed.62020080913

CAPÍTULO 14... 161

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Gaspar Soares

Márcio Rufino Silva

DOI 10.22533/at.ed.62020080914

CAPÍTULO 15... 173

A REGRA DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO *LIBER QUADRATORUM*

Denivaldo Pantoja da Silva

José dos Santos Guimarães Filho

João Cláudio Brandemberg

DOI 10.22533/at.ed.62020080915

CAPÍTULO 16... 187

AS CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA SALA DE AULA DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Thaís Cristina Barros Machado

DOI 10.22533/at.ed.62020080916

CAPÍTULO 17... 200

O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BRASILEIRAS

Miriam Ferrazza Heck

Carmen Teresa Kaiber

DOI 10.22533/at.ed.62020080917

CAPÍTULO 18... 210

HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: RESULTADOS DO USO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO NA GRADUAÇÃO

Jessie Heveny Saraiva Lima

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.62020080918

CAPÍTULO 19... 224

A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR

Keith Gabriella Flenik Morais

Angelita Minetto Araújo

Tiago Skroch de Almeida

DOI 10.22533/at.ed.62020080919

CAPÍTULO 20... 240

O USO DE JOGOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Ana Lorena Miranda Gomes

Éllen Beatriz Araújo da Silva
Francisco das Chagas Ferreira Carvalho
Maria Iêda Rodrigues de Oliveira Silva
Wanderson de Oliveira Lima

DOI 10.22533/at.ed.62020080920

CAPÍTULO 21 245

ENSINO DE FATORAÇÃO: ALUNO APRENDENDO A FAZER MATEMÁTICA

Daniellen Costa Protazio
Cinara Damacena Cardoso
Aline Lorinho Rodrigues
Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante
Ashiley Sarmento da Silva
Yara Julyana Rufino dos Santos Silva
Camila Americo Neri
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Odivânia Ferreira de Moraes
Izaias Silva Rodrigues
Priscila da Silva Santos
Cristiane Matos Oliveira

DOI 10.22533/at.ed.62020080921

SOBRE OS ORGANIZADORES 252

ÍNDICE REMISSIVO... 253

CAPÍTULO 9

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 25/06/2020

Daniel Freitas Martins
Universidade Federal de Viçosa – *Campus* Florestal
Florestal – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/3855503742201306

Mehran Sabeti
Universidade Federal de Viçosa – Campus Florestal
Florestal – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/1192944329873105

Nicolly Ramalho Silva
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9838476446868418

RESUMO: Muitos problemas do mundo real podem ser representados por modelos matemáticos. A modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados ao problema de determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nilo (Oreochromis niloticus) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Os modelos aplicam técnicas de equações de diferenças finitas, também chamadas de recorrências lineares, para descreverem o problema matematicamente. Este problema está presente no campo, mais especificamente na Aquacultura, e seu estudo é importante pois permite explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Este trabalho também apresenta os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados e faz uma discussão a respeito da importância desses temas em aplicações no mundo real.
PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática, recorrência linear, equação de diferenças, dinâmica populacional, tilápia-do-nilo.

MATHEMATICAL MODELING IN THE FIELD

ABSTRACT: Many real-world problems can be represented by mathematical models. Mathematical modeling consists of the ability to take a defined problem in some relatively complex practical situation, transform it into a mathematical model and look for a solution that can be reinterpreted in terms of the original situation. In this work, two mathematical models were revised on the problem of determining the number of fish of the species Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) at a given time stage considering a controlled environment. The models apply finite difference equation techniques, also called linear recurrences, to describe the problem mathematically. This problem is present in the field, more specifically in Aquaculture, and its study is important because it allows to explore

abstract concepts, to improve the production of fish for consumption, to reduce expenses in the culture of fish of this species, etc. This work also presents the main concepts involved in the studies addressed and discusses the importance of these topics in real-world applications.
KEYWORDS: Mathematical modeling, linear recurrence, difference equation, population dynamics, Nile tilapia.

1 I INTRODUÇÃO

Muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos, sendo que as mesmas foram desenvolvidas a partir da necessidade de se obter uma solução a partir de um modelo matemático, que nada mais é do que a interpretação do problema real para a linguagem matemática. De acordo com Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. De acordo com Giordano et al. (2013), um modelo matemático permite que conclusões matemáticas sejam obtidas a respeito de um sistema ou comportamento do mundo real. Essas conclusões podem servir de base para que sejam feitas tomadas de decisão que tenham um impacto positivo no futuro. Veja na Fig. 1 um fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

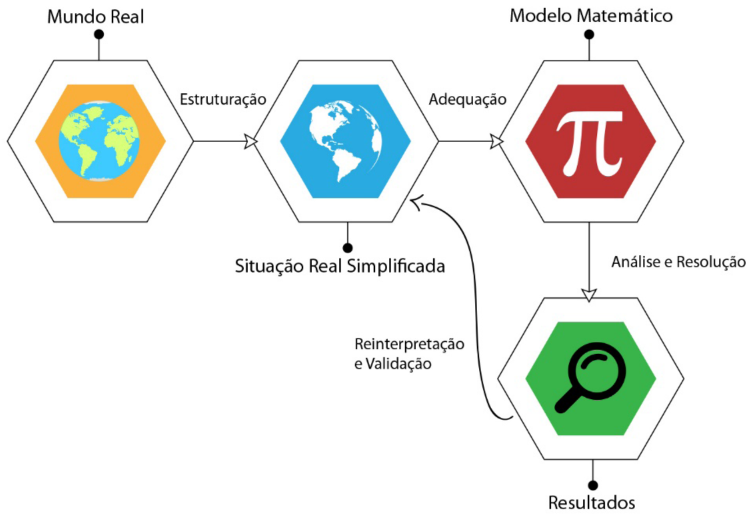

Figura 1: Fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

Fonte: Elaborada pelos autores (2020).

Muitos estudos possuem o foco na cultura de peixes em reservas controladas. Em particular, estudos relacionados à cultura de tilápias-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) possuem finalidades diversas, como explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Júnior et al. (2014) apresenta um estudo envolvendo a aplicação de modelos matemáticos ao crescimento de tilápias-do-nilo criadas em tanques-rede no Submédio do São Francisco, de modo a determinar quais deles melhor representam as condições de criação para a região. Yi (1998) apresenta um modelo de crescimento bioenergético para as tilápias-do-nilo em tanques fertilizados, envolvendo seis variáveis-chave que afetam o crescimento dessa espécie nesse tipo de ambiente. Giordano et al. (2013) apresenta um modelo matemático para predizer o peso de um determinado peixe da espécie robalo (*bass*) tendo como informações a densidade média de peso de peixes desta espécie e o tamanho do peixe considerado. Bassanezi (2002) apresenta dois estudos acerca da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo. Em um deles, é estabelecida uma maneira de determinar o número de peixes após um determinado período, considerando dois estágios: alevinos (jovens) e adultos. No outro, taxas de sobrevivência são incluídas no modelo e três estágios distintos são considerados: ovos, alevinos e adultos.

Outros modelos mais complexos podem ser elaborados considerando-se a presença de outros ambientes. Tais ambientes podem, por exemplo, ter a população dividida em predadores e presas (MURRAY, 2002). Em Raymond et al. (2019), um modelo predador-presa é apresentado envolvendo três espécies de peixes: perca-do-nilo, ciclídeos e tilápias. A perca-do-nilo foi considerada a espécie predadora, e as demais foram consideradas as presas do sistema.

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica a respeito de estudos matemáticos relacionados à dinâmica populacional de peixes tilápias-do-nilo apresentados em Bassanezi (2002). O trabalho está assim organizado: a Seção 2 apresenta uma introdução ao conceito de recorrências; as Seções 3 e 4 descrevem as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, respectivamente; as Seções 5 e 6 apresentam os modelos matemáticos referentes ao estudo da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo, sendo que nesta última há a inclusão de taxas de sobrevivência; a Seção 7 apresenta as considerações finais deste trabalho.

2 | RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Algumas sequências podem ser definidas por regras que permitem calcular qualquer termo em função dos anteriores, usualmente do antecessor imediato ou de uma quantidade pequena de antecessores imediatos. Esse tipo de construção é dita ser uma construção por recorrência e, para que a sequência possa ser gerada, é necessário o fornecimento do(s) primeiro(s) termo(s) que a compõe. De acordo com Bassanezi (2002), essas construções também são chamadas de *equações de diferenças finitas* e *fórmulas aritméticas*.

Para algumas relações de recorrência é possível obter uma fórmula fechada. Essa fórmula permite calcular o enésimo termo da sequência descrita pela relação de recorrência, sem a necessidade de realizar os cálculos recursivos auxiliares. Por outro lado, de acordo com Bassanezi (2002), quando se trata de uma equação de diferenças não-linear, geralmente não é possível obter tal solução diretamente, sendo necessário analisá-la através de seus *pontos de equilíbrio*. De acordo com Elaydi (2005), um ponto x^* no domínio de uma função f é dito ser um ponto de equilíbrio se é um ponto fixo de f, isto é, $f(x^*) = x^*$. Em outras palavras, este ponto indica onde a função permanece constante, não havendo variação de um termo t para um termo $t + 1$ da sequência que ela gera. Neste trabalho foram estudadas as relações de recorrências lineares de primeira e de segunda ordem.

3 | RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

De acordo com Elaydi (2005), uma recorrência linear de primeira ordem define uma sequência por meio de uma função do primeiro grau. Cada um de seus termos, com exceção do primeiro, são dependentes do termo imediatamente anterior. Matematicamente, considerando $a, b \in \mathbb{R}$, e $C \in \mathbb{R}$ uma constante previamente definida,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) = ax_{n-1} + b, & \text{se } n \geq 1, \\ x_0 = C, & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Uma fórmula fechada pode ser encontrada para relações de recorrência que podem ser descritas pelo Sistema 1. Em geral, o enésimo termo pode ser obtido pela Equação 2:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\left[\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right], & \text{se } a \neq 1 \\ x_0 + bn, & \text{se } a = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Note que se for conhecido o valor de x_0, é possível calcular qualquer termo de uma sequência definida por uma relação de recorrência do tipo descrito no Sistema 1 com apenas um cálculo direto.

4 | RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

De acordo com Pereira (2014), uma recorrência linear de segunda ordem define uma sequência por meio de uma função do segundo grau. Cada um de seus termos, com exceção dos dois primeiros, são dependentes de dois termos imediatamente anteriores. Matematicamente, considerando *a, b, c* $\in \mathbb{R}$, e C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ constantes previamente definidas,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c, & \text{se } n \geq 2 \\ x_0 = C_1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = C_2, & \text{se } n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Do Sistema 3, quando $c = 0$, a relação de recorrência pode ser escrita como:

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0 \tag{4}$$

A cada relação de recorrência da forma acima (Equação 4), pode-se associar uma equação do segundo grau, chamada *equação característica* (PEREIRA, 2014). A equação característica está representada na Equação 7 e é equivalente à Equação 6 (WEISSTEIN, 2020?), onde *I* é a matriz identidade e A é a matriz associada aos coeficientes dos termos à direita da igualdade do Sistema 5. Este sistema consiste de duas equações de primeira ordem e é uma representação equivalente de uma relação de recorrência de segunda ordem semelhante à Equação 4. Para construir o Sistema 5, faz-se uma mudança de variáveis $x_{n+1} = z_n$ (BASSANEZI, 2002).

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = bx_n + az_n \end{cases} \tag{5}$$

$$\det(A - tI) = 0 \tag{6}$$

A é uma matriz quadrada $k \times k$ e *I* é a matriz identidade $k \times k$

$$\begin{vmatrix} -t & 1 \\ b & a-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - at - b = 0 \tag{7}$$

A partir das raízes dessa equação característica e do princípio da superposição (BASSANEZI, 2002) é possível determinar uma fórmula fechada para a relação de recorrência do Sistema 3. Se t_1 e t_2 são raízes dessa equação característica, então a Equação 8 é solução da recorrência do Sistema 3, para A1 e A2 determinados pelo Sistema 9, que admite como soluções as Equações 10 e 11 (BASSANEZI, 2002).

$$x_n = A_1 t_1^n + A_2 t_2^n \tag{8}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ t_1 A_1 + t_2 A_2 = x_1 \end{cases} \tag{9}$$

$$A_1 = x_0 - \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \tag{10}$$

$$A_2 = \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \tag{11}$$

Um exemplo clássico em que a Equação 8 se aplica é a Sequência de Fibonacci. Ela é definida pela relação de recorrência de segunda ordem abaixo.

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = x_{n-1} + x_{n-2}, & \text{se } n \geq 2, \\ x_0 = 1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = 1, & \text{se } n = 1 \end{cases} \tag{12}$$

Pelas Equações 8, 10 e 11, o enésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado pela fórmula fechada abaixo:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \tag{13}$$

Note que a partir da Equação 13, fica fácil calcular o 50º termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de se calcular os termos anteriores, isto é (note que o 50º termo corresponde a n =49 , pois o primeiro termo da sequência corresponde a n =0, o segundo corresponde a n =1, e assim por diante):

$$x_{49} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{50} = 12586269025 \tag{14}$$

5 I DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO

A tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) é uma das espécies de peixes mais populares em muitos países tropicais (YI, 1998). O cultivo desta espécie está presente em todos os estados brasileiros para fins comerciais (JÚNIOR et al., 2014).

De acordo com Bassanezi (2002), as tilápias apresentam três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. São considerados adultos aqueles que têm a capacidade de se reproduzirem, o que ocorre aproximadamente aos 4 meses de idade. Em condições naturais, quando a temperatura da água permanece acima de 20ºC, a desova pode ocorrer a cada 2 meses. A eclosão dos ovos ocorre em aproximadamente 72 horas após a fecundação por algum macho e pode gerar de 100 a 600 alevinos a depender do tamanho da fêmea. A taxa de mortalidade dos recém-nascidos é igual a 50%. Recomenda-se que, no processo de criação dessa espécie, exista um macho para cada duas fêmeas.

t (2 meses)	P_t	A_t	y_t
0	P_0	0	P_0
1	P_0	αP_0	$P_0 + \alpha P_0$
2	$P_0 + \alpha P_0$	αP_0	$P_0 + 2\alpha P_0$
3	$P_0 + 2\alpha P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$
4	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 4\alpha P_0 + 3\alpha^2 P_0$
...	...	...	...
t	$P_{t-1} + A_{t-1}$	αP_{t-1}	$P_{t-1} + A_{t-1} + \alpha P_{t-1}$

Tabela 1: Dinâmica populacional das tilápias-do-nilo jovens e adultas.

Fonte: Retirada de Bassanezi (2002, p. 100).

De modo a simplificar o modelo, considere A_t, P_t e y_t o número de alevinos, o número de tilápias adultas e o número total de tilápias num estágio t, respectivamente. O estágio t corresponde ao tempo de desova, ou seja, 2 meses. Como as tilápias fêmeas adultas estão sendo consideradas na contabilização de P_t, a quantidade de alevinos no estágio t +1 pode ser calculada como uma proporção do número de adultos do estágio anterior, isto é, $A_t = \alpha P_{t-1}$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Considerou-se também que os peixes estão inseridos em um ambiente controlado, isto é, sem a presença de predadores e em condições ideais.

Observando o comportamento da população das tilápias-do-nilo na Tabela 1, é possível construir uma fórmula de recorrência de segunda ordem para determinar a quantidade de adultos em um determinado período t:

$$P_t = P_{t-1} + A_{t-1} \Rightarrow P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \quad \text{para} \quad t \geq 2 \qquad (15)$$

A Equação 15 diz que a população de tilápias adultas no estágio t corresponde às tilápias adultas do estágio anterior mais os alevinos do estágio anterior que se tornaram adultos. Note que $A_{t-1} = \alpha P_{t-2}$ corresponde ao número de alevinos amadurecidos no estágio t. Ainda, pela Tabela 1, observa-se que a quantidade de peixes adultos pode ser calculada a partir da última coluna da tabela correspondente ao número total de peixes em cada estágio, isto é,

$$P_{t+1} = y_t \quad (16)$$

$$y_t = y_{t-1} + \alpha y_{t-2} \quad \text{para} \quad t \geq 2 \quad (17)$$

Pela Equação 17 é possível obter o número total de tilápias em um determinado tempo t. Além disso, pela Equação 16, obtém-se o número de tilápias adultas no estágio t + 1. É importante notar que a Equação 17 só é possível de ser calculada se forem conhecidos seus valores em dois estágios imediatamente anteriores.

As Equações 15 e 17 são denominadas fórmulas recursivas (ou equações de diferenças finitas) de segunda ordem (BASSANEZI, 2002). Uma fórmula recursiva de segunda ordem pode ser reduzida a uma fórmula fechada para o cálculo do t-ésimo termo da sequência que ela descreve, conforme apresentada na Seção 4. A fórmula fechada é importante quando se deseja saber a população em um determinado estágio t, sendo necessário que apenas um cálculo seja feito. Neste modelo, determinar o número de peixes em um determinado tempo t pode ter aplicações comerciais, promover estudos científicos ou para controle de um determinado ecossistema, por exemplo. Desta forma, para este modelo o número de peixes adultos em um estágio t pode ser calculado diretamente pela Equação 19, obtida pela resolução do Sistema 18.

$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \\ P(0) = P_0 \text{ e } P(1) = P_1 = P_0 \end{cases} \quad (18)$$

$$P_t = P_0 \frac{(1+\sqrt{1+4\alpha})}{2\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^t - P_0 \frac{(1-\sqrt{1+4\alpha})}{2\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^t \quad (19)$$

Esse tipo de estudo se faz importante uma vez que o controle populacional das tilápias implica diretamente na qualidade do produto final. De acordo com Schulter e Filho (2017), a tilapicultura no Brasil, na década de 1980, passou de uma atividade voltada para o repovoamento e complemento de renda a pequenos produtores para uma atividade explorada comercialmente, com o surgimento dos empreendimentos pioneiros. Esses primeiros empreendimentos não obtiveram muito sucesso devido ao pouco conhecimento das técnicas de cultivo, a inexistência de rações adequadas e a baixa qualidade de alevinos.

> As tilápias se multiplicavam intensamente nas psiculturas, nos grandes reservatórios e em açudes particulares, resultando na produção de um grande número de peixes pequenos e sem grande valor comercial. Com isso, elas ganharam, no Brasil, a fama de peixe pequeno, cheio de espinho e com gosto de barro, que dava em qualquer lagoa (SCHULTER e FILHO, 2017, p. 15).

A Equação 19 pode ser usada para predizer o número de peixes adultos em uma determinada época do ano. Com isso, os produtores podem tomar decisões acerca da alimentação e do controle populacional das tilápias de modo a prezar pela qualidade do produto. Outros modelos, como o apresentado na próxima seção e os apresentados por Yi (1998) e Júnior et al. (2014), por incluírem mais considerações são mais complexos e representam melhor o mundo real, e podem ser mais adequados para servirem de base para tomadas de decisão.

6 | DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO COM TAXAS DE SOBREVIVÊNCIA

Uma variação do modelo anterior, considerando taxas de sobrevivência e as dinâmicas das três fases distintas: ovos, alevinos e adultos (BASSANEZI, 2002), é apresentada a seguir. Este modelo visa ter uma representação mais próxima do mundo real do que o modelo anterior.

Sejam b_n, a_n e c_n a quantidade de jovens (alevinos), a quantidade de adultos e a quantidade de ovos viáveis em cada estágio, respectivamente. As taxas γ, β e δ correspondem à taxa de sobrevivência da população de ovos, a taxa de conversão para adultos e a taxa de sobrevivência da população de adultos, respectivamente.

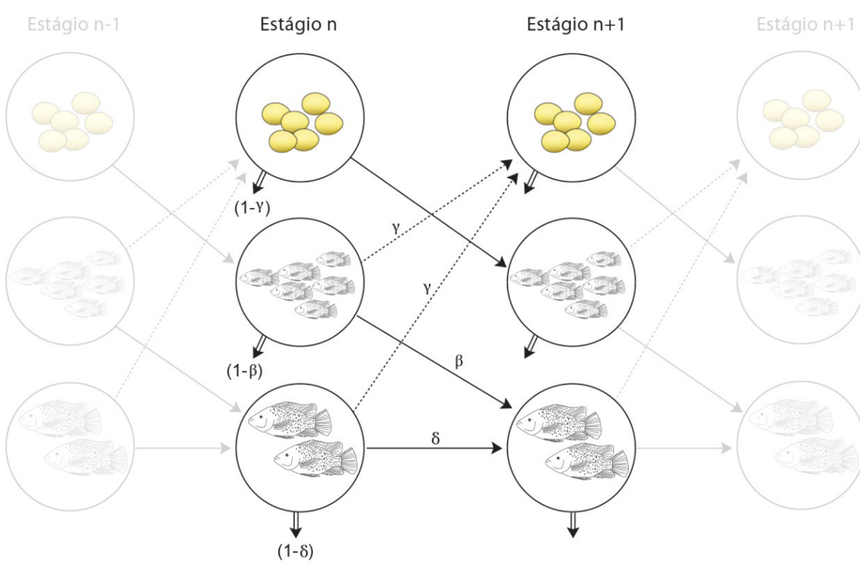

Figura 2: Fluxo de um estágio para outro referente à modelagem da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo com três fases e taxas de sobrevivência.

Fonte: Adaptada de Bassanezi (2002, p. 111).

Considerando as taxas de mortalidade, elas podem ser representadas por

$(1-\delta)$, $(1-\beta)$ e $(1-\gamma)$ e correspondem às taxas de mortalidade de adultos, mortalidade de alevinos e perda de ovos, respectivamente.

A Fig. 2 representa o fluxo de um estágio n para um estágio n+1. A partir dessa figura, o modelo pode ser representado pelo Sistema 20 abaixo:

$$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1} \end{cases} \tag{20}$$

Utilizando a Equação 6, é possível encontrar a equação característica do Sistema 20:

$$\det(\mathrm{A} - tI) = 0$$
$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} \delta - t & \beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ \gamma & \gamma\beta & -t \end{pmatrix} \right| = -t^3 + \delta t^2 + \gamma\beta t + \gamma\beta(1-\delta) = 0 \tag{21}$$

Se os valores dos parâmetros γ, δ e β são conhecidos, então o cálculo das raízes da Equação 21 pode ser feito por métodos numéricos (BASSANEZI, 2002). Com essas raízes, é possível obter uma fórmula fechada para o cálculo de α_n, por exemplo. O método para a obtenção desta fórmula pode ser encontrado em Jensen (2011, p. 28-31). Em suma, utiliza-se o princípio da superposição com algumas considerações a respeito das raízes obtidas como, por exemplo, o domínio de cada uma delas.

De acordo com Bassanezi (2002), nem sempre a solução explícita é a mais conveniente. Outros métodos como tabela de dados, gráficos e análise dos pontos de equilíbrio podem ser úteis para uma análise mais completa.

7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática é uma importante ferramenta para resolver diversos problemas do mundo real. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados a um problema do campo, mais especificamente da Aquacultura. O problema consistia em determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Ambos os modelos estudados representam o problema como um sistema de equações de diferenças finitas. O primeiro modelo faz uma divisão da população de peixes em adultos e alevinos (jovens). O segundo modelo, similar ao primeiro, considerou também a população de ovos e taxas de sobrevivência, tornando-o mais próximo de uma representação realística.

Neste trabalho também foram apresentados os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados. Foi feita também uma discussão a respeito da importância desses estudos em aplicações no mundo real. O problema da dinâmica populacional da espécie tilápia-do-nilo ilustra uma das situações que podem estar presentes em problemas do campo. Este estudo reforça que a modelagem matemática pode ser importante para a obtenção de resultados acerca desse tipo de problema. Tais resultados podem ser úteis para tomadas de decisão quanto a controles populacionais, equilíbrios de ecossistemas e previsões sobre o comportamento futuro das populações, por exemplo.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. 3. ed. Editora Contexto, 2002.

ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2005.

GIORDANO, Frank R.; FOX, William P.; HORTON, Steven B. **A First Course in Mathematical Modeling**. 5. ed. Cengage Learning, 2013.

JENSEN, Arne. **Lecture notes on difference equations**. Department of Mathematical Sciences – Aalborg University, Aalborg, Dinamarca, 2011.

JÚNIOR, José de A. de Souza et al. **Mathematical modeling applied to the growth of tilapia in net cages in the sub middle of the São Francisco river**. Eng. Agríc., Jaboticabal, v. 34, n. 5, p. 1001-1011, 2014. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-69162014000500019&lng=en&nrm=iso>. Acessado em: 14 jun. 2020.

MURRAY, James D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. v. 17. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2002.

PEREIRA, Marcus Vinícius. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

RAYMOND, Charles; HUGO, Alfred; KUNG’ARO, Monica. **Modeling Dynamics of Prey-Predator Fishery Model with Harvesting: A Bioeconomic Model**. Journal of Applied Mathematics, v. 2019, 2019.

SCHULTER, Eduardo Pickler; FILHO, José Eustáquio Ribeiro Vieira. **Evolução da piscicultura no Brasil: diagnóstico e desenvolvimento da cadeia produtiva de tilápia**. Texto para discussão / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Rio de Janeiro: Ipea, 2017.

WEISSTEIN, Eric Wolfgang. **Characteristic Equation**. *In*: MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: https://mathworld.wolfram.com/CharacteristicEquation.html. Acesso em: 17 jun. 2020.

YI, Yang. **A bioenergetics growth model for Nile tilapia (Oreochromis niloticus) based on limiting nutrients and fish standing crop in fertilized ponds**. Aquacultural Engineering, v. 18, n. 3, p. 157-173, 1998.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Área 2, 17, 26, 80, 85, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 149, 150, 164, 169, 188, 193, 195, 196, 197, 201, 204, 207, 210, 223, 228, 230, 232, 233, 234, 236, 243, 249, 252

Atividade matemática 26, 202, 204, 246

B

Boécio 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159

C

Cálculo mental 19, 20, 23, 25, 27

Computação 23, 24, 25, 26, 33, 34, 84, 157

Contextos não formais 87, 88

Cotidiano 15, 16, 17, 18, 20, 21, 76, 79, 83, 111, 161, 162, 163, 165, 166, 190, 206, 224, 230, 241, 245, 250

Criatividade 84, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 190

Currículo de matemática 200

D

De Institutione Arithmetica 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160

Dinâmica populacional 99, 101, 104, 105, 107, 109

Diretrizes curriculares 200

E

Educação matemática 14, 21, 22, 33, 110, 111, 112, 118, 123, 124, 125, 126, 139, 159, 173, 186, 187, 198, 199, 212, 223, 239, 247, 250, 252

EJA 15, 16, 17, 18, 19, 21

Ensino da matemática 75, 76, 85, 86, 90, 127, 129, 185, 187, 188, 196, 241

Ensino fundamental 2, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 32, 75, 76, 78, 79, 86, 112, 124, 129, 138, 139, 143, 151, 187, 188, 193, 197, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 208, 209, 238, 250

Ensino médio 19, 110, 112, 113, 129, 130, 136, 223, 224, 225, 226, 227, 236, 237, 238, 240, 241, 244

Espaço de Schwartz 35, 41

F

Fatoração 245, 246

Feira 15, 16, 17, 18, 19

Filosofia 152, 153, 154, 157, 159, 160, 252

Formação de professores 34, 87, 88, 89, 90, 161, 164, 165, 173, 211, 212, 224, 233, 234, 250, 252

Formulação de problemas 87, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 191

Frações 1, 3, 9, 10, 11, 12, 13

Função afim 240

Função quadrática 240

Funciones en variable compleja 50, 51, 54

G

GeoGebra 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 137, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 148, 151

Geometria 2, 6, 94, 96, 126, 128, 129, 130, 131, 135, 136, 139, 155, 156, 159, 185, 200, 201, 203, 206, 208, 209, 234, 237

H

História da matemática 126, 127, 130, 136, 137, 152, 154, 156, 158, 159, 160, 173, 174, 180, 184, 186, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223

História no ensino de matemática 210

Homotetia 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151

I

Interdisciplinaridade 219, 224, 227, 230, 239

J

Jogo digital 1, 3, 9, 13, 14

Jogos matemáticos 240, 244

L

Liber Quadratorum 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Linguagem algébrica 1, 3, 184

Ludicidade 244, 246, 252

M

Matemática 1, 2, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 39, 48, 50, 52, 61, 62, 65, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 135, 136, 137, 138, 139, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252

Matemática atuarial 62, 72

Modelagem matemática 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 232, 233, 234, 238

Modelagem matemática crítica 110, 112, 113, 123

P

Pensamento computacional 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34

Pensões 62, 63, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74

Perímetro 131, 132, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 234

Pesca artesanal 110, 111, 112, 114, 117, 119, 120, 121, 122, 123

PIBID 240, 241, 245, 246, 252

Portugal 62, 63, 64, 65, 73, 74, 87

Praxeologia 173, 174, 181, 184, 186

Proporção 20, 105, 110, 112, 122, 123, 177, 182, 183, 233, 234, 237

Proporcionalidade 112, 138, 139, 140, 149, 150, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 207

R

Realidade 21, 65, 66, 67, 78, 89, 92, 110, 111, 112, 113, 117, 124, 163, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 198, 206, 212, 226, 230, 232, 238, 246

Recorrência linear 99, 102

Regra de Três 19, 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Resolução de problemas 23, 24, 26, 34, 37, 87, 89, 90, 91, 92, 112, 113, 129, 183, 191, 204, 207, 225, 237, 242, 244

S

Scratch 1, 2, 3, 4, 34

Segurança social 62, 63, 65, 72, 73, 74

Softwares de ensino 75, 77

T

Tecnologias 2, 3, 13, 26, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 127, 129, 136, 138, 139, 150, 161, 166, 201, 203, 252

Teorema de Carnot 126, 129, 130, 132

Territórios virtuais 161, 162, 163

Tilápia-do-nilo 99, 104, 107, 108, 109

Transformada de Fourier 35

Trilhos matemáticos 87, 88, 89, 91, 92, 94, 97

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020