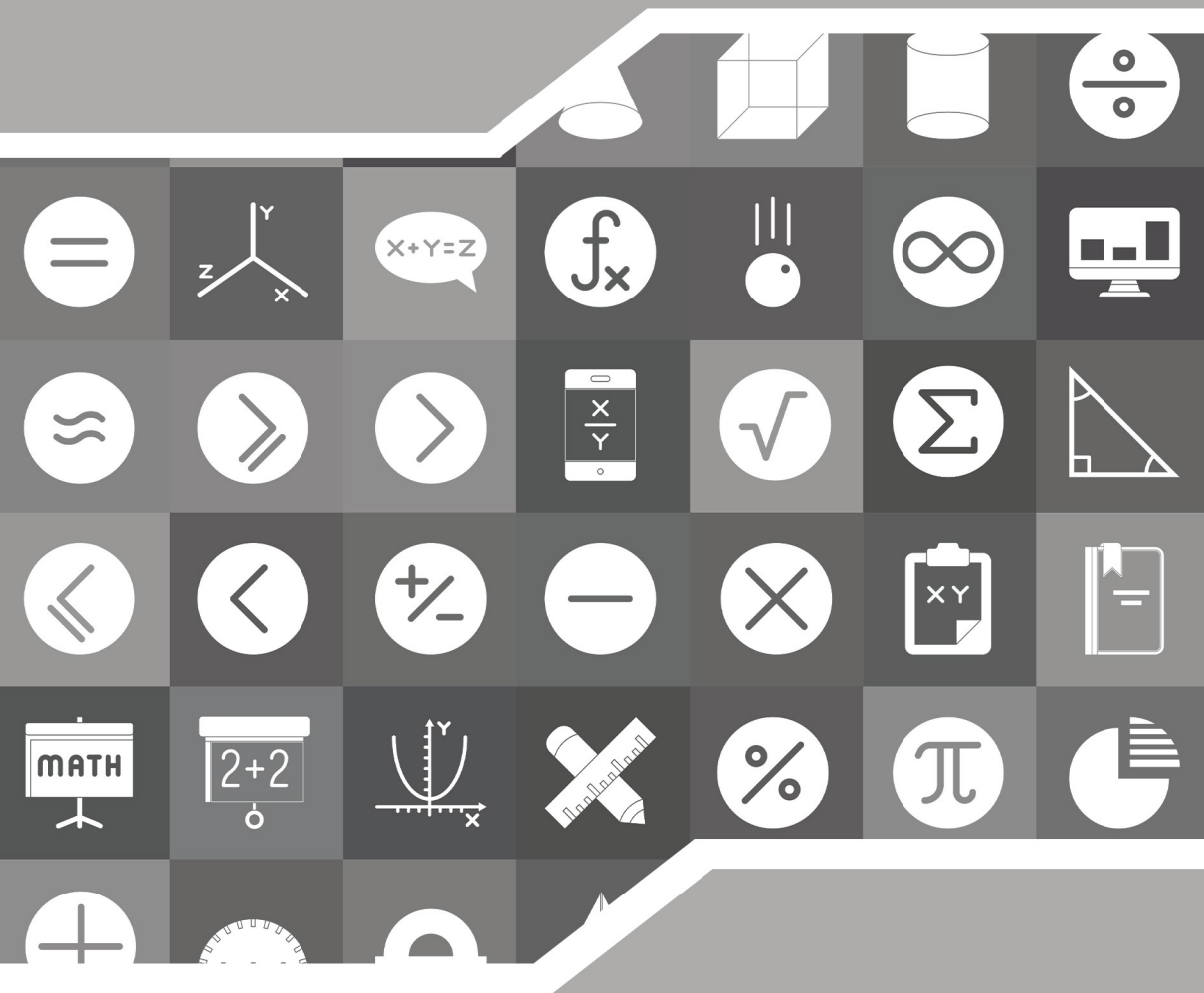


# Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Lucas Vieira  
(Organizadores)

# Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Lucas Vieira  
(Organizadores)

**Editora Chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Assistentes Editoriais**

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

**Bibliotecário**

Maurício Amormino Júnior

**Projeto Gráfico e Diagramação**

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremona

Karine de Lima Wisniewski

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

**Imagens da Capa**

Shutterstock

**Edição de Arte**

Luiza Alves Batista

**Revisão**

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

**Conselho Editorial**

**Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>ª</sup> Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Linguística, Letras e Artes**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza  
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior  
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará  
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco  
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba  
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão  
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana  
Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista



## Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecário** Maurício Amormino Júnior  
**Diagramação:** Camila Alves de Cremo  
**Edição de Arte:** Luiza Alves Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizadores:** Américo Junior Nunes da Silva  
André Ricardo Lucas Vieira

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-362-0

DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro **“Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas”**, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
JOGOS DIGITAIS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	
Valdinei Cezar Cardoso	
Ana Paula Santos Pereira	
Arina de Jesus Rozario	
Camila Muniz de Oliveira	
Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008091</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>15</b>
OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NO COTIDIANO DA FEIRA LIVRE: UMA INVESTIGAÇÃO FEITA PELOS ALUNOS DA EJA	
Tacio Vitaliano da Silva	
Francisca Vandilma Costa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008092</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>23</b>
O PENSAMENTO COMPUTACIONAL COMO ESTRATÉGIA DE REFORÇO DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO MENTAL	
Julio Cezar Romero	
Juliano Schimiguel	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008093</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>35</b>
UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER	
Marcel Lucas Picanço Nascimento	
Vinícius Lemos dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008094</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>50</b>
EL USO DE GEOGEBRA PARA VISUALIZAR FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES	
Cesar Martínez Hernández	
Rodolfo Rangel Alcántar	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008095</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>62</b>
A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE	
Onofre Alves Simões	
<b>DOI 10.22533/at.ed.6202008096</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>75</b>
O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA	
Jonathan Bregochi Delmondes	

Roseni Aparecida Pereira de Macedo

**DOI 10.22533/at.ed.6202008097**

**CAPÍTULO 8..... 87**

**OS TRILHOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES**

Isabel Vale

Ana Barbosa

**DOI 10.22533/at.ed.6202008098**

**CAPÍTULO 9..... 99**

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO**

Daniel Freitas Martins

Mehran Sabeti

Nicolly Ramalho Silva

**DOI 10.22533/at.ed.6202008099**

**CAPÍTULO 10.....110**

**A DIVISÃO EM PARTES UTILIZADA NA PESCA ARTESANAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EMBASADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCÍTICA**

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

**DOI 10.22533/at.ed.62020080910**

**CAPÍTULO 11 ..... 126**

**TEOREMA DE CARNOT: UMA VALIDAÇÃO COM GEOMETRIA DINÂMICA**

Giancarlo Secci de Souza Pereira

Cristiane Ruiz Gomes

Antônio Carlos Ferreira

Paulo Vilhena da Silva

**DOI 10.22533/at.ed.62020080911**

**CAPÍTULO 12..... 138**

**OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERÍMETRO, ÁREA E PROPORCIONALIDADE DE POLÍGONOS VIA HOMOTETIA**

Saul Rodrigo da Costa Barreto

Marcelo Baía da Silva

Fábio José da Costa Alves

Deusarino Oliveira Almeida Júnior

**DOI 10.22533/at.ed.62020080912**

**CAPÍTULO 13..... 152**

**UMA ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE BOÉCIO E DA OBRA *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* PARA A MATEMÁTICA**

Francisco Aureliano Vidal

Márcio Alisson Leandro Costa

**DOI 10.22533/at.ed.62020080913**

<b>CAPÍTULO 14.....</b>	<b>161</b>
UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)	
Débora Gaspar Soares Márcio Rufino Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080914</b>	
<b>CAPÍTULO 15.....</b>	<b>173</b>
A REGRAS DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO <i>LIBER QUADRATORUM</i>	
Denivaldo Pantoja da Silva José dos Santos Guimarães Filho João Cláudio Brandemberg	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080915</b>	
<b>CAPÍTULO 16.....</b>	<b>187</b>
AS CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA SALA DE AULA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Thaís Cristina Barros Machado	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080916</b>	
<b>CAPÍTULO 17.....</b>	<b>200</b>
O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BRASILEIRAS	
Miriam Ferrazza Heck Carmen Teresa Kaiber	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080917</b>	
<b>CAPÍTULO 18.....</b>	<b>210</b>
HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: RESULTADOS DO USO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO NA GRADUAÇÃO	
Jessie Heveny Saraiva Lima Miguel Chaquiam	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080918</b>	
<b>CAPÍTULO 19.....</b>	<b>224</b>
A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR	
Keith Gabriella Flenik Moraes Angelita Minetto Araújo Tiago Skroch de Almeida	
<b>DOI 10.22533/at.ed.62020080919</b>	
<b>CAPÍTULO 20.....</b>	<b>240</b>
O USO DE JOGOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS	
Ana Lorena Miranda Gomes	

Éllen Beatriz Araújo da Silva  
Francisco das Chagas Ferreira Carvalho  
Maria Iêda Rodrigues de Oliveira Silva  
Wanderson de Oliveira Lima

**DOI 10.22533/at.ed.62020080920**

**CAPÍTULO 21 ..... 245**

**ENSINO DE FATORAÇÃO: ALUNO APRENDENDO A FAZER MATEMÁTICA**

Daniellen Costa Protazio  
Cinara Damacena Cardoso  
Aline Lorinho Rodrigues  
Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante  
Ashiley Sarmiento da Silva  
Yara Julyana Rufino dos Santos Silva  
Camila Americo Neri  
Izabel Cristina Gemaque Pinheiro  
Odivânia Ferreira de Moraes  
Izaías Silva Rodrigues  
Priscila da Silva Santos  
Cristiane Matos Oliveira

**DOI 10.22533/at.ed.62020080921**

**SOBRE OS ORGANIZADORES ..... 252**

**ÍNDICE REMISSIVO ..... 253**

# CAPÍTULO 9

## MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 25/06/2020

### Daniel Freitas Martins

Universidade Federal de Viçosa – *Campus*  
Florestal  
Florestal – Minas Gerais  
<http://lattes.cnpq.br/3855503742201306>

### Mehran Sabeti

Universidade Federal de Viçosa – *Campus*  
Florestal  
Florestal – Minas Gerais  
<http://lattes.cnpq.br/1192944329873105>

### Nicolly Ramalho Silva

Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte – Minas Gerais  
<http://lattes.cnpq.br/9838476446868418>

**RESUMO:** Muitos problemas do mundo real podem ser representados por modelos matemáticos. A modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados ao problema de determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nylo (*Oreochromis niloticus*) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Os modelos aplicam técnicas de equações de diferenças finitas,

também chamadas de recorrências lineares, para descreverem o problema matematicamente. Este problema está presente no campo, mais especificamente na Aquacultura, e seu estudo é importante pois permite explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Este trabalho também apresenta os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados e faz uma discussão a respeito da importância desses temas em aplicações no mundo real.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem matemática, recorrência linear, equação de diferenças, dinâmica populacional, tilápia-do-nylo.

### MATHEMATICAL MODELING IN THE FIELD

**ABSTRACT:** Many real-world problems can be represented by mathematical models. Mathematical modeling consists of the ability to take a defined problem in some relatively complex practical situation, transform it into a mathematical model and look for a solution that can be reinterpreted in terms of the original situation. In this work, two mathematical models were revised on the problem of determining the number of fish of the species Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) at a given time stage considering a controlled environment. The models apply finite difference equation techniques, also called linear recurrences, to describe the problem mathematically. This problem is present in the field, more specifically in Aquaculture, and its study is important because it allows to explore



abstract concepts, to improve the production of fish for consumption, to reduce expenses in the culture of fish of this species, etc. This work also presents the main concepts involved in the studies addressed and discusses the importance of these topics in real-world applications.

**KEYWORDS:** Mathematical modeling, linear recurrence, difference equation, population dynamics, Nile tilapia.

## 1 | INTRODUÇÃO

Muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos, sendo que as mesmas foram desenvolvidas a partir da necessidade de se obter uma solução a partir de um modelo matemático, que nada mais é do que a interpretação do problema real para a linguagem matemática. De acordo com Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. De acordo com Giordano et al. (2013), um modelo matemático permite que conclusões matemáticas sejam obtidas a respeito de um sistema ou comportamento do mundo real. Essas conclusões podem servir de base para que sejam feitas tomadas de decisão que tenham um impacto positivo no futuro. Veja na Fig. 1 um fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

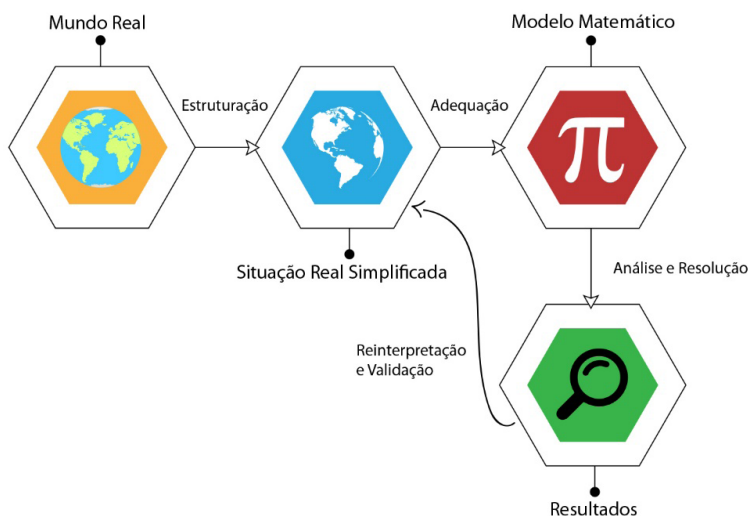


Figura 1: Fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

Fonte: Elaborada pelos autores (2020).

Muitos estudos possuem o foco na cultura de peixes em reservas controladas. Em particular, estudos relacionados à cultura de tilápias-do-nylo (*Oreochromis niloticus*) possuem finalidades diversas, como explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Júnior et al. (2014) apresenta um estudo envolvendo a aplicação de modelos matemáticos ao crescimento de tilápias-do-nylo criadas em tanques-rede no Submédio do São Francisco, de modo a determinar quais deles melhor representam as condições de criação para a região. Yi (1998) apresenta um modelo de crescimento bioenergético para as tilápias-do-nylo em tanques fertilizados, envolvendo seis variáveis-chave que afetam o crescimento dessa espécie nesse tipo de ambiente. Giordano et al. (2013) apresenta um modelo matemático para prever o peso de um determinado peixe da espécie robalo (*bass*) tendo como informações a densidade média de peso de peixes desta espécie e o tamanho do peixe considerado. Bassanezi (2002) apresenta dois estudos acerca da dinâmica populacional das tilápias-do-nylo. Em um deles, é estabelecida uma maneira de determinar o número de peixes após um determinado período, considerando dois estágios: alevinos (jovens) e adultos. No outro, taxas de sobrevivência são incluídas no modelo e três estágios distintos são considerados: ovos, alevinos e adultos.

Outros modelos mais complexos podem ser elaborados considerando-se a presença de outros ambientes. Tais ambientes podem, por exemplo, ter a população dividida em predadores e presas (MURRAY, 2002). Em Raymond et al. (2019), um modelo predador-presa é apresentado envolvendo três espécies de peixes: perca-do-nylo, ciclídeos e tilápias. A perca-do-nylo foi considerada a espécie predadora, e as demais foram consideradas as presas do sistema.

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica a respeito de estudos matemáticos relacionados à dinâmica populacional de peixes tilápias-do-nylo apresentados em Bassanezi (2002). O trabalho está assim organizado: a Seção 2 apresenta uma introdução ao conceito de recorrências; as Seções 3 e 4 descrevem as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, respectivamente; as Seções 5 e 6 apresentam os modelos matemáticos referentes ao estudo da dinâmica populacional das tilápias-do-nylo, sendo que nesta última há a inclusão de taxas de sobrevivência; a Seção 7 apresenta as considerações finais deste trabalho.

## 2 | RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Algumas sequências podem ser definidas por regras que permitem calcular qualquer termo em função dos anteriores, usualmente do antecessor imediato ou de uma quantidade pequena de antecessores imediatos. Esse tipo de construção é dita ser uma construção por recorrência e, para que a sequência possa ser gerada,

é necessário o fornecimento do(s) primeiro(s) termo(s) que a compõe. De acordo com Bassanezi (2002), essas construções também são chamadas de *equações de diferenças finitas e fórmulas aritméticas*.

Para algumas relações de recorrência é possível obter uma fórmula fechada. Essa fórmula permite calcular o  $n$ ésimo termo da sequência descrita pela relação de recorrência, sem a necessidade de realizar os cálculos recursivos auxiliares. Por outro lado, de acordo com Bassanezi (2002), quando se trata de uma equação de diferenças não-linear, geralmente não é possível obter tal solução diretamente, sendo necessário analisá-la através de seus *pontos de equilíbrio*. De acordo com Elaydi (2005), um ponto  $x^*$  no domínio de uma função  $f$  é dito ser um ponto de equilíbrio se é um ponto fixo de  $f$ , isto é,  $f(x^*) = x^*$ . Em outras palavras, este ponto indica onde a função permanece constante, não havendo variação de um termo  $t$  para um termo  $t + 1$  da sequência que ela gera. Neste trabalho foram estudadas as relações de recorrências lineares de primeira e de segunda ordem.

### 3 I RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

De acordo com Elaydi (2005), uma recorrência linear de primeira ordem define uma sequência por meio de uma função do primeiro grau. Cada um de seus termos, com exceção do primeiro, são dependentes do termo imediatamente anterior. Matematicamente, considerando  $a, b \in \mathbb{R}$ , e  $C \in \mathbb{R}$  uma constante previamente definida,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) = ax_{n-1} + b, & \text{se } n \geq 1, \\ x_0 = C, & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Uma fórmula fechada pode ser encontrada para relações de recorrência que podem ser descritas pelo Sistema 1. Em geral, o  $n$ ésimo termo pode ser obtido pela Equação 2:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b \left[ \frac{a^n - 1}{a - 1} \right], & \text{se } a \neq 1 \\ x_0 + bn, & \text{se } a = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Note que se for conhecido o valor de  $x_0$ , é possível calcular qualquer termo de uma sequência definida por uma relação de recorrência do tipo descrito no Sistema 1 com apenas um cálculo direto.

### 4 I RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

De acordo com Pereira (2014), uma recorrência linear de segunda ordem define uma sequência por meio de uma função do segundo grau. Cada um de

seus termos, com exceção dos dois primeiros, são dependentes de dois termos imediatamente anteriores. Matematicamente, considerando  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , e  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constantes previamente definidas,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c, & \text{se } n \geq 2 \\ x_0 = C_1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = C_2, & \text{se } n = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Do Sistema 3, quando  $c = 0$ , a relação de recorrência pode ser escrita como:

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0 \quad (4)$$

A cada relação de recorrência da forma acima (Equação 4), pode-se associar uma equação do segundo grau, chamada *equação característica* (PEREIRA, 2014). A equação característica está representada na Equação 7 e é equivalente à Equação 6 (WEISSTEIN, 2020?), onde  $I$  é a matriz identidade e  $A$  é a matriz associada aos coeficientes dos termos à direita da igualdade do Sistema 5. Este sistema consiste de duas equações de primeira ordem e é uma representação equivalente de uma relação de recorrência de segunda ordem semelhante à Equação 4. Para construir o Sistema 5, faz-se uma mudança de variáveis  $x_{n+1} = z_n$  (BASSANEZI, 2002).

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = bx_n + az_n \end{cases} \quad (5)$$

$$\det(A - tI) = 0 \quad (6)$$

$A$  é uma matriz quadrada  $k \times k$  e  $I$  é a matriz identidade  $k \times k$

$$\begin{vmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - at - b = 0 \quad (7)$$

A partir das raízes dessa equação característica e do princípio da superposição (BASSANEZI, 2002) é possível determinar uma fórmula fechada para a relação de recorrência do Sistema 3. Se  $t_1$  e  $t_2$  são raízes dessa equação característica, então a Equação 8 é solução da recorrência do Sistema 3, para  $A_1$  e  $A_2$  determinados pelo Sistema 9, que admite como soluções as Equações 10 e 11 (BASSANEZI, 2002).

$$x_n = A_1 t_1^n + A_2 t_2^n \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ t_1 A_1 + t_2 A_2 = x_1 \end{cases} \quad (9)$$

$$A_1 = x_0 - \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \quad (11)$$

Um exemplo clássico em que a Equação 8 se aplica é a Sequência de Fibonacci. Ela é definida pela relação de recorrência de segunda ordem abaixo.

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = x_{n-1} + x_{n-2}, & \text{se } n \geq 2, \\ x_0 = 1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = 1, & \text{se } n = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Pelas Equações 8, 10 e 11, o enésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado pela fórmula fechada abaixo:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \quad (13)$$

Note que a partir da Equação 13, fica fácil calcular o 50º termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de se calcular os termos anteriores, isto é (note que o 50º termo corresponde a  $n=49$ , pois o primeiro termo da sequência corresponde a  $n=0$ , o segundo corresponde a  $n=1$ , e assim por diante):

$$x_{49} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{50} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{50} = 12586269025 \quad (14)$$

## 5 | DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO

A tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) é uma das espécies de peixes mais populares em muitos países tropicais (YI, 1998). O cultivo desta espécie está presente em todos os estados brasileiros para fins comerciais (JÚNIOR et al., 2014).

De acordo com Bassanezi (2002), as tilápias apresentam três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. São considerados adultos aqueles que têm a capacidade de se reproduzirem, o que ocorre aproximadamente aos 4 meses de idade. Em condições naturais, quando a temperatura da água permanece acima de 20°C, a desova pode ocorrer a cada 2 meses. A eclosão dos ovos ocorre em

aproximadamente 72 horas após a fecundação por algum macho e pode gerar de 100 a 600 alevinos a depender do tamanho da fêmea. A taxa de mortalidade dos recém-nascidos é igual a 50%. Recomenda-se que, no processo de criação dessa espécie, exista um macho para cada duas fêmeas.

$t$ (2 meses)	$P_t$	$A_t$	$Y_t$
0	$P_0$	0	$P_0$
1	$P_0$	$\alpha P_0$	$P_0 + \alpha P_0$
2	$P_0 + \alpha P_0$	$\alpha P_0$	$P_0 + 2\alpha P_0$
3	$P_0 + 2\alpha P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$
4	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 4\alpha P_0 + 3\alpha^2 P_0$
...	...	...	...
$t$	$P_{t-1} + A_{t-1}$	$\alpha P_{t-1}$	$P_{t-1} + A_{t-1} + \alpha P_{t-1}$

Tabela 1: Dinâmica populacional das tilápias-do-nylo jovens e adultas.

Fonte: Retirada de Bassanezi (2002, p. 100).

De modo a simplificar o modelo, considere  $A_t$ ,  $P_t$  e  $y_t$  o número de alevinos, o número de tilápias adultas e o número total de tilápias num estágio  $t$ , respectivamente. O estágio  $t$  corresponde ao tempo de desova, ou seja, 2 meses. Como as tilápias fêmeas adultas estão sendo consideradas na contabilização de  $P_t$ , a quantidade de alevinos no estágio  $t + 1$  pode ser calculada como uma proporção do número de adultos do estágio anterior, isto é,  $A_t = \alpha P_{t-1}$ , para algum  $\alpha \in (0,1)$ . Considerou-se também que os peixes estão inseridos em um ambiente controlado, isto é, sem a presença de predadores e em condições ideais.

Observando o comportamento da população das tilápias-do-nylo na Tabela 1, é possível construir uma fórmula de recorrência de segunda ordem para determinar a quantidade de adultos em um determinado período  $t$ :

$$P_t = P_{t-1} + A_{t-1} \Rightarrow P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \quad \text{para } t \geq 2 \quad (15)$$

A Equação 15 diz que a população de tilápias adultas no estágio  $t$  corresponde às tilápias adultas do estágio anterior mais os alevinos do estágio anterior que se tornaram adultos. Note que  $A_{t-1} = \alpha P_{t-2}$  corresponde ao número de alevinos amadurecidos no estágio  $t$ . Ainda, pela Tabela 1, observa-se que a quantidade de peixes adultos pode ser calculada a partir da última coluna da tabela correspondente ao número total de peixes em cada estágio, isto é,

$$P_{t+1} = y_t \quad (16)$$

$$y_t = y_{t-1} + \alpha y_{t-2} \quad \text{para } t \geq 2 \quad (17)$$

Pela Equação 17 é possível obter o número total de tilápias em um determinado tempo  $t$ . Além disso, pela Equação 16, obtém-se o número de tilápias adultas no estágio  $t + 1$ . É importante notar que a Equação 17 só é possível de ser calculada se forem conhecidos seus valores em dois estágios imediatamente anteriores.

As Equações 15 e 17 são denominadas fórmulas recursivas (ou equações de diferenças finitas) de segunda ordem (BASSANEZI, 2002). Uma fórmula recursiva de segunda ordem pode ser reduzida a uma fórmula fechada para o cálculo do  $t$ -ésimo termo da sequência que ela descreve, conforme apresentada na Seção 4. A fórmula fechada é importante quando se deseja saber a população em um determinado estágio  $t$ , sendo necessário que apenas um cálculo seja feito. Neste modelo, determinar o número de peixes em um determinado tempo  $t$  pode ter aplicações comerciais, promover estudos científicos ou para controle de um determinado ecossistema, por exemplo. Desta forma, para este modelo o número de peixes adultos em um estágio  $t$  pode ser calculado diretamente pela Equação 19, obtida pela resolução do Sistema 18.

$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \\ P(0) = P_0 \text{ e } P(1) = P_1 = P_0 \end{cases} \quad (18)$$

$$P_t = P_0 \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^t - P_0 \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^t \quad (19)$$

Esse tipo de estudo se faz importante uma vez que o controle populacional das tilápias implica diretamente na qualidade do produto final. De acordo com Schulter e Filho (2017), a tilapicultura no Brasil, na década de 1980, passou de uma atividade voltada para o repovoamento e complemento de renda a pequenos produtores para uma atividade explorada comercialmente, com o surgimento dos empreendimentos pioneiros. Esses primeiros empreendimentos não obtiveram muito sucesso devido ao pouco conhecimento das técnicas de cultivo, a inexistência de rações adequadas e a baixa qualidade de alevinos.

As tilápias se multiplicavam intensamente nas pisciculturas, nos grandes reservatórios e em açudes particulares, resultando na produção de um grande número de peixes pequenos e sem grande valor comercial. Com isso, elas ganharam, no Brasil, a fama de peixe pequeno, cheio de espinho e com gosto de barro, que dava em qualquer lagoa (SCHULTER e FILHO, 2017, p. 15).

A Equação 19 pode ser usada para prever o número de peixes adultos em

uma determinada época do ano. Com isso, os produtores podem tomar decisões acerca da alimentação e do controle populacional das tilápias de modo a prezar pela qualidade do produto. Outros modelos, como o apresentado na próxima seção e os apresentados por Yi (1998) e Júnior et al. (2014), por incluírem mais considerações são mais complexos e representam melhor o mundo real, e podem ser mais adequados para servirem de base para tomadas de decisão.

## 6 I DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO COM TAXAS DE SOBREVIVÊNCIA

Uma variação do modelo anterior, considerando taxas de sobrevivência e as dinâmicas das três fases distintas: ovos, alevinos e adultos (BASSANEZI, 2002), é apresentada a seguir. Este modelo visa ter uma representação mais próxima do mundo real do que o modelo anterior.

Sejam  $b_n$ ,  $a_n$  e  $c_n$  a quantidade de jovens (alevinos), a quantidade de adultos e a quantidade de ovos viáveis em cada estágio, respectivamente. As taxas  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\delta$  correspondem à taxa de sobrevivência da população de ovos, a taxa de conversão para adultos e a taxa de sobrevivência da população de adultos, respectivamente.

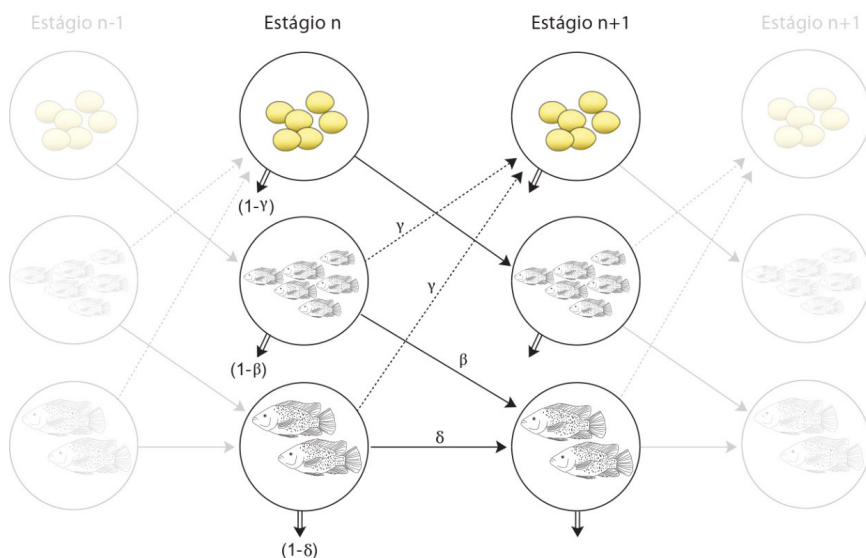


Figura 2: Fluxo de um estágio para outro referente à modelagem da dinâmica populacional das tilápias-do-nylo com três fases e taxas de sobrevivência.

Fonte: Adaptada de Bassanezi (2002, p. 111).

Considerando as taxas de mortalidade, elas podem ser representadas por



$(1 - \delta)$ ,  $(1 - \beta)$  e  $(1 - \gamma)$  e correspondem às taxas de mortalidade de adultos, mortalidade de alevinos e perda de ovos, respectivamente.

A Fig. 2 representa o fluxo de um estágio  $n$  para um estágio  $n+1$ . A partir dessa figura, o modelo pode ser representado pelo Sistema 20 abaixo:

$$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma \beta b_{n-1} \end{cases} \quad (20)$$

Utilizando a Equação 6, é possível encontrar a equação característica do Sistema 20:

$$\det(A - tI) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \delta - t & \beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ \gamma & \gamma\beta & -t \end{vmatrix} = -t^3 + \delta t^2 + \gamma\beta t + \gamma\beta(1 - \delta) = 0 \quad (21)$$

Se os valores dos parâmetros  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\beta$  são conhecidos, então o cálculo das raízes da Equação 21 pode ser feito por métodos numéricos (BASSANEZI, 2002). Com essas raízes, é possível obter uma fórmula fechada para o cálculo de  $a_n$ , por exemplo. O método para a obtenção desta fórmula pode ser encontrado em Jensen (2011, p. 28-31). Em suma, utiliza-se o princípio da superposição com algumas considerações a respeito das raízes obtidas como, por exemplo, o domínio de cada uma delas.

De acordo com Bassanezi (2002), nem sempre a solução explícita é a mais conveniente. Outros métodos como tabela de dados, gráficos e análise dos pontos de equilíbrio podem ser úteis para uma análise mais completa.

## 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática é uma importante ferramenta para resolver diversos problemas do mundo real. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados a um problema do campo, mais especificamente da Aquacultura. O problema consistia em determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Ambos os modelos estudados representam o problema como um sistema de equações de diferenças finitas. O primeiro modelo faz uma divisão da população de peixes em adultos e alevinos (jovens). O segundo modelo, similar ao primeiro, considerou também a população de ovos e taxas de sobrevivência, tornando-o mais próximo de uma representação realística.

Neste trabalho também foram apresentados os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados. Foi feita também uma discussão a respeito da importância

desses estudos em aplicações no mundo real. O problema da dinâmica populacional da espécie tilápia-do-nilo ilustra uma das situações que podem estar presentes em problemas do campo. Este estudo reforça que a modelagem matemática pode ser importante para a obtenção de resultados acerca desse tipo de problema. Tais resultados podem ser úteis para tomadas de decisão quanto a controles populacionais, equilíbrios de ecossistemas e previsões sobre o comportamento futuro das populações, por exemplo.

## REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. 3. ed. Editora Contexto, 2002.

ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2005.

GIORDANO, Frank R.; FOX, William P.; HORTON, Steven B. **A First Course in Mathematical Modeling**. 5. ed. Cengage Learning, 2013.

JENSEN, Arne. **Lecture notes on difference equations**. Department of Mathematical Sciences – Aalborg University, Aalborg, Dinamarca, 2011.

JÚNIOR, José de A. de Souza et al. **Mathematical modeling applied to the growth of tilapia in net cages in the sub middle of the São Francisco river**. Eng. Agríc., Jaboticabal, v. 34, n. 5, p. 1001-1011, 2014. Disponível em <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0100-69162014000500019&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-69162014000500019&lng=en&nrm=iso)>. Acessado em: 14 jun. 2020.

MURRAY, James D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. v. 17. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2002.

PEREIRA, Marcus Vinícius. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

RAYMOND, Charles; HUGO, Alfred; KUNG'ARO, Monica. **Modeling Dynamics of Prey-Predator Fishery Model with Harvesting: A Bioeconomic Model**. Journal of Applied Mathematics, v. 2019, 2019.

SCHULTER, Eduardo Pickler; FILHO, José Eustáquio Ribeiro Vieira. **Evolução da piscicultura no Brasil: diagnóstico e desenvolvimento da cadeia produtiva de tilápia**. Texto para discussão / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Rio de Janeiro: Ipea, 2017.

WEISSTEIN, Eric Wolfgang. **Characteristic Equation**. In: MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/CharacteristicEquation.html>. Acesso em: 17 jun. 2020.

YI, Yang. **A bioenergetics growth model for Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) based on limiting nutrients and fish standing crop in fertilized ponds**. Aquacultural Engineering, v. 18, n. 3, p. 157-173, 1998.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Área 2, 17, 26, 80, 85, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 149, 150, 164, 169, 188, 193, 195, 196, 197, 201, 204, 207, 210, 223, 228, 230, 232, 233, 234, 236, 243, 249, 252

Atividade matemática 26, 202, 204, 246

### B

Boécio 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159

### C

Cálculo mental 19, 20, 23, 25, 27

Computação 23, 24, 25, 26, 33, 34, 84, 157

Contextos não formais 87, 88

Cotidiano 15, 16, 17, 18, 20, 21, 76, 79, 83, 111, 161, 162, 163, 165, 166, 190, 206, 224, 230, 241, 245, 250

Criatividade 84, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 190

Currículo de matemática 200

### D

De Institutione Arithmetica 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160

Dinâmica populacional 99, 101, 104, 105, 107, 109

Diretrizes curriculares 200

### E

Educação matemática 14, 21, 22, 33, 110, 111, 112, 118, 123, 124, 125, 126, 139, 159, 173, 186, 187, 198, 199, 212, 223, 239, 247, 250, 252

EJA 15, 16, 17, 18, 19, 21

Ensino da matemática 75, 76, 85, 86, 90, 127, 129, 185, 187, 188, 196, 241

Ensino fundamental 2, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 32, 75, 76, 78, 79, 86, 112, 124, 129, 138, 139, 143, 151, 187, 188, 193, 197, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 208, 209, 238, 250

Ensino médio 19, 110, 112, 113, 129, 130, 136, 223, 224, 225, 226, 227, 236, 237, 238, 240, 241, 244

Espaço de Schwartz 35, 41

### F

Fatoração 245, 246

Feira 15, 16, 17, 18, 19

Filosofia 152, 153, 154, 157, 159, 160, 252

Formação de professores 34, 87, 88, 89, 90, 161, 164, 165, 173, 211, 212, 224, 233, 234, 250, 252

Formulação de problemas 87, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 191

Frações 1, 3, 9, 10, 11, 12, 13

Função afim 240

Função quadrática 240

Funciones en variable compleja 50, 51, 54

## **G**

GeoGebra 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 137, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 148, 151

Geometria 2, 6, 94, 96, 126, 128, 129, 130, 131, 135, 136, 139, 155, 156, 159, 185, 200, 201, 203, 206, 208, 209, 234, 237

## **H**

História da matemática 126, 127, 130, 136, 137, 152, 154, 156, 158, 159, 160, 173, 174, 180, 184, 186, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223

História no ensino de matemática 210

Homotetia 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151

## **I**

Interdisciplinaridade 219, 224, 227, 230, 239

## **J**

Jogo digital 1, 3, 9, 13, 14

Jogos matemáticos 240, 244

## **L**

Liber Quadratorum 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Linguagem algébrica 1, 3, 184

Ludicidade 244, 246, 252

## **M**

Matemática 1, 2, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 39, 48, 50, 52, 61, 62, 65, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 135, 136, 137, 138, 139, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174,

180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252

Matemática atuarial 62, 72

Modelagem matemática 99, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 196, 197, 198, 199, 232, 233, 234, 238

Modelagem matemática crítica 110, 112, 113, 123

## **P**

Pensamento computacional 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34

Pensões 62, 63, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74

Perímetro 131, 132, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 234

Pesca artesanal 110, 111, 112, 114, 117, 119, 120, 121, 122, 123

PIBID 240, 241, 245, 246, 252

Portugal 62, 63, 64, 65, 73, 74, 87

Praxeologia 173, 174, 181, 184, 186

Proporção 20, 105, 110, 112, 122, 123, 177, 182, 183, 233, 234, 237

Proporcionalidade 112, 138, 139, 140, 149, 150, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 207

## **R**

Realidade 21, 65, 66, 67, 78, 89, 92, 110, 111, 112, 113, 117, 124, 163, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 198, 206, 212, 226, 230, 232, 238, 246

Recorrência linear 99, 102

Regra de Três 19, 173, 174, 175, 181, 183, 184, 185, 186

Resolução de problemas 23, 24, 26, 34, 37, 87, 89, 90, 91, 92, 112, 113, 129, 183, 191, 204, 207, 225, 237, 242, 244

## **S**

Scratch 1, 2, 3, 4, 34

Segurança social 62, 63, 65, 72, 73, 74

Softwares de ensino 75, 77

## **T**

Tecnologias 2, 3, 13, 26, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 127, 129, 136, 138, 139, 150, 161, 166, 201, 203, 252

Teorema de Carnot 126, 129, 130, 132

Territórios virtuais 161, 162, 163

Tilápia-do-nilo 99, 104, 107, 108, 109

Transformada de Fourier 35

Trilhos matemáticos 87, 88, 89, 91, 92, 94, 97

# Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

@atenaeditora 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

# Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2



[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

@atenaeditora 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

Atena  
Editora

Ano 2020