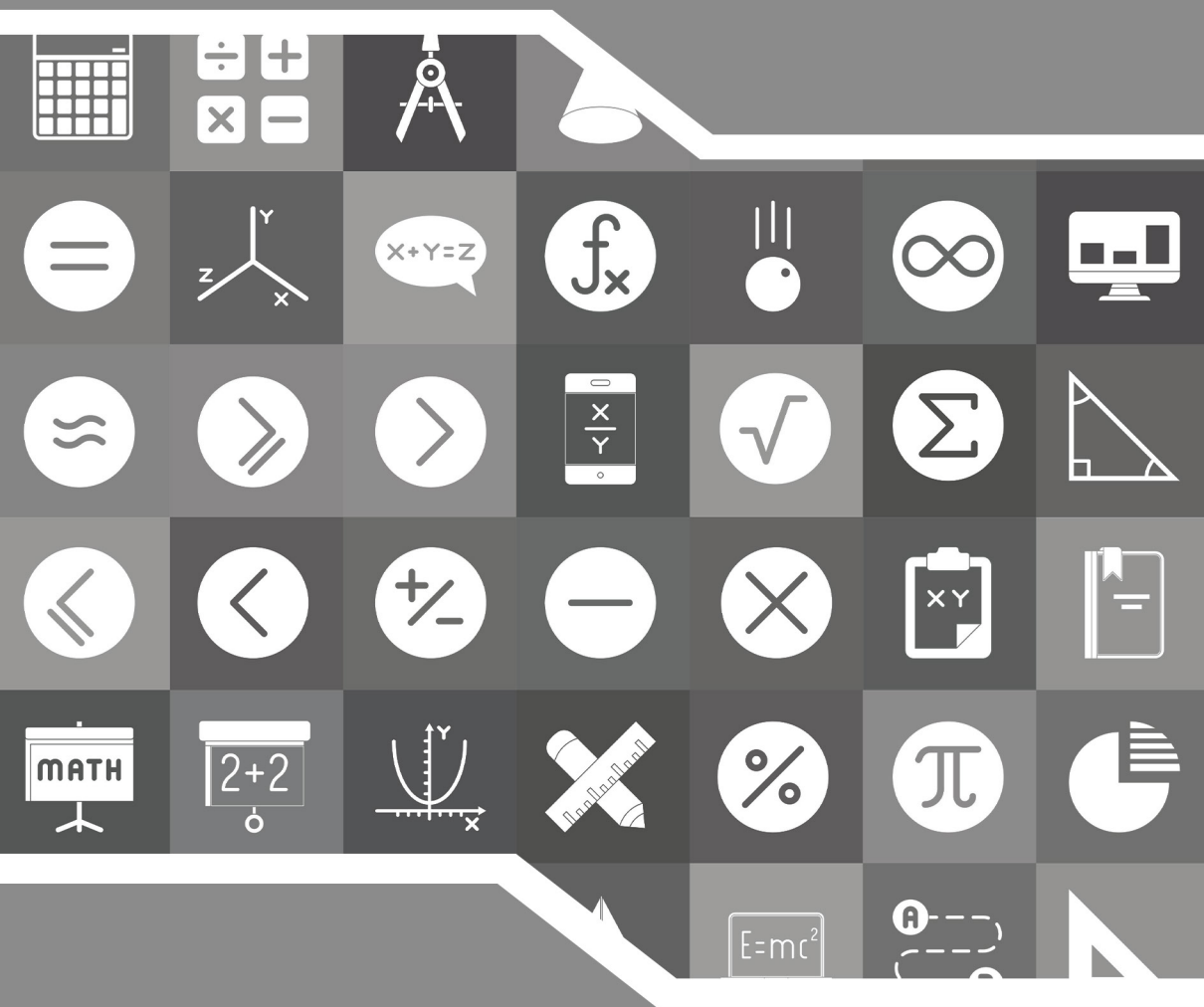


Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 3



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 3



Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Editora Chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Assistentes Editoriais

Natalia Oliveira

Bruno Oliveira

Flávia Roberta Barão

Bibliotecário

Maurício Amormino Júnior

Projeto Gráfico e Diagramação

Natália Sandrini de Azevedo

Camila Alves de Cremo

Karine de Lima Wisniewski

Luiza Alves Batista

Maria Alice Pinheiro

Imagens da Capa

Shutterstock

Edição de Arte

Luiza Alves Batista

Revisão

Os Autores

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A Atena Editora não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant’Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^ª Dr^ª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^ª Dr^ª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^ª Dr^ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof^ª Dr^ª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Prof^ª Dr^ª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Prof^ª Dr^ª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof^ª Dr^ª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Prof^ª Dr^ª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^ª Dr^ª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Prof^ª Dr^ª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof^ª Dr^ª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^ª Dr^ª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Prof^ª Dr^ª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof^ª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof^ª Dr^ª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina

Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lillian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 3

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 3 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-5706-357-6

DOI 10.22533/at.ed.576200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro ***“Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas”***, em seu *volume 3*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de

diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1..... 1

DESARROLLO DE ESTÁNDARES DE MATEMÁTICAS Y FINANZAS FUNCIONALES EN ADOLESCENTES

Claudia María Lara Galo

DOI 10.22533/at.ed.5762008091

CAPÍTULO 2..... 9

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UMA NOVA PERSPECTIVA ATRAVÉS DA CONTEXTUALIZAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Samara de Kássia Saraiva Rodrigues

Izabel Cristina Gemaque Pinheiro

Daniellen Costa Protazio

Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante

Aline Lorinho Rodrigues

Cristiane Matos Oliveira Nascimento

Camila Americo Neri

Priscila da Silva Santos

Yara Julyana Rufino dos Santos Silva

Ashiley Sarmento da Silva

Odivânia Ferreira de Moraes

Alex Gonçalo da Costa Maciel

DOI 10.22533/at.ed.5762008092

CAPÍTULO 3..... 17

A MATEMÁTICA UTILIZADA PELOS FANDANGUEIROS NA CONSTRUÇÃO DA RABECA: POSSIBILIDADES DE DIÁLOGOS COM A MATEMÁTICA ESCOLAR

Josiane Ferreira Gomes Lourenço

Marcos Aurelio Zanlorenzi

DOI 10.22533/at.ed.5762008093

CAPÍTULO 4..... 27

OS ALGORITMOS DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OS ERROS DE ALUNOS

Leila Pessôa da Costa

Regina Maria Pavanello

DOI 10.22533/at.ed.5762008094

CAPÍTULO 5..... 38

MATEMÁTICA E SOCIEDADE NO MUNDO MULTIDIMENSIONAL DA PLANOLÂNDIA, DE EDWIN ABBOTT

Amanda Uneida Vieira

Giovanna Fonseca Couto

Lara Silva Alves

Luísa Tinoco Thomazini

Nicole Zuccolotto Viana

Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni

DOI 10.22533/at.ed.5762008095

CAPÍTULO 6.....	46
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO CONTEMPLANDO HABILIDADES DA BNCC	
Gustavo Henrique da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.5762008096	
CAPÍTULO 7.....	56
PRÁTICA DOCENTE: A UTILIZAÇÃO DO LÚDICO PARA O APRENDIZADO DAS OPERAÇÕES COM COMPLEXOS	
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa	
Lauro dos Reis Costa Neto	
Rafael Silva Patrício	
Jonas Souza Barreira	
Aline Lorinho Rodrigues	
Bianca Sousa Geber	
Érica Pantoja da Silva	
Larisse Lorrane Monteiro Moraes	
Marcelo Costa Cordeiro	
Marcos Vinicius Silva Alves	
Mayanna Cayres Oliveira	
Rayanna Karolina da Silva Corrêa	
DOI 10.22533/at.ed.5762008097	
CAPÍTULO 8.....	68
PSEUDOPRIMOS, QUEM SÃO? COMO VIVEM? COMO SE REPRODUZEM?	
Zulaianny Regina de Araújo Azevedo	
Alex de Moura Batista	
Désio Ramirez da Rocha Silva	
DOI 10.22533/at.ed.5762008098	
CAPÍTULO 9.....	73
EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE Y RECONCEPTUALIZACIÓN GEOMÉTRICA: UNA PROPUESTA PARA LA REORGANIZACIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE	
Karla Gómez Osalde	
Landy Sosa Moguel	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.5762008099	
CAPÍTULO 10.....	85
UMA EXPERIÊNCIA COM AS FERRAMENTAS DO APLICATIVO “GOOGLE SALA DE AULA” NO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Helenice Maria Costa Araújo	
Jhone Caldeira Silva	
Élida Alves da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.57620080910	

CAPÍTULO 11	91
AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO COMO FERRAMENTAS MOTIVADORAS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	
Michele Cristina da Silva	
Élida Alves da Silva	
Jhone Caldeira Silva	
DOI 10.22533/at.ed.57620080911	
CAPÍTULO 12	97
POSSIBILIDADES PARA MELHORAR O DESEMPENHO DOS ACADÊMICOS NA DISCIPLINA DE CÁLCULO	
Sheila Cristina Teixeira	
Élida Alves da Silva	
DOI 10.22533/at.ed.57620080912	
CAPÍTULO 13	103
DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO DE PROFESORES DE SECUNDARIA AL GENERALIZAR UN PATRÓN CUADRÁTICO	
Landy Sosa Moguel	
Eddie Aparicio Landa	
DOI 10.22533/at.ed.57620080913	
CAPÍTULO 14	116
UMA ANÁLISE DOS NÍVEIS DE CONHECIMENTO DIDÁTICO-MATEMÁTICO DE LICENCIANDOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS	
Patrícia Pujol Goulart Carpes	
Eleni Bisognin	
DOI 10.22533/at.ed.57620080914	
CAPÍTULO 15	128
UNA APROXIMACIÓN A LA RECONCEPTUALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS	
Eddie Aparicio Landa	
Landy Sosa Moguel	
DOI 10.22533/at.ed.57620080915	
CAPÍTULO 16	140
PIBID: FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES, UM OLHAR PARA SUAS CONTRIBUIÇÕES A PARTIR DA EXPERIÊNCIA NA ESCOLA ANTÔNIO DE OLIVEIRA GORDO EM MOJU-PA	
Marcos Vinicius Silva Alves	
Alex Gonçalo da Costa Maciel	
Lucas Felipe Souza de Oliveira	
Rafael Silva Patrício	
Ashiley Sarmiento da Silva	
Bruno Sebastião Rodrigues da Costa	
Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante	
Leandro Santos Marques	

Mauro Sérgio Santos de Oliveira
Pedro Augusto Lopes Rosa
Samara de Kássia Saraiva Rodrigues

DOI 10.22533/at.ed.57620080916

CAPÍTULO 17..... 151

O PRINCÍPIO DO BURACO DOS POMBOS FOI DESENVOLVIDO POR DIRICHLET? APRESENTANDO DIRICHLET E SEUS TRABALHOS

Alison Luan Ferreira da Silva

Giselle Costa de Sousa

DOI 10.22533/at.ed.57620080917

CAPÍTULO 18..... 164

UM ESTUDO DO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM ÊNFASE NA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DA FRANÇA

Júlio César Deckert da Silva

Ruy César Pietropaolo

DOI 10.22533/at.ed.57620080918

CAPÍTULO 19..... 176

MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS: CUBO DE RUBIK E ROBÓTICA

Cassiano Marques Barbosa

Alexandre Henrique Afonso Campos

Fernando da Costa Barbosa

DOI 10.22533/at.ed.57620080919

CAPÍTULO 20..... 187

A ESTRUTURA MATEMÁTICA QUANTO À CRIAÇÃO DE AEROPORTOS E AS IMPLICAÇÕES DE VOO E POUSO DE AVIÕES

Sthefany Caroline Souza Raia

DOI 10.22533/at.ed.57620080920

CAPÍTULO 21..... 195

GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ALUNOS DO 7º ANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA COM ENFOQUE DA TAD

Karina de Oliveira Castro

Marlene Alves Dias

Anderson Alves

DOI 10.22533/at.ed.57620080921

SOBRE OS ORGANIZADORES.....206

ÍNDICE REMISSIVO..... 207

CAPÍTULO 17

O PRINCÍPIO DO BURACO DOS POMBOS FOI DESENVOLVIDO POR DIRICHLET? APRESENTANDO DIRICHLET E SEUS TRABALHOS

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 01/06/2020

Alison Luan Ferreira da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
(UFRN)
Natal – RN
<http://lattes.cnpq.br/9841310661109205>

Giselle Costa de Sousa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
(UFRN)
Natal – RN
<http://lattes.cnpq.br/1300121866958282>

RESUMO: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão, fez contribuições valiosas para a teoria dos números, análise e mecânica, nasceu em 13 de fevereiro de 1805 em Düren. Dirichlet foi enviado para o Ginásio em Bonn, em 1817. Estudou dois anos em Bonn e foi enviado para estudar em *Jesuitergymnasium* (colégio jesuíta) na cidade de Colônia. Dirichlet resolveu estudar na França em 1822. Estudou no *Collège de France* e na *Faculté des Sciences* (Colégio de França e na Faculdade de Ciências), onde assistiu a palestras de notáveis como S.F. Lacroix (1765-1843), J.-B. Biot (1774-1862), J.N.P. Hachette (1769-1834) e L.B. Francœur (1773-1849). Nesse tempo, Dirichlet dedicou-se a um profundo estudo particular de Gauss, a obra *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Seu primeiro trabalho de caráter acadêmico foi uma tradução francesa

de um artigo de J.A. Eytelwein (1764–1848) em hidrodinâmica. O primeiro trabalho científico de Dirichlet, intitulado *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*, deu-lhe rapidamente reconhecimento, o que lhe proporcionou ensinar nas universidades de Breslau (1827), Berlim (1828-1855) e, em 1855, sucedeu Gauss, na Universidade de Göttingen, falecendo em 5 de maio de 1859 na cidade de Göttingen, Hanover na Alemanha. Uma característica especial dos seus trabalhos é sua combinação de observações simples com pensamentos penetrantes que levaram a resultados profundos. Uma delas é o chamado princípio do buraco dos pombos. Contudo, utilizando de pesquisa histórico-bibliográfica para melhor conhecer Dirichlet e seu trabalho, nos deparamos com a seguinte questão: O princípio do buraco dos pombos foi realmente desenvolvido por ele? A fim de respondê-la desenvolvemos essa pesquisa que nos proporcionou concluir que este princípio existia antes de Dirichlet, porém foi ele quem primeiro deu uma aplicação matemática relevante a esse princípio.

PALAVRAS-CHAVE: Dirichlet, Princípio das gavetas de Dirichlet, História da Matemática.

WAS PIGEONHOLE PRINCIPLE DEVELOPED BY DIRICHLET? PRESENTING DIRICHLET AND HIS WORKS

ABSTRACT: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, a German mathematician, made valuable contributions to number theory, analysis and mechanics, was born on February 13, 1805

in Düren. Dirichlet was sent to the Gymnasium in Bonn in 1817. He studied for two years in Bonn and was sent to study at Jesuiter-Gymnasium (Jesuit college) in the city of Cologne. Dirichlet decided to study in France in 1822. He studied at the Collège de France and the Faculté des Sciences (College of France and at the Faculty of Sciences), where he attended lectures by notables like S.F. Lacroix (1765-1843), J.-B. Biot (1774-1862), J.N.P. Hachette (1769-1834) and L.B. Francœur (1773-1849). At that time, Dirichlet devoted himself to a deep private study of Gauss, the work *Disquisitiones arithmeticae* (1801). His first academic work was a French translation of an article by J.A. Eytelwein (1764–1848) in hydrodynamics. Dirichlet's first scientific work, entitled *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*, quickly gave him recognition, which allowed him to teach at the universities of Breslau (1827), Berlin (1828-1855) and, in 1855, succeeded Gauss, at the University of Göttingen, dying on May 5, 1859 in the city of Göttingen, Hanover in Germany. A special feature of his works is his combination of simple observations with penetrating thoughts that have led to profound results. One is the so-called Dirichlet drawer principle. However, using historical-bibliographic research to better understand Dirichlet and his work, we are faced with the following question: Was the pigeonhole principle developed by him? In order to answer it, we developed this research that allowed us to conclude that this principle existed before Dirichlet, but it was he who first gave a relevant mathematical application to this principle.

KEYWORDS: Dirichlet, pigeonhole principle, History of Mathematics.

BIOGRAFIA DE DIRICHLET (1805 – 1859)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão, que fez contribuições valiosas para a teoria dos números, análise e mecânica, nasceu em 13 de fevereiro de 1805 em Düren, entre as cidades de Aachen e Colônia, região que nesta época era império francês, atualmente região alemã.

Dirichlet veio de uma família de meios modestos e era o mais novo dos sete filhos de seus pais, Johann Arnold Lejeune Dirichlet (1762-1837) e sua mãe Anna Elisabeth (1768-1868). Seu pai era chefe dos correios na cidade de Düren. Sua família tem descendência belga, mais precisamente do bairro *Liège*, na cidade de *Richelet*, na Bélgica, onde seu avô Antoine Lejeune Dirichlet (1711–1784) morava, explicando, assim, a origem de seu nome *Le jeune de Richelet*, que traduzindo significa *jovem de Richelet*.

A inclinação de Dirichlet para a matemática surgiu aparentemente muito cedo. Ele ainda não tinha 12 anos de idade quando usou seu próprio dinheiro para comprar livros de matemática, e quando lhe foi dito que ele não conseguiria entendê-los, ele afirmou que, de qualquer forma, iria lê-los até que ele os compreendesse (JÜRGEN ELSTRODT, 2007).

No início, os pais de Dirichlet queriam que o filho deles se tornasse um comerciante. Quando ele se pronunciou contra este plano e disse que queria

estudar, seus pais o enviaram para o Ginásio em Bonn, em 1817. Lá, o menino de 12 anos de idade foi confiado aos cuidados e supervisão de Peter Joseph Elvenich (1796–1886).

Dirichlet estudou dois anos em Bonn e logo depois foi enviado para estudar em Jesuiter-Gymnasium (colégio jesuíta) na cidade de Colônia, que fica aproximadamente a 30 km de Bonn. Ele frequentou o *Gymnasium* em Colônia por apenas um ano, deixando-o na idade excepcionalmente precoce de 16 anos, mas sem o exame Abitur (exame de qualificação necessário para admissão nas universidades alemã no século XIX).

Seus pais agora queriam que Dirichlet estudasse direito, mas o mesmo já tinha escolhido pela matemática. Por volta de 1820, as condições para estudar matemática na Alemanha eram bastante ruins para interessados no assunto. O único mundialmente famoso matemático da região era C.F. Gauss (1777–1855), em Göttingen, mas ele ocupou uma cadeira de astronomia e foi o primeiro diretor do Sternwarte. Quase todos os seus cursos foram dedicados à astronomia, geodésia e matemática aplicada (JÜRGEN ELSTRODT, 2007). Além disso, Gauss não gostava de ensinar - pelo menos não no nível baixo que era habitual nas universidades alemãs aquela época. Contrariamente, as condições na França eram muito melhores. De fato, haviam vários cientistas eminentes franceses, como P.-S. Laplace (1749-1827), A.-M. Legendre (1752–1833), J. Fourier (1768–1830), S.-D. Poisson (1781-1840), A.-L. Cauchy (1789-1857) que foram ativos em Paris, tornando a capital da França o mundo capital da matemática.

Dirichlet chega a Paris em maio de 1822 para estudar matemática. Estudou no *Collège de France e da Faculté des Sciences* (Colégio de França e na Faculdade de Ciências), onde ele assistiu a palestras de professores notáveis como S.F. Lacroix (1765-1843), J.-B. Biot (1774-1862), J.N.P. Hachette (1769-1834) e L.B. Francœur (1773-1849). Além de seus cursos, Dirichlet dedicou-se a um profundo estudo particular de Gauss, a obra-prima *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Podemos com segurança supor que ele foi o primeiro matemático alemão que dominou totalmente esta obra (JÜRGEN ELSTRODT, 2007).

Em 1823 o herói nacional das guerras napoleônicas e depois líder liberal da oposição na câmara dos deputados, M.S. Foy (1775–1825) estava procurando um professor particular/tutor para ensinar a seus filhos linguagem e literatura alemã. Dirichlet foi recomendado para a família Foy por Larchet de Charmont, um velho companheiro de armas do general Foy e amigo dos pais de Dirichlet. Com isso Dirichlet conseguiu o emprego com um bom salário, de modo que ele já não dependia do apoio financeiro de seus pais.

Seu primeiro trabalho de caráter acadêmico foi uma tradução francesa de um artigo de J.A. Eytelwein (1764–1848), membro da Academia Real de Ciências

de Berlim, em hidrodinâmica. Dirichlet publicou uma revisão no Boletim de Ciências para a *Société Philomatique* de Paris (1823, p.113–115). A tradução foi impressa em 1825 e Dirichlet enviou uma cópia para Academia de Ciências de Berlim em 1826 (JÜRGEN ELSTRODT, 2007).

O primeiro trabalho científico de Dirichlet, intitulado *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*, deu-lhe rapidamente reconhecimento científico. Dirichlet enviou seu trabalho para a Academia Francesa de Ciências e obteve permissão para palestra sobre o seu conteúdo para os membros da academia. Isso deve ser considerado um evento extraordinário, visto que o orador era na época um estudante alemão de 20 anos de idade, que ainda não havia publicado nada e nem sequer obtido qualquer diploma. Dirichlet deu sua palestra em 11 de junho de 1825, e já uma semana depois Lacroix e Legendre deram um relatório muito favorável sobre ele e seu trabalho. Este trabalho de Dirichlet está relacionado com o último teorema de Fermat (1637), que afirma: Para $n > 2$, natural, não existem inteiros não nulos x, y, z , tais que $x^n + y^n = z^n$. Dirichlet demonstrou que para $n = 5$, tal resultado era de fato impossível. Todo trabalho tratava de equações diofantinas da forma $X^5 + Y^5 = Z^5$, já que na época, os casos $n = 3$ e $n = 4$ foram provados por Euler (1707-1783) e Fermat (1607-1665) respectivamente, com isso Dirichlet atacou o teorema para $n = 5$ (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000).

Dirichlet fez a primeira contribuição significativa para a reivindicação de Fermat mais de 50 anos depois de Euler, e isso imediatamente estabeleceu sua reputação como um excelente matemático. Sete anos depois, ele também provou que a equação de Fermat para o expoente 14 não admite solução integral não trivial.

O General Foy faleceu em 28 de novembro de 1825, mudando os planos de Dirichlet, pois o trabalho como professor particular chegaria ao fim. Não conseguindo Dirichlet se manter na França ele resolve voltar à Alemanha. Fourier e Poisson recomendaram que ele entrasse em contato com Alexander Von Humboldt (1769-1859) por ser conhecido por apoiar jovens talentos em qualquer arte ou ciência. Por ocasião de sua primeira visita a A. von Humboldt, Dirichlet expressou seu desejo para uma nomeação em sua terra natal, Prússia. Von Humboldt apoiou e ofereceu sua ajuda. Era seu objetivo declarado fazer de Berlim um centro de investigação em matemática e ciências naturais.

Em 28 de maio de 1826, Dirichlet enviou uma cópia de suas memórias sobre o último teorema de Fermat para C.F. Gauss em Göttingen, explicando sua situação e pedindo a Gauss para submeter seu julgamento para um de seus correspondentes em Berlim. Uma vez que apenas poucas pessoas estavam suficientemente familiarizadas com o assunto do artigo, Dirichlet estava preocupado que seu trabalho pudesse ser subestimado em Berlim.

Em resposta a Dirichlet, o ministro von Altenstein ofereceu uma posição na

Universidade de Breslau (atualmente Universidade de Wrocław, Polônia) com uma oportunidade para uma habilitação (exame de qualificação para lecionar em uma universidade) e um salário anual modesto de 400 *talers*, que era o salário inicial usual de um professor associado naquela época.

Sabendo que Dirichlet não possuía o título de doutor, o ministro acrescentou que ele poderia enviar um pedido para a faculdade filosófica da universidade de Bonn, que lhe concederia todas as condições necessárias para a concessão do doutorado. Porém, o procedimento usual era impossível por várias razões: Dirichlet não estudou em uma universidade prussiana; sua tese, o livro de memórias sobre o problema de Fermat, não estava escrita em latim, e Dirichlet não tinha experiência em falar latim fluentemente, sendo incapaz de requerer publicamente a disputa pública obrigatória nessa língua.

Para contornar esses problemas formais, alguns professores em Bonn sugeriram a concessão do grau de doutor honorário. Esta sugestão foi oposta por outros membros do corpo docente desconfiados desta maneira de minar as regras usuais. As discussões se arrastaram, mas no final a faculdade votou por unanimidade a favor de Dirichlet.

Dirichlet ministrou sua palestra de julgamento sobre a prova de Lambert da irracionalidade do número π e escreveu uma tese sobre o seguinte problema teórico numérico: Seja x e b inteiros, não sendo b um quadrado perfeito, expanda a expressão a seguir, onde U e V são inteiros.

$$(x + \sqrt{b})^n = U + V\sqrt{b}$$

O problema é determinar as formas lineares contendo os primos que dividem V , quando a variável x assume todos os valores positivos ou negativos, valores integrais coprimos com b . A tese foi impressa no início de 1828 e enviada para von Altenstein, e em resposta Dirichlet, foi promovido ao posto de professor associado.

Os documentos subsequentes, de seus trabalhos com a teoria dos números, que datam dos primeiros anos em Berlim foram evidentemente influenciados por Gauss e os *Disquisitiones*. Alguns deles foram melhorias nas provas e apresentação de Gauss, mas gradualmente Dirichlet aprofundou muito a teoria. Há artigos sobre resíduos quadráticos, as leis quadráticas e biquadráticas da reciprocidade, e a teoria dos números de campos de irracionalidades quadráticas, com a extensa discussão dos inteiros gaussianos $a + ib$, em que a e b inteiros.

Apesar de ser bem querido pela sua modestia e por seu profundo conhecimento, Dirichlet não se sentiu à vontade em Breslau. Dirichlet percebeu a importância de seu trabalho sobre resíduos biquadráticos proposto primeiramente por Gauss e viu uma oportunidade de se afastar da universidade de Breslau. Assim, enviou cartas

com suas descobertas para Encke, em Berlim e logo depois para sua mãe. Nesta carta ele também expressou suas grandes esperanças em seu novo trabalho, para sua promoção e sua transferência desejada para Berlim. Seus resultados foram publicados no livro de memórias *Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré*. (JÜRGEN ELSTRODT, 2007).

Dirichlet começou a ensinar na Escola Militar em 1 de outubro de 1828. Desde o início, ele também solicitou permissão para dar palestras na universidade de Berlim, e em 1831, foi formalmente transferido para a faculdade filosófica da referida universidade, com o dever adicional de ensinar na escola das forças armadas. No mesmo ano ele foi eleito para a Academia Real de Ciências de Berlim, e após a confirmação pelo rei, a eleição entrou em vigor em 1832. Naquela época, Dirichlet, aos 27 anos, era o membro mais jovem da academia.

A. von Humboldt introduziu Dirichlet a família que tinha quatro filhos, sendo uma delas a Rebecka (1811–1858) por quem Dirichlet se interessou e ficou noivo em novembro de 1831. Em seguida casou em maio de 1832. Seu primeiro filho, chamado Walter Dirichlet, nasceu em 2 de julho de 1833.

Na escola militar o conteúdo ministrado por Dirichlet era dividido em ciclos de três anos. Com o passar dos anos, porém, ele se cansou de repetir o mesmo currículo a cada três anos. Além disso, ele precisava urgentemente de mais tempo para sua pesquisa, juntamente com suas palestras na universidade sua carga de ensino normalmente estava por perto 18 horas por semana. Ele foi por muito tempo professor associado da universidade de Berlim, se tornando professor titular apenas em 1839, mas na faculdade ele ainda permaneceu professor *designatus* até sua habilitação em 1851. Isso significava que foi somente em 1851 que ele teve direitos iguais na faculdade; antes desse tempo ele não tinha o direito de escrever relatórios sobre dissertações de doutorado nem influenciar a habilitação (JÜRGEN ELSTRODT, 2007).

Em uma reunião da academia de Ciências, em 27 de julho de 1837, Dirichlet apresentou seu primeiro trabalho sobre teoria analítica dos números. Neste livro de memórias, ele dá uma prova do teorema fundamental que leva seu nome: *Qualquer série aritmética de inteiros $An + b$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde a e b são relativamente primos, deve incluir um número infinito de primos*. Este resultado já havia sido conjecturado e Legendre havia gasto esforço considerável para encontrar uma prova, mas havia sido estabelecido apenas para alguns casos especiais.

O artigo sobre os primos em progressões aritméticas foi seguido em 1838 e 1839 por um artigo de duas partes sobre teoria dos números analíticos. *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*. Dirichlet começa com algumas observações gerais sobre a convergência da série agora chamada de série Dirichlet. A principal realização da teoria dos números

é a determinação da fórmula para o número da classe para formas quadráticas com várias aplicações. Também deste período são seus estudos sobre somas gaussianas.

Estes estudos em formas quadráticas com coeficientes racionais foram continuados em 1842 em um artigo análogo sobre formas com coeficientes que possuem coeficientes de Gauss. Ele contém uma tentativa de uma teoria sistemática de números algébricos quando a fatoração primária é única, embora seja restrita a números inteiros de Gauss. É interessante notar que aqui se encontra a primeira aplicação do princípio do buraco dos pombos comumente conhecido como *princípio das gavetas* de Dirichlet. Este argumento engenhosamente simples, que desempenha um papel importante em muitos argumentos da moderna teoria dos números, pode ser declarado da seguinte forma: *Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.*

Dirichlet influenciou grandes matemáticos através de suas palestras em Berlim ou por contato pessoal. Entre eles destacamos: P. Bachmann (1837–1920), G. Bauer (1820–1907), C.W. Borchardt (1817–1880), M. Cantor (1829–1920), E.B. Christoffel (1829–1900), R. Dedekind (1831–1916), G. Eisenstein (1823–1852), A. Enneper (1830–1885), L. Kronecker (1823–1891), E.E. Kummer (1810–1893), R. Lipschitz (1832–1903), B. Riemann (1826–1866), E. Schering (1833–1897), H. Schroter (1829–1892), L. von Seidel (1821–1896); J. Weingarten (1836–1910).

Em 1855, quando Gauss morreu, a universidade de Göttingen - que há muito desfrutava do reflexo de sua fama científica - procurava sucessor a altura, e a escolha recaiu sobre Dirichlet. Sua posição em Berlim tinha sido relativamente modesta e onerosa, e o cronograma de ensino na academia militar era muito pesado e sem apelo científico. Dirichlet não aceitou a oferta de Göttingen imediatamente, mas usou-a para tentar obter melhores condições em Berlim. No entanto, ele não recebeu nenhuma resposta rápida ao seu pedido, então ele escreveu para Göttingen aceitando a oferta da cadeira de Gauss. Dirichlet mudou-se para Göttingen no outono de 1855, passando a desfrutar de vida mais tranquila em uma universidade proeminente em uma cidade pequena. Ele teve uma série de excelentes alunos e apreciou o aumento da disponibilidade para a pesquisa. Seu trabalho nesse período foi centrado em problemas gerais de mecânica.

Dirichlet rapidamente se sentiu muito à vontade em Göttingen e entrou em contato frutífero com a geração mais jovem, notavelmente com R. Dedekind e B. Riemann, ambos tinham alcançado o seu grau de doutor e habilitação sob orientação de Gauss. Ele era um professor muito estimado, sua carga de ensino era muito menor do que em Berlim, deixando-lhe mais tempo para pesquisa, e ele poderia reunir em torno dele um círculo dedicado de excelentes alunos. Infelizmente, os resultados de sua pesquisa de seus últimos anos foram quase completamente

perdidos.

Quando as palestras do semestre de verão do ano de 1858 chegaram ao fim, Dirichlet fez uma viagem a Montreux (Suíça) para preparar um memorial sobre Gauss, na Sociedade de Ciências de Göttingen, e para escrever um trabalho em hidrodinâmica. Em Montreux, ele sofreu um ataque cardíaco e voltou para Göttingen doente. Graças aos bons cuidados, ele pareceu se recuperar. Então, em 1 de dezembro de 1858, Rebecka morreu de repente. Dirichlet morreu um ano depois, em 5 de maio de 1859, na cidade de Göttingen, Hanover na Alemanha, um dia antes do falecimento de seu fiel amigo Alexander von Humboldt, falecido em 6 de maio de 1859, aos 90 anos de vida.

O PROBLEMA DAS GAVETAS

Conhecido como *princípio da casa dos pombos*, *princípio das caixas de Dirichlet* ou ainda *princípio das gavetas de Dirichlet*, este princípio pode ser enunciado como:

Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.

Demonstração:

Vamos provar este resultado por Indução Matemática sobre o número n de gavetas. Para $n = 1$, o resultado é óbvio pois, se temos mais de um objeto e uma só gaveta, teremos que acomodar nesta gaveta mais de um objeto.

Suponha então o resultado válido para um certo número n de gavetas e consideremos a situação de termos $n+1$ gavetas e $m > n+1$ objetos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso, para aplicar a Indução Matemática e concluir que vale para todo número natural n .

Depois de acomodar todos os objetos nas $n + 1$ gavetas, escolha uma gaveta ao acaso. Se nesta gaveta há mais de um objeto, a nossa asserção está provada. Se nesta gaveta não há nenhum objeto, nas n gavetas restantes estão acomodados $m > n + 1 > n$ objetos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. Se na gaveta escolhida há um objeto, logo, nas n gavetas restantes, estão distribuídos $m - 1 > n$ objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto (HEFEZ, 2007, p. 69).

Mas será que podemos realmente atribuir esse princípio a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet?

Para responder tal indagação recorreremos a uma pesquisa histórico-

bibliográfica, organizando os dados descobertos em ordem cronológica, que dividiremos em três partes: publicações antes de Dirichlet; publicações do próprio Dirichlet e publicações posteriores a Dirichlet.

Publicações Anteriores a Dirichlet

- a. 1622: *Selectæ Propositiones* – Jean Leurechon.

Em *Selectæ Propositiones*, um livro escrito em latim datado de 1622 pelo jesuíta francês Jean Leurechon, o *princípio da casa dos pombos* é indiretamente mencionado na seguinte frase: “*Necesse est, duos hominum, habere totidem numero pilos, aureos, & similia.*” (LEURECHON, 1622, p. 2). Traduzindo temos: É, duas pessoas têm o mesmo número de cabelos, como moedas de ouro.

- b. 1624: *Récréation Mathematicque* – Jean Appier Hanzelet.

Trata-se de um livro foi originalmente publicado em 1624 por Jean Appier Hanzelet, considerado o mestre gravador e impressor da universidade de Pont-à-Mousson. Na página 131 cita o problema de número 89 com o seguinte título: *Diverses questions d’Arithmetique & premierement du nombre des grains de sable*, que em uma tradução livre significa: Várias questões de aritmética e em primeiro lugar do número de grãos de areia. O problema II é o que encontramos o princípio das gavetas de Dirichlet, cujo enunciado na obra segue: “*Qu’il est totalement necessaire que deux hommes ayent avtant de cheveux ou de pistolles fvn que pautre*” (JEAN APPIER HANZELET, 1624, p.131). Traduzindo temos: “Que é absolutamente necessário que dois homens tenham tantos cabelos ou pistolas quanto o outro”. Para justificar essa afirmação argumenta-se que é certo que há mais homens no mundo do que o número de cabelos ou pistolas do homem mais rico.

- 1625: *Lá vérité des sciences* – Marin Mersenne.

Em 1625 Marin Mersenne copiou várias proposições sobre aritmética de Jean Leurechon, incluindo o *princípio das gavetas* de Dirichlet, colocando em sua obra *La Vérité des sciences* (1625). Destacamos a seguinte frase dessa obra: “*il est nécessaire que deux hommes aient autant de cheveux, d’escus, & d’autres choses l’un comme l’autre*” que podemos traduzir como: “é necessário que dois homens tenham tanto cabelo, e outras coisas um como o outro”. Nesta obra Mersenne utiliza o mesmo contexto matemático explicitado por Leurechon.

Publicações de Dirichlet

- a. 1842: *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen* – Dirichlet.

Em 1842 o princípio das gavetas de Dirichlet aparece em sua obra intitulada *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen* (Generalização de uma frase da doutrina das frações contínuas, juntamente com algumas aplicações para a teoria dos números), publicado no *Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (p.93-95).

- b. 1842: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* – Dirichlet.

Em *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (Pesquisa em formas quadráticas com coeficientes indeterminados complexos), publicado no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* o princípio das gavetas surge mais uma vez em trabalho de Dirichlet.

Publicações posteriores a Dirichlet

- a. 1863: *Vorlesungen über Zahlentheorie* – Dedekind.

Em *Vorlesungen über Zahlentheorie*, preparado para publicação por Dedekind, primeira edição de 1863, no caso, quatro anos após a morte de Dirichlet, o princípio das gavetas de Dirichlet é usado para fornecer uma prova da existência de infinitos inteiros x e y tais que:

$$x^2 - y^2D < 1 + 2\sqrt{D}$$

Para D inteiro e não um quadrado perfeito que não depende de sequências contínuas.

- b. 1889: *G. Lejeune Dirichlet's Werke* - Leopold Kronecker

Esta coleção de dois volumes compila todos os trabalhos de Dirichlet e é publicada no período de 1889-1897. O Volume 1 foi compilado por Leopold Kronecker (1823-1891) e contém trabalhos publicados por Dirichlet até 1843, juntamente com um ensaio relacionado de 1846. O volume 2 foi completado por Lazarus Fuchs (1833-1902) e contém as publicações de Dirichlet de 1844 em diante, junto com alguns trabalhos inéditos e correspondência selecionada com Gauss, Alexander von Humboldt e Kronecker.

- c. 1940: *On the simultaneous approximation of two real numbers* – Raphael M. Robinson.

O matemático Raphael M. Robinson em 1940, em um artigo sobre a Aproximação Simultânea de Dois Números Reais, apresentado à *American Mathematical Society* em 23 de novembro de 1940 e publicado no Boletim da

Sociedade em 1941 afirma que:

o método usado nesta prova (Schubfachprinzip ou princípio do pombo) foi usado pela primeira vez por Dirichlet em conexão com um problema similar. Nós esboçamos a prova aqui para comparar com a prova do teorema abaixo, que também usa esse método. (ROBINSON, 1940, p. 512).

d. 1956: *A partition calculus in set theory – Erdős e Rados*

Em 1956 Erdős e Rado em um artigo intitulado *A PARTITION CALCULUS IN SET THEORY* cuja parte é oriunda de um discurso proferido por P. Erdős sob o título Problemas combinatórios na teoria dos conjuntos antes da reunião da Sociedade de Nova York em 24 de outubro de 1953, o *problema das gavetas* aparece. A convite do Comitê para os Altos Discursos das Reuniões Sectionais Orientais; recebido pelos editores em 17 de maio de 1955 os autores afirmam que:

O princípio do buraco de pombo de Dedekind, também conhecido como o argumento da caixa ou o argumento da cômoda (Schubfachprinzip) pode ser descrito, de maneira bastante vaga, como segue. Se suficientemente muitos objetos são distribuídos em não muitas classes, então pelo menos um classe contém muitos desses objetos. (ERDÖS; RADOS, 1956, p.427).

e. 1964: *The pigeon-hole principle for ordinal numbers – Milner e Rado.*

Milner e Rado publicaram, em 1964, um artigo intitulado *THE PIGEON-HOLE PRINCIPLE FOR ORDINAL NUMBERS* (o *princípio da casa dos pombos* para números ordinais). O artigo explica esse princípio do seguinte modo: esse princípio afirma, de grosso modo, que se um grande números de objetos são distribuídos de certa maneira em não muitas classes, então uma das classes contém muitos desses objetos. Aqui nós consideramos uma extensão deste princípio, e investigamos a distribuição dos elementos de um conjunto bem ordenado finita ou infinitamente muitas classes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos que o *princípio das gavetas* de Dirichlet já era utilizado pelo menos 2 séculos antes de Dirichlet, como comprovamos nas obras de Jean Leurechon, Jean Appier Hanzelet e de Marin Mersenne, porém nessas obras esse princípio não tinha nenhum nome específico. Contudo, foi Dirichlet que fez uso desse simples princípio na construção da teoria dos números, principalmente no desenvolvimento das equações diofantinas, porém esse princípio continuava sem um nome específico. Foi só em 1940 na obra de Robinson que ele chama o princípio de *pigeonhole principle* o qual, segundo Carvalho (1997) com a tradução, temos:

Pigeon, em português, é 'pombo', e *pigeonhole*, 'buraco de pombo'. No sentido figurado, a palavra é usada para designar um pequeno compartimento para guardar papéis ou cartas, um escaninho. O verbo, *to pigeonhole*, significa classificar algo ou alguém, como que colocando-o em pequenos compartimentos ou categorias, normalmente de forma rígida e sem saber muito a respeito da pessoa ou da coisa em questão. (CARVALHO, 1997, p.1).

Alguns autores como Rittaud e Heeffer (2013), Milner e Rado (1984), Erdős e Rado (1956) afirmam que Dirichlet chama este princípio de *Schubfachprinzip*. A tradução do prefixo *Schubfach* significa Gaveta.

Como o pai de Dirichlet era um agente dos correios e ainda como móveis com compartimentos são comumente usados para armazenar ou classificar as coisas em várias categorias (como cartas em correios ou chaves de um hotel) acreditamos esse ser o motivo desse princípio ser conhecido como Princípio das gavetas de Dirichlet.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, U. W. **PIGEONHOLE: qual é o significado e a tradução?** Tecla sap. 1997. Disponível em: <<http://www.teclasap.com.br/pigeonhole-qual-e-o-significado-e-traducao/>>. Acesso em: 02 nov. 2018

DIRICHLET, P.G. Lejeune: **Werke**. vol. 1. Ed. por L. Kronecker. Berlin: Reimp. 1889.

DIRICHLET, P. G. Lejeune. **Vorlesungenüber Zahlentheorie**. F. Vieweg, p. 405-406, 1863.

DIRICHLET, P. G. Lejeune. **Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie des Zahlen**. Berichtüber die Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften, 1842, p. 93-95.

DIRICHLET, P. G. Lejeune. **Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes**. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1842, p. 291-371.

ELSTRODT, J. **The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)**. 2007. In: Georg-August-Universität Göttingen. Disponível em: <<http://www.uni-math.gwdg.de/tschinkel/gauss-dirichlet/elstrodt-new.pdf>>. Acesso em: 16 ago. 2018.

ERDÖS, P.; RADO, R. **A Partition Calculus in Set Theory**. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 62, n. 5, 1956, p. 427-489.

HANZELET, J.A. **Récréation mathematicque composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux**. Jean Appier Hanzelet (1624). Disponível em: <https://books.google.fr/books?id=QsY5AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 19 out. 2018.

HEFEZ, A. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

LEURECHON, J. **Selectæ Propositiones in Tota Sparsim Mathematica Pulcherrimæ**. Gasparem Bernardum 1622. Disponível em: <<https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-10537>>. Acesso em: 19 out. 2018.

MERSENNE, Marin. **La Vérité des sciences**. Toussaint du Bray (1625). Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k579276.image>>. Acesso em: 16 out. 2018.

MILNER, E. C.; RADO, R. **The Pigeon-Hole principle for ordinal numbers**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Volume s3-15, n. 1, 1965, p.750-768.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet**. 2000. In: Mactutor. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html>>. Acesso em: 14 ago. 2018.

RITTAUD, B; HEEFFER, A. **The Pigeonhole Principle, Two Centuries Before Dirichlet**. *MATHEMATICAL INTELLIGENCER*. v. 36, n.2, 2013, p. 27–29.

ROBINSON, Raphael M. **On the simultaneous approximation of two real numbers**. *Bull. Amer. Math. Soc.* v.47, n. 6, 1941, p. 512–513.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Aeronaves 187, 188, 190, 192, 193

Aeroportos 187, 188

Aprendizagem 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 47, 55, 57, 58, 60, 66, 67, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 101, 102, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 143, 144, 145, 147, 148, 149, 150, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 186, 198, 199, 201

Aritmética e sistemas numéricos 27

Atividade 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 65, 88, 95, 102, 120, 121, 123, 124, 125, 147, 179, 195, 200, 201, 203

B

BNCC 27, 46, 47, 51, 54, 55, 195, 196, 197, 200, 201, 202, 203, 205

C

Cálculo 31, 34, 35, 54, 73, 75, 78, 79, 80, 97, 98, 99, 101, 102, 108, 125, 172, 187

Conhecimento didático-matemático 116

Contextualização 9, 10, 11, 14, 16, 59

Cubo de Rubik 176, 180, 181

Currículo prescrito 164, 165

D

Desenvolvimento profissional 27, 148

Dificuldades 1, 75, 103, 104, 105, 107, 108, 112, 113

Dimensões 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 118, 150, 173, 174, 187, 190, 192

Dirichlet 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163

E

Educação 11, 12, 13, 16, 21, 26, 27, 28, 36, 38, 44, 46, 47, 55, 67, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 96, 98, 102, 126, 127, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 147, 149, 164, 170, 171, 175, 176, 178, 181, 184, 185, 186, 195, 197, 198, 205, 206

Educação matemática 11, 16, 26, 27, 36, 90, 96, 102, 126, 127, 164, 176, 181, 185, 206

Emprendimiento en jóvenes 1

Ensino 9, 10, 11, 13, 16, 17, 22, 27, 28, 30, 34, 35, 36, 38, 40, 44, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95,

96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 124, 126, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 156, 157, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 186, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 203, 205, 206

Ensino-aprendizagem 13, 16, 17, 55, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 143, 144, 145, 147, 149, 150

Ensino básico 46, 47, 54, 55, 99, 196

Ensino e aprendizagem 11, 17, 22, 57, 58, 60, 66, 67, 119, 124, 148, 185

Ensino fundamental 9, 27, 28, 48, 51, 55, 85, 88, 91, 117, 121, 140, 143, 150, 164, 165, 166, 170, 171, 172, 175, 177, 182, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 203

Escola pública 176, 181

Estágio supervisionado 56, 57, 58, 59, 149

Estândaes 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

Experiência em sala de aula 141

Experiencias de aprendizagem 73, 76, 77, 78, 83, 113

F

Fandango 17, 18, 19, 20, 22, 23, 26

Finanzas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8

Formação continuada 27, 149

Formação docente 67, 141, 142, 146, 149, 165

Formação inicial de professores 116, 117, 119, 140

G

Generalização 160, 195, 196, 197, 201, 203, 204

Geometria 45, 47, 59, 96, 164, 166, 172, 174, 175, 186, 191, 196, 200

Google sala de aula 85, 87, 89

H

História da matemática 26, 60, 62, 72, 95, 151

J

Jogos 57, 60, 61, 62, 63, 64

M

Matemática 1, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 51, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 109, 110, 112, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121,

122, 125, 126, 127, 128, 140, 141, 142, 143, 151, 152, 153, 154, 158, 163, 164, 165, 166, 170, 172, 176, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 190, 193, 195, 196, 197, 199, 203, 205, 206

Maxima 97, 98, 101

N

Números complexos 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 67

Números primos 68, 69, 70, 71, 72

Números racionais 28, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 124, 125, 126

P

Padrões numéricos 195, 203

Patrón cuadrático 103, 104, 105, 106, 112

Pensamiento geométrico espacial 73

PIBID 9, 10, 14, 140, 141, 142, 143, 148, 149, 206

Planolândia 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45

Princípio das gavetas de Dirichlet 151, 162

Profesores de matemáticas 73, 84, 103, 104, 107, 128, 130

Professor 10, 11, 12, 13, 14, 16, 28, 35, 36, 39, 48, 51, 57, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 86, 87, 92, 93, 96, 98, 101, 102, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 125, 126, 127, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 172, 173, 178, 180, 183, 184, 201, 202, 204, 206

Pseudoprimos 68, 69, 70, 71, 72

R

Rabeca 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Racionalidades matemáticas 17

Razonamiento inductivo 103, 104, 105, 106, 107, 112, 113

Reconceptualización 73, 75, 76, 77, 78, 82, 83, 128, 129, 130, 132, 133, 137

Reconceptualización de las matemáticas 73

Reforma curricular 164, 165, 171, 175

Reorganización de la práctica docente 73, 78

S

Sequência de Fibonacci 46, 47, 48, 50, 54, 55

Sequência numérica 51, 195, 197, 204

Sociedade 10, 12, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 86, 93, 98, 102, 144, 158, 161, 163, 177, 178, 181, 185

Software 5, 42, 92, 95, 97, 98, 101

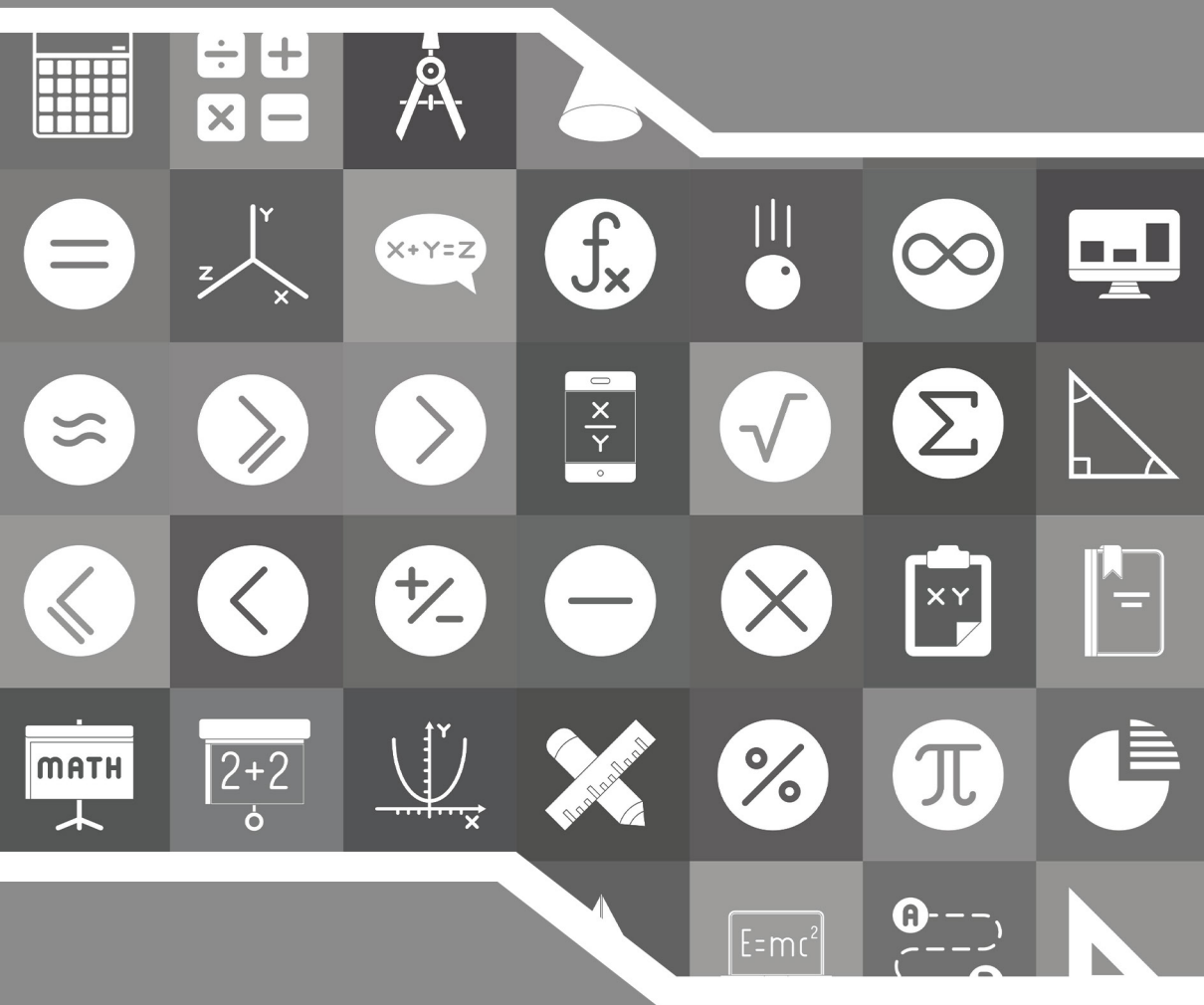
T

Tecnologias 44, 54, 60, 67, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 98, 176, 178, 180, 181, 184, 192, 206

Testes de primalidade 68, 69, 70, 71

Transformações geométricas 164, 165, 166, 171, 172, 173, 174, 175

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 3



 www.atenaeditora.com.br

 contato@atenaeditora.com.br

 @atenaeditora

 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 3



 www.atenaeditora.com.br

 contato@atenaeditora.com.br

 @atenaeditora

 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

 Atena
Editora

Ano 2020