Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecário
Maurício Amormino Júnior
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Karine de Lima Wisniewski
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-362-0
DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro “***Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas***”, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 15

A REGRA DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO *LIBER QUADRATORUM*

Data de aceite: 26/08/2020

Denivaldo Pantoja da Silva
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/0767953869085054

José dos Santos Guimarães Filho
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/3097821995908518

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/3873561463033176

RESUMO: Neste trabalho, pretendemos apresentar alguns ajustes que julgamos ampliar a discussão, mantendo a originalidade das ideias, realizada em artigo publicado cujo propósito foi buscar na proposição 5 do *Liber Quadratorum* fundamentos que permitam apresentar a Regra de Três como dispositivo didático eficaz, uma ferramenta de modelização matemática para auxiliar o estudo da noção de proporcionalidade geométrica. Para isso, buscamos na História da Matemática uma abordagem metodológica aliada à noção de praxeologia. Os resultados mostram a Regra de Três como um dispositivo didático para iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica por meio da modelização matemática possível na educação básica e, consequentemente, um dispositivo eficaz de formação de professores e com potenciais didáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Liber Quadratorum, Praxeologia, Modelização Matemática, Proporcionalidade, Regra de Três.

THE RULE OF THREE AND THE TEACHING OF PROPORTIONALITY BASED ON THE FIVE PROPOSITION OF THE LIBER QUADRATORUM

ABSTRACT: In this work, we intend to present some adjustments that we believe to expand the discussion, maintaining the originality of the ideas, carried out in a published article whose purpose was to seek in the proposition 5 of the Liber Quadratorum the foundamentals that allow presenting the Rule of Three as an effective didactic device, a modeling tool mathematics to assist the study of the notion of geometric proportionality. For this, we seek in the History of Mathematics a methodological approach combined with the notion of praxeology. The results show the Rule of Three as a didactic device to initiate the study of geometric proportionality through possible mathematical modeling in basic education and, consequently, an effective device for teacher training and with didactic potentials.

KEYWORDS: Liber Quadratorum, Praxeology, Mathematical Modeling, Proportionality, Rule of Three.

1 | INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática tem sido objeto de pesquisas em Didática das Matemáticas e da Educação Matemática buscando compreender determinadas problemáticas de sala de aula, por vezes, centradas nas aprendizagens, condições de desenvolvimento e organizações praxeológicas de objetos de ensino tradicionais nos currículos escolares tais como proporcionalidade, Regra de Três entre outros (SILVA, 2011, 2017).

Em geral, as pesquisas que se ocupam do ensino da Matemática encaminham o uso de estratégias inovadoras capazes de estabelecer relações entre o que se considera aula “teórica” e as práticas de uso ordinário que acontecem na vida das pessoas. Tais relações têm como elemento facilitador relacionado principalmente ao uso de materiais concretos que parece encontrar abrigo no ambiente das aprendizagens prazerosas assim consideradas por alunos e professores.

No entanto, na aprendizagem da Matemática sabemos que o saber em jogo pode organizar o ensino e aprendizagem e os objetos concretos e qualquer dispositivo destinado ao ensino, a nosso ver, desempenham papel construtivo somente quando participam efetivamente do processo de construção do conhecimento matemático, vai além da motivação, da cooperação e do desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Nesse sentido, vimos na História da Matemática potencialidades didáticas com respeito à transmissão e difusão das ideias matemáticas promovendo ao professor oportunidade de desenvolver uma prática de ensino alternativa e diferenciada para seu trabalho em sala de aula de forma contextualizada. Para além disso, pode contribuir para a aprendizagem interdisciplinar e com significados resistentes ao esquecimento imediato que geralmente acontecem com a aprendizagem dos alunos no decorrer da formação acadêmica, na mudança de uma série para outra.

Assim, ousamos propor alguns ajustes que julgamos promover a possibilidade de ampliar as discussões, mantendo as ideias originais, propostas em Silva e Guimarães Filho (2020) cujo objetivo foi buscar na proposição 5 do *Liber Quadratorum* fundamentos que nos possibilitem apresentar a Regra de Três como dispositivo didático eficaz, no sentido de apresentá-la como uma ferramenta de modelização matemática para auxiliar o estudo da noção de proporcionalidade geométrica, na educação básica. Desse modo, anunciamos a referida proposição da seguinte maneira: *Encontre dois números de modo que a soma de seus quadrados faça um quadrado formado pela soma dos quadrados de outros dois outros números dados* (SIGLER, 1987, tradução nossa).

Portanto, para alcançar nosso objetivo, será desenvolvido na primeira seção um breve histórico do *Liber Quadratorum* para apresentar a praxeologia da proposição 5. Em seguida, trataremos da proposição 5 como fundamento matemático na busca por elementos que encaminhem a construção de uma compreensão da mesma como um dispositivo didático seguindo a questão: **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático?** Por fim, nas considerações finais abordaremos de forma mais precisa algumas conclusões as quais poderão se constituir em respostas possíveis à questão posta, e ainda apontar as potencialidades identificadas neste e para trabalhos futuros.

2 | *LIBER QUADRATORUM*: BREVE HISTÓRICO E APRESENTAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 5

O século XIII deixou muitos legados para a história da ciência, em meio a estes, temos Leonardo de Pisa, ou Fibonacci, como ficou comumente conhecido, o qual, é considerado por Castillo (2007) o primeiro matemático medieval. Este preeminente matemático, deixou contribuições reconhecidamente até hoje, entre elas a obra denominada *Liber Quadratorum*, apresentado por Oliveira (2013) como o Livro dos Quadrado.

Escrito em 1225, este livro partilhou de um período de estabilidade na Europa, o que favoreceu Leonardo Fibonacci (daqui em diante, Fibonacci) aprofundar seus estudos viajando pelo norte da África. A Europa neste período estava sendo regida por Frederico II, um rei intelectual que apreciava a arte e a ciência. A seu pedido foi organizado um torneio matemático, que tem por convidado especial, Fibonacci, o qual, participou com maestria deste torneio, resolvendo os três problemas propostos a ele (CASTILLO, 2007).

Dentre os problemas propostos a Fibonacci, temos no primeiro uma atenção especial, pois motiva a construção do livro em questão. Este problema consiste em *encontrar um número quadrado que adicionado ou subtraído cinco permaneça um número quadrado* (SIGLER, 1987, tradução nossa). Outro ponto a ser evidenciado é que este livro foi dedicado ao rei Frederico II, que se tornou um admirador dos trabalhos de Fibonacci o tornando uma pessoa ilustre para sua época (GUIMARÃES FILHO, 2018).

O *Liber Quadratorum* é composto de vinte e quatro problemas, apresenta segundo Oliveira (2013) em seu conteúdo, problemas envolvendo a Teoria dos Números que, dentre outros, examina métodos para encontrar as ternas pitagóricas de várias formas, os quais, partem de uma ideia inicial de Fibonacci ao perceber que a soma de números ímpares tem uma relação direta com os números quadrados, apresentado na introdução do livro e demonstrado na quarta proposição deste.

Estes problemas serão denominados por nós de proposições, pois Fibonacci organiza de forma que as proposições apresentadas se constituam como axiomas para subsidiar uma apresentação (demonstração) concisa de uma resposta ao primeiro problema proposto a ele no torneio, que é designada de proposição dezessete no *Liber Quadratorum*.

Neste trabalho, na tentativa de alcançar nosso objetivo de buscar na proposição 5 fundamentos para apresentar a Regra de Três como um dispositivo didático para iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica, reconstruímos o enunciado da referida proposição, como segue: *Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros*.

Para apresentar a demonstração dada por Fibonacci, a referida proposição e nossas inferências, estarão em itálico, as partes traduzidas diretamente do trabalho de Sigler (1987). Vale ressaltar também, que Fibonacci faz suas explicações em primeira pessoa, assim, todas as partes que traduzimos estarão em primeira pessoa, bem como, são preservadas as simbologias utilizadas por Fibonacci.

Esse matemático italiano, inicia a demonstração da proposição fazendo o seguinte comentário: *Deixe dois números .a. e .b. serem dados para que então a soma de seus quadrados forme um número quadrado .g.; deve-se encontrar dois outros números para que então a soma de seus quadrados seja igual ao número quadrado .g..*

Deixe quaisquer outros dois números serem encontrados para que a soma de seus quadrados seja um número quadrado. Esses dois números são representados com os segmentos .de. e .ez., e são colocados de modo que formem um ângulo reto, assim é nomeado o ângulo .dez.. Também, o segmento .dz. é localizado estando oposto aos lados .de. e .ez.. O número quadrado formado pelo segmento .dz. é igual ao número .g. ou não.

Desta forma, teremos três situações: ser igual a .g.; ser maior que .g.; ser menor que .g.. Assim, seguiremos com a condição de ser igual, e para esta, Fibonacci apresenta que: *Primeiro, se igual, então os dois outros números pelos quais a soma de seus quadrados seja igual a .g. são encontrados, um desses é igual ao segmento .de. e o outro ao segmento .ez.* expressas no triângulo da figura seguinte:

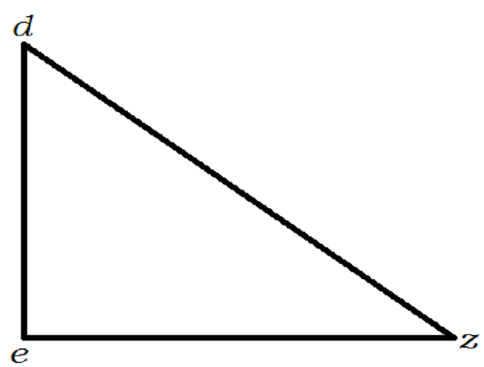

Figura 1: Representação geométrica da proposição 5.

Fonte: Guimarães Filho (2018).

Assim, segundo Leonardo Fibonacci temos que,

- $.a.^2 +. b.^2 =.g.$
- $.g.$ é um número quadrado
- $.dez. = ⊾$

Se $.dz.^2 =.g. \rightarrow .de.^2 + .ez.^2 =.g.=.dz.^2$

Seguindo esta proposição temos o comentário de Leonardo Fibonacci para a situação de não ser igual: *Se não, o número quadrado feito pelo segmento .dz., que é o número .g., não é igual ao número .g., ele será maior ou menor que .g..*

Dessa forma, temos para segunda situação $.dz^2 > .g.$. Leonardo Fibonacci comenta: *Primeiro, se maior, o quadrado formado pelo número .dz. é maior que a raiz quadrada de .g.; portanto, a raiz do número .g. é tomada igual ao número .i., e é colocada sobre o comprimento .dz., e é denotada por .tz.. E do ponto .t. se faz .tk., perpendicular a .ez.; .tk.* é portanto *paralelo a .de. Pelo triângulo .tkz. ser similar ao triângulo .dez., .zd. é para .zt., como .de. é para .tk.. Mas a proporção de .zd. para .zt. é conhecida; ambos os comprimentos são de fato conhecidos.*

Similarmente, é mostrado que o segmento .zk. é conhecido com a proporção dele para .ze. assim como .zt. para .zd.; são portanto, conhecidos .tk. e .kz., que tem a soma de seus quadrados igual ao quadrado feito pelo segmento .tz.. Mas o quadrado do número .tz. é igual ao quadrado do número .i., e .i. é de fato a raiz quadrada do número .g.. Portanto, o quadrado de .tz. é igual ao número .g.; dois números .tk. e .kz. são então encontrados com a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .g..

Dessa forma, $.dz^2 > .g.$, temos $.tz.=i.$ logo, tomando o triangulo (figura 2) teremos as relações seguintes, onde *C* denominamos de constante de proporcionalidade.

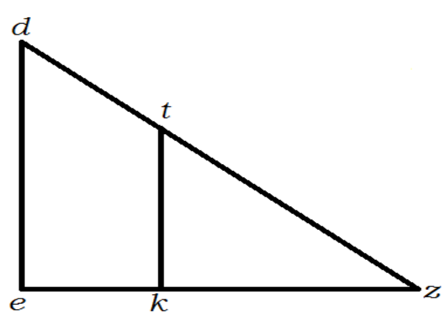

Figura 2 – Representação geométrica do comentário da proporção 5.1

Fonte: Guimarães Filho (2018).

- $.g. = i^2$
- $\Delta .dez. \approx \Delta .tkz.$
- $\frac{.tz.}{.dz.} = C$
- $\frac{.tk.}{.de.} = C$
- $\frac{.kz.}{.ez.} = C$
- $.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2 = .i.^2 = .g.$

Continuando a demonstração dada por Fibonacci, temos por fim, $.dz^2 < .g.$, para tanto $.lz. = i$, assim, tomando o triângulo (figura 3) teremos as seguintes relações, onde *C* continua sendo uma constante de proporcionalidade.

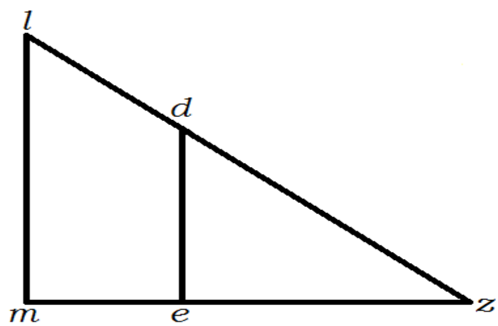

Figura 3 – Representação geométrica do comentário da proposição 5.2

Fonte: Guimarães Filho (2018).

- $.g. = i.^2$
- $\Delta .dez. \approx \Delta .lmz.$
- $\frac{.dz.}{.lz.} = C$
- $\frac{.de.}{.lm.} = C$
- $\frac{.ez.}{.mz.} = C$
- $.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2 = .i.^2 = .g.$

Afim de esclarecer sua demonstração, Fibonacci exemplifica esta proposição da seguinte forma, para:

- $.a. = 5$
- $.b. = 12$
- $.g. = 169$
- $.i. = 13$

Com isso temos que,

$$.a.^2 + .b.^2 = .g. \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow 25 + 144 = 169 = 13^2$$

E se temos $.dz^2 > .g.$ e admitindo,

- $.de. = 15$
- $.ez. = 8$
- $.dz. = 17$
- $.tz. = 13$

Temos que,

$$.tk. = \frac{.zt. \times .de.}{.dz.}$$

$$.tk. = \frac{13 \times 15}{17} = \frac{195}{17} = 11\frac{8}{17}$$

$$.kz. = \frac{.zt. \times .ez.}{.dz.}$$

$$.kz. = \frac{13 \times 8}{17} = \frac{104}{17} = 6\frac{2}{17}$$

E dessa forma temos que,

$$.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2 \Rightarrow \left(\frac{195}{17}\right)^2 + \left(\frac{104}{17}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow \frac{38025}{289} + \frac{10816}{289} = 13^2$$

$$\Rightarrow \frac{48841}{289} = 169 = 13^2 = .g.$$

E se temos $.dz^2 < .g.$ e admitindo que,

- $.de. = 4$
- $.ez. = 3$
- $.dz. = 5$
- $.lz. = 13$

Temos que,

$$.lm. = \frac{.zl. \times .de.}{.dz.}$$

$$.lm. = \frac{13 \times 4}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5}$$

$$.mz. = \frac{.zl. \times .ez.}{.dz.}$$

$$.kz. = \frac{13 \times 3}{5} = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$$

E desta forma temos que,

$$.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2 \Rightarrow \left(\frac{52}{5}\right)^2 + \left(\frac{39}{5}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow \frac{2704}{25} + \frac{1521}{25} = 13^2$$

$$\Rightarrow \frac{4225}{25} = 169 = 13^2 = .g.$$

Logo,

- Para $.dz^2 = .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .de.^2 + .ez.^2;$;
- Para $.dz^2 > .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .tk.^2 + .kz.^2;$;
- Para $.dz^2 < .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .lm.^2 + .mz.^2.$.

Desta maneira, Fibonacci demonstra como podem ser encontrados infinitos valores para esta proposição, bem como, foi possível perceber que basta encontrar uma constante de proporcionalidade e multiplicá-la por qualquer valor para encontrar valores que obedeçam à relação expressa nesta proposição.

3 I A PROPOSIÇÃO CINCO: FUNDAMENTO DE UM DISPOSITIVO DIDÁTICO

Pensar um método de ensino eficaz de encaminhar a aprendizagem matemática na escola básica, demanda concentrar esforços na articulação de mecanismos, procedimentos e estratégias que possibilitem a ajuda ao estudo de objetos matemáticos escolares de modo objetivo e sistematizado, que promova o encontro às perspectivas de alunos e professores para uma aprendizagem com significados, mesmo que seja na própria Matemática e a partir daí transpor para o enfrentamento de outras situações.

Sobre a questão de como ensinar Matemática na escola, cabe refletir sobre a afirmação de Lacroix (2013) quando afirma que a eficácia do ensino consiste principalmente em colocar ordem nas proposições, tornar evidente o encadeamento que as liga entre si e manter, tanto quanto possível, as oportunidades que se oferecem de lançar adiante algumas dessas visões fecundas que guiaram os inventores.

Nesse sentido, uma estratégia que consideramos eficaz em acordo com o proposto por Lacroix (2013), para atender à essa necessidade de significação da aprendizagem matemática, é iniciar pelo estudo histórico-epistemológico do objeto matemático e seguir o processo de transposição discutindo possíveis sutilezas interpostas, isso permitirá certamente uma reflexão sobre o desenvolvimento criativo de noções matemáticas estudadas na escola, além disso afastaria a ideia de que o uso da História da Matemática se aplicam somente interpretações ingênuas (SCHUBRING, 2018).

Pais (2006) ao discutir o fazer matemático escolar nos faz pensar sobre a importância de considerar com atenção nas práticas docentes a dimensão didática ao evidenciar a função das estratégias de ensino: devem contribuir para que o aluno possa fazer matemática sob a orientação do professor, o qual deve buscar dinâmicas apropriadas que intensifique as interações realizadas entre o aluno e o conhecimento matemático valorizando suas ações ao mobilizar noções e procedimentos para solução de problemas.

Nesse sentido, vislumbramos a Regra de Três como prática social provida de história na evolução e difusão das ideias matemáticas, constituir-se potencialmente em um dispositivo didático capaz de cumprir o papel deflagrador de organizações praxeológicas, no sentido de promover por meio de praxeologias a iniciação do aluno ao processo de construção do conhecimento matemático de forma eficaz e consistente, cujo fundamento reside, neste caso, no fazer matemático da proposição 5 do *Liber Quadratorum* de Fibonacci, ou seja, proporciona a iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica tema da Matemática escolar. Para além disso, o fazer matemático desenvolvido na demonstração de Fibonacci, por meio da álgebra geométrica, poderá encaminhar para estudos em níveis mais avançados da Matemática.

Mas, alertamos que não é nosso propósito aqui esgotar todas as possibilidades de uso e aplicação da proposição 5 no ensino da Matemática, nem explorar na sua totalidade o rigor teórico e axiomático que exige a Álgebra Geométrica, mas, sim, explorar de acordo com o previsto em nosso objetivo proposto, alguns pontos que consideramos potencialmente favoráveis ao didático, tomado aqui como “tudo aquilo que está relacionado com o estudo e com a ajuda para o estudo da Matemática” (CHEVALLARD, BOSCH, GASCON, 2001, p.46).

Desse modo, buscamos possíveis respostas para a seguinte questão: **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático?** Para enfrentá-la, consideramos fundamental a proposição 5 demonstrada por Fibonacci como uma praxeologia matemática relativamente completa (CHEVALLARD, 1999; 2005).

Inicialmente vamos retomar a proposição 5 já enunciada anteriormente do seguinte modo: *Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros.* Para atender nossos propósitos, passaremos a anunciá-la convenientemente adaptada a um problema protótipo de Regra de Três, o que permite recorrer a todo instrumental disponível no escopo deste gênero de problemas, da seguinte forma: Se conhecidos dois números quadrados cuja soma resulta em um quadrado, quais outros dois números quaisquer diferentes dos primeiros que também formam o mesmo quadrado?

Nesse caso, ater-se somente na leitura do enunciado, a resposta parece não ser imediata. Precisamos de outros modos de ler e pensar no modo matemático, vamos então usar o pensamento aritmético para nos auxiliar. O enunciado nos permite escolher dois números: o primeiro 5 e o segundo 12. A soma de seus quadrados é 169, isto é, $5^2 + 12^2 = 169$. Esse resultado corresponde a 13^2 como era de se esperar! Para os números desconhecidos, no entanto, sua escolha dependerá de duas situações fundamentais que devem conduzir o desenvolvimento da resposta procurada: Se os números tomados formarem o mesmo número quadrado ou formarem um número quadrado diferente. No primeiro caso, é trivial, não há o que fazer, pois atende plenamente as condições do problema.

No segundo caso, temos que o número quadrado é diferente, logo, duas possibilidades devem ser consideradas impreterivelmente: (i) o número quadrado é maior que o número quadrado dado (169); (ii) o número quadrado é menor que o número quadrado dado (169). Desse modo, teremos:

(i): Tomando os números 8 e 15, teremos que $8^2 + 15^2 = 289$, observe que $289 > 169$ e ambos são números quadrados. Esse número foi tomado como referência para o cálculo dos dois números quaisquer desconhecidos que formarão o mesmo número quadrado dado inicialmente (169). Para isso estabeleceremos relações adequadas de proporcionalidade do número 13 que corresponde a raiz quadrada de 169 a partir da relação do 17, raiz quadrada de 289, com o 8 para determinar o primeiro valor desconhecido. Em seguida repete-se o mesmo procedimento para o número 15. Dessa forma teremos as seguintes sentenças: 17 está para 8, assim como 13 está para o primeiro número desconhecido, que juntas formam a proporção. Do mesmo modo, 17 está para 15 assim como 13 está para o segundo número desconhecido. Da primeira sentença chegamos a $\frac{104}{17}$ e da segunda, $\frac{195}{17}$, que são os dois números procurados. Prova:

$$\left(\frac{104}{17}\right)^2 + \left(\frac{195}{17}\right)^2 = \left(\frac{10816}{289}\right) + \left(\frac{38025}{289}\right) = \frac{48841}{289} = 169 = 13^2.$$

(ii): tomando os números 3 e 4, teremos que $3^2 + 4^2 = 25$, observe que $25 < 169$ e ambos são números quadrados. Esse número foi tomado como referência para o cálculo dos dois números quaisquer desconhecidos que formarão o mesmo número quadrado dado inicialmente (169). Para isso estabeleceremos relações adequadas de proporcionalidade do número 13 que corresponde a raiz quadrada de 169 a partir da relação do 5, raiz quadrada de 25, com o 3 para determinar o primeiro valor desconhecido. Em seguida repete-se o mesmo procedimento para o número 4. Dessa forma teremos: 5 está para 3, assim como 13 está para o primeiro número desconhecido formando a proporção. Do mesmo modo 5 está para 4 assim como 13 está para o segundo número desconhecido. Da primeira sentença chegamos a $\frac{39}{5}$ e da segunda, $\frac{52}{5}$, que são os dois números procurados. Prova:

$$\left(\frac{39}{5}\right)^2 + \left(\frac{52}{5}\right)^2 = \left(\frac{1521}{25}\right) + \left(\frac{2704}{25}\right) = \frac{4225}{25} = 169 = 13^2.$$

Portanto, finalizamos a resolução do problema proposto utilizando o pensamento aritmético analítico nesse desenvolvimento. Essa resolução adaptada de Fibonacci que acabamos de apresentar, pode ser trabalhada pelo professor inicialmente sem maiores problemas de ordem operatória, mas exigiria dos alunos certa habilidade para análise, que se adquire durante o desenvolvimento de estudos aritméticos. Por outro lado, podemos recorrer à Regra de Três que jogará, nesse caso, o papel de dispositivo didático eficiente e com a vantagem de ser um instrumento de caráter prático, rápido e seguro para resolução de problemas dessa natureza. Senão vejamos:

De acordo com os dados do enunciado do problema, podemos iniciar dispondo-os de modo adequado no quadro seguinte:

17	8
13	x

Formamos, então, a proporção geométrica usando x para denotar o número desconhecido e determinamos seu valor aplicando a técnica de cálculo “produto cruzado” , assim teremos:.

$$\frac{17}{13} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{104}{17}$$

Do mesmo modo, chegaremos ao valor do outro número desconhecido.

$$\frac{17}{13} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{195}{17}$$

Portanto, chegaremos aos valores dos números procurados, $\frac{104}{17}$ e $\frac{195}{17}$.

Como podemos notar, essas resoluções apresentadas, de certa forma simples, mobilizam objetos e procedimentos matemáticos que podem ser utilizados pelo professor nos diferentes níveis de ensino sem maiores dificuldades. Particularmente, ressaltamos neste trabalho, que as potencialidades didáticas eleitas a partir da proposição 5 do *Liber Quadratorum* como iniciação ao estudo da proporcionalidade e da Regra de Três inter-relacionados, foram contempladas em conformidade com os limites de nosso objetivo. Mais ainda, podemos explorar não só a proporcionalidade geométrica, mas a própria Regra de Três Algebrizada não explorados neste trabalho, do mesmo modo como estudado na escola atual ampliando as organizações praxeológicas que os manuais escolares apresentam.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como anunciado anteriormente, sobre a algebrização da Regra de Três foi iniciada uma discussão em Silva, Guimarães Filho e Brandemberg (2020), onde buscamos desenvolver por meio da noção de transposição didática uma praxeologia denominada da Regra de Três Algebrizada utilizando o processo axiomático de algebrização de forma evolutiva, consultando fontes históricas - *Liber Quadratorum* - como método de pesquisa.

Nestes trabalhos, percebemos que ao resgatar o *Liber Quadratorum* para fins didáticos, surgiu a presença de objetos com potenciais didáticos que podem auxiliar o fazer docente, seja no contexto escolar ou no acadêmico. De forma global, temos potencialidades didáticas nesta obra do século XIII já evidenciadas por Guimarães Filho (2018), quando aponta, em relação a conteúdo das séries escolares e que transcendem a obra.

Desta forma, Guimarães Filho (2018) sugere potencialidades diversas que o professor pode fazer uso tais como: explorar as ternas pitagóricas, elabora atividades envolvendo quadrados e potências, explorar a evolução da linguagem algébrica entre outros envolvendo a História da Matemática.

Aqui, centramos nossa atenção no fazer da proposição 5 para tentar mostrar um potencial evidente, a Regra de Três como um dispositivo didático. Vimos que esse dispositivo se mostra eficaz para inicialização do estudo da proporcionalidade geométrica, inclusive para Regra de Três, e mais, numa versão mais ampla pode ser tomada para preparação ao estudo de campos mais avançados da Matemática como a teoria das Proporções, Álgebra Geométrica entre outras, não evidenciado no trabalho de Guimarães Filho (2018).

Reafirmamos que há uma consequência imediata que decorre do tratamento da Regra de Três como dispositivo didático para o estudo da proporcionalidade geométrica desenvolvida no campo de práticas aritméticas, é que em continuidade ao estudo da proporcionalidade, esses problemas poderão ser modelizados por uma Regra de Três Algebrizada que de forma geral, deverá ser aplicada para tipos de problemas e até mesmo para gêneros de problemas. Nesse sentido, evidencia-se ainda certa ampliação no enfrentamento de situações em outros campos de saber utilizando como ferramenta a Regra de Três.

Postulamos que este trabalho proporcionou a possibilidade de explorar as proposições de Fibonacci e seu fazer matemático, evidenciando a Regra de

Três como dispositivo didático de modelização matemática capaz de integrar as dimensões aritmética, algébrica e geométrica.

Portanto, temos a convicção de que a resposta para nossa questão inicial - **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático? -** pode ter sido descrita, mesmo que parcialmente, no desenvolvimento deste trabalho. Tentamos mostrar que é possível desenvolver o estudo da proporcionalidade por meio da Regra de Três, com potenciais didáticos aos temas da Matemática Escolar estudadas atualmente, seja pela prática docente ou por manuais escolares, com base nas proposições estabelecidas por Fibonacci, neste caso escolhemos a de número 5.

Enfim, esperamos que nosso trabalho possa contribuir para além de uma reflexão sobre o trabalho docente, no sentido de construir compreensões sobre os objetos matemáticos de ensino e que possam ajudar o professor na construção de organizações didático-matemáticas e estratégias inovadoras que evidencie o fazer matemático escolar como algo significativo promovendo aprendizagens duradouras.

Para aprofundamento deste e para trabalhos futuros deixamos as seguintes questões: Como podemos integrar as proposições do *Liber Quadratorum* para construir um modelo epistemológico de referência para o estudo da Álgebra Geométrica? De que maneira podemos construir uma organização matemática para uso nas aulas de geometria da escola básica a partir das proposições do Liber Quadratorum? Certamente que a busca por essas respostas demandará do pesquisador esforço, o qual será compensado pela qualidade da produção científica a ser alcançada em favor do Ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

CASTILLO, R. M. **Fibonacci: El Primer Matemático Medieval**. 2ª ed. Coleção – La matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, 2005.

CHEVALLARD, Yves. BOSCH, M. & GASCÓN, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

FIBONACCI. **Liber Quadratorum.** Pisa, 1225.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. **Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) de Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) e suas Potencialidades para o Ensino de Matemática.** (Dissertação de Mestrado). Belém-PA, 2018.

LACROIX, Sylvestre-François. **Ensaios sobre o ensino em geral e o de matemática em particular**. Tradução Karina Rodrigues.I ed.Editora UNESP, São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, J. J. **Sequências de Fibonacci:** possibilidades de aplicações no ensino básico. UFBA. Salvador, BA, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática**. Autêntica, 2006.

SCHUBRING, Gert. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?.** Editora livraria da física, São Paulo, 2018.

SIGLER, L. E. **The Book of Squares.** An annotated traslation into modern english. Academic Press, USA: 1987.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três: prática escolar de modelagem matemática**. 2011.Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**. A INVARIÁVEL PRÁTICA DA REGRA DE TRÊS NA ESCOLA**. 2017. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**.;** GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. (no prelo). ENSINO DA REGRA DE TRÊS: a proposição cinco do *Liber Quadratorum* como um contexto de estudo em Matemática. Número Especial – IV Seminário Cearense de História da Matemática, **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** - Volume 7, 2020.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**.;** GUIMARÃES FILHO, José dos Santos.; BRANDEMBERG, João Cláudio. A praxeologia da regra de três algebrizada e a proposição cinco do *Liber Quadratorum*. **Amazônia** | RECM | v.16 (35) - Especial História da Matemática 2020. p. 61-73.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

P

R

S

T

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020