



Franciele Braga Machado Tullio  
Lucio Mauro Braga Machado  
(Organizadores)

# A Aplicação do Conhecimento Científico na Engenharia Civil

2

**Atena**  
Editora  
Ano 2020



Franciele Braga Machado Tullio  
Lucio Mauro Braga Machado  
(Organizadores)

# A Aplicação do Conhecimento Científico na Engenharia Civil

2

**Atena**  
Editora

Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Diagramação:** Camila Alves de Cremo

**Edição de Arte:** Lorena Prestes

**Revisão:** Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense

Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa

Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia

Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá

Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima

Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros

Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense

Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste

Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador

Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí  
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof<sup>a</sup> Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Prof<sup>a</sup> Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Prof<sup>a</sup> Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Prof<sup>a</sup> Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College  
Prof<sup>a</sup> Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco

Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
 Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
 Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
 Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
 Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
 Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
 Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ  
 Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
 Prof. Me. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
 Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
 Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
 Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
 Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior  
 Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
 Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
 Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco  
 Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
 Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
 Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
 Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana  
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
A642	<p>A aplicação do conhecimento científico na engenharia civil 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Franciele Braga Machado Tullio, Lucio Mauro Braga Machado. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.</p> <p>Formato: PDF            Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader.            Modo de acesso: World Wide Web.            Inclui bibliografia            ISBN 978-65-5706-170-1            DOI 10.22533/at.ed.701200907</p> <p>1. Engenharia civil – Pesquisa – Brasil. 2. Construção civil.            I. Tullio, Franciele Braga Machado. II. Machado, Lucio Mauro Braga.</p> <p style="text-align: right;">CDD 338.4769</p>
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
 contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Aplicação do Conhecimento Científico na Engenharia Civil 2” contempla vinte e três capítulos com pesquisas relacionadas a temas da engenharia civil.

O desenvolvimento de novos materiais e a utilização de novas tecnologias na sua composição permitem um grande avanço na área, gerando alternativas de execução e muitas vezes evitando patologias nas edificações.

O estudo sobre o comportamento de materiais utilizados na construção civil permite o aperfeiçoamento de sistemas construtivos já existentes e proporciona uma otimização na execução de projetos.

O livro aborda também artigos que avaliam desempenho de solos, seu comportamento junto a estruturas de edificações e obras de pavimentação.

Esperamos que esta obra proporcione uma leitura agradável e contribua para a geração de novas pesquisas na área da engenharia civil, contribuindo para o desenvolvimento tecnológico.

Franciele Braga Machado Tullio

Lucio Mauro Braga Machado

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
ADERÊNCIA DO CHAPISCO COM ADIÇÃO DE CAL	
André Miranda dos Santos Ângelo Just da Costa e Silva João Manoel de Freitas Mota	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009071</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>13</b>
AVALIAÇÃO DA ABSORÇÃO CAPILAR EM ARGAMASSAS ESTABILIZADAS DE REVESTIMENTOS SUBSTITUINDO AGREGADOS NATURAIS POR AGREGADOS ARTIFICIAIS	
Valéria Costa de Oliveira Emílio Gabriel Freire dos Santos Leandro de Souza Carvalho Rafael Alves de Oliveira Fernanda dos Santos Gentil Ieda Maria Fagundes Zanolla	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009072</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>30</b>
AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO PIGMENTO NA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO E TRAÇÃO DE CONCRETOS DE ALTO DESEMPENHO	
Amanda Vieira Noletto Dalmo Gabriel da Silva Santana Beatriz Santos Neri Maria Carolina de Paula Estevam D'Oliveira Salmo Moreira Sidel	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009073</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>38</b>
AVALIAÇÃO DO ATAQUE DE ÍONS CLORETO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO, CONTENDO OU NÃO ADIÇÕES MINERAIS	
Rayssa Valéria da Silva Fuad Carlos Zarzar Júnior José Wertson Gonçalo Pereira Gênova Gabriela Oliveira de Paula Rocha Leonardo José Silva do Vale João Gabriel Souza dos Reis Igor Albuquerque da Rosa Teixeira Pedro Daltro Macedo de Alencar José Flávio Batista Vilela Carlos Fernando Gomes do Nascimento	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009074</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>51</b>
AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DA ADIÇÃO DE METACAULIM NO CONCRETO FRENTE À PENETRAÇÃO DE ÍONS CLORETO	
Jefferson Thales Siqueira Gomes Emerson José da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009075</b>	

<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>68</b>
COMPÓSITOS CIMENTÍCIOS REFORÇADOS COM FIBRAS DE CELULOSE: UMA REVISÃO	
Marllon Victor Soares Cabral Humberto Mycael Mota Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009076</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>81</b>
EFEITO DA SÍLICA ATIVA EM SUSPENSÃO NAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO	
Albert Luiz Follmann Bruno Teles Cordeiro Fernando Pelisser Artur Spat Ruviano	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009077</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>95</b>
ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE UM CONCRETO COM 20MPA NO ESTADO FRESCO, MISTURADO À MÃO E NA BETONEIRA, COM E SEM A SUBSTITUIÇÃO DA AREIA NATURAL POR AREIA BRITADA	
Gabriel Rigaud Figueirôa Lyra Anderson José Silva André Vinícius Melo Couto André William Barbosa Brito Sócrates Ildfonso Farias da Silva Simone Perruci Galvão	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009078</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>105</b>
INFLUÊNCIA DO PROCEDIMENTO DE MISTURA DOS ADITIVOS NAS PROPRIEDADES DAS ARGAMASSAS ESTABILIZADAS	
Juliana Pippi Antoniazzi Luciano Vargas Vaz Gihad Mohamad Raquel Petry Brondani Schmidt Bernardete Trindade	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7012009079</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>114</b>
VIABILIDADE TÉCNICA DO USO DE DETERGENTE DOMÉSTICO COMO ADITIVO PLASTIFICANTE EM ARGAMASSA CIMENTÍCEA	
Jessica Maria de Oliveira Galeno Ataídes Oliveira Galvão Junior Marcos Vinícios Aguiar Mohana Mylena Veras Cavalcante	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090710</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>128</b>
AVALIAÇÃO DO ATRITO DE INTERFACE ENTRE BLOCOS DE EPS E DIFERENTE SOLOS E GEOSSINTÉTICOS ATRAVÉS DO CISALHAMENTO DIRETO	
Arthur Ivo Zuquim	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090711</b>	

<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>143</b>
CONTRIBUIÇÃO DA RIGIDEZ TORSIONAL DE VIGAS NO CÁLCULO DE MOMENTOS FLETORES EM LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO	
Jonas Pereira Falcão Francisco dos Santos Rocha	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090712</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>159</b>
DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ EXPERIMENTAL DE VIGOTA TRELIÇADA OBJETIVANDO O DIMENSIONAMENTO DE ESCORAS DE LAJES	
Rebeca Alexandra de Moraes Candido Tiago Duarte de Lima Adão Marques Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090713</b>	
<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>170</b>
EFEITOS DA TEMPERATURA NAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DO CONCRETO	
Edmilson Lira Madureira Brenda Vieira Costa Fontes Juliana Caroline Neves de Araújo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090714</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>186</b>
ESTABILIDADE ELÁSTICA EM PILARES METÁLICOS SUBMETIDOS À ATUAÇÃO CONJUNTA DO CARREGAMENTO VERTICAL E DO VENTO	
Wesley Imperiano Gomes de Melo Normando Perazzo Barbosa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090715</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>205</b>
INFLUÊNCIA DO GRAUTE NA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DA ALVENARIA ESTRUTURAL DE BLOCOS CERÂMICOS	
Rafael Azevedo Lino Orieta Soto Izquierdo Indara Soto Izquierdo Márcio Roberto Silva Corrêa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090716</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>222</b>
INSPEÇÃO PRELIMINAR E MONITORAMENTO DE EDIFICAÇÃO EM CONCRETO ARMADO: ESTUDO DE CASO EM BRASÍLIA	
Matheus Nunes Reis Jorge Antonio da Cunha Oliveira Jocinez Nogueira Lima	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090717</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>237</b>
O CÁLCULO CORRETO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIO DE CONCRETO ARMADO	
Antonio Oscar Cavalcanti da Fonte Felipe Luna Freire da Fonte Ennes do Rio Abreu	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090718</b>	

<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>251</b>
REFORÇO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM PRF: UM ESTUDO DE CASO	
Elisson Bilheiro Ferreira Filho	
Ruan Richelly Santos	
Letícia Ikeda Castrillon Fernandez	
Diôgo Silva de Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090719</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>270</b>
CAPACIDADE DE ANCORAGEM DE CONECTORES COM CABEÇA EM CONEXÕES VIGA-PILAR DE CONCRETO ARMADO	
Nataniel Wontoon Barbosa Lima	
Ana Paula Bona Barros Medeiros	
Guilherme Oití Berbert-Born	
João Gabriel Pacheco Monteiro	
Marcos Honorato de Oliveira	
Maurício Ferreira de Pina	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090720</b>	
<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>285</b>
ESTUDO DA DOSAGEM DE CONCRETO AUTOADENSÁVEL REFORÇADO COM FIBRAS ADOTANDO O MÉTODO DO EMPACOTAMENTO COMPRESSÍVEL (MEC)	
Matheus Galvão Cardoso	
Rodrigo de Melo Lameiras	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090721</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>301</b>
IDENTIFICAÇÃO DE MANIFESTAÇÕES PATOLÓGICAS EM FACHADAS DE EDIFICAÇÕES HISTÓRICAS	
Tauhana Eineck	
Diogo Rodrigues	
Patrícia Dalla Lana Michel	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090722</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>305</b>
UMA ABORDAGEM SOBRE A CARACTERIZAÇÃO DOS SOLOS LATERÍTICOS APLICADOS À PAVIMENTAÇÃO	
Lettycia Pinheiro da Silva	
Lázaro Fernandes Pereira	
Beatriz Almeida Nascimento	
Lívia Ramos Lima	
Roseli Oliveira Guedes Martins	
<b>DOI 10.22533/at.ed.70120090723</b>	
<b>SOBRE OS ORGANIZADORES</b> .....	<b>307</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO</b> .....	<b>308</b>

## ESTABILIDADE ELÁSTICA EM PILARES METÁLICOS SUBMETIDOS À ATUAÇÃO CONJUNTA DO CARREGAMENTO VERTICAL E DO VENTO

*Data de aceite: 01/06/2020*

*Data de submissão: 15/04/2020*

### **Wesley Imperiano Gomes de Melo**

Professor Doutor da Universidade Federal Rural de Pernambuco, Curso de Graduação em Engenharia Civil, wesley.gomes@ufrpe.br, Recife – PE, <https://orcid.org/0000-0001-5750-3272>

### **Normando Perazzo Barbosa**

Professor Titular da Universidade Federal da Paraíba - CT, nperazzob@yahoo.com.br, João Pessoa – PB, <https://orcid.org/0000-0003-4497-8900>

**RESUMO:** A ruptura de pilares por flambagem ocorre de forma abrupta, sem tempo para a devida evacuação da estrutura. No caso de pontes, este fenômeno é crucial, pois devido ao reduzido número de pilares, pode acarretar facilmente o colapso progressivo de toda a estrutura por ultrapassar a capacidade resistente dos demais pilares. Isto acontece com a redistribuição dos referidos esforços resultando em elevada ordem de grandeza. Na literatura especializada existe a análise da estabilidade elástica de pilares sob cargas concentradas e distribuídas, porém com

atuação em estados separados de carga. Daí, nesse artigo procede-se o estudo da estabilidade elástica para a atuação conjunta dos diversos carregamentos e variação linear da seção transversal. Tais análises são procedidas mediante Modelagem Computacional via Método das Diferenças Finitas e os resultados validados com casos particulares constantes na literatura especializada.

**PALAVRAS-CHAVE:** Estabilidade Elástica, Carga de Flambagem, Pilares metálicos, Método das Diferenças Finitas.

### ELASTIC STABILITY IN METAL PILLARS SUBJECT TO JOINT ACTUATION BY VERTICAL LOAD AND WIND

**ABSTRACT:** The rupture of pillars by buckling occurs abruptly, with no time for proper evacuation of the structure. In the case of bridges, this phenomenon is crucial because, due to the small number of pillars, it can easily lead to the progressive collapse of the whole structure by exceeding the resisting capacity of the other pillars. This happens with the redistribution of these forces resulting in high order of magnitude. In the specialized literature there is the analysis of the elastic stability of pillars under concentrated and distributed

loads, but with performance in separate loading scenarios. Hence, the elastic stability study is carried out for the joint action of the various loads and linear variation of the cross section. Such analyses are carried out using the Finite Difference Method and the results are validated with particular cases in the specialized literature.

**KEYWORDS:** Elastic stability, buckling load, metal pillars, finite difference method.

## 1 | INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade elástica de elementos estruturais é apresentado em Chajes (1974) e Timoshenko e Gere (2009), onde o pilar engastado na base e com extremidade livre no topo é analisado para atuação de cargas concentradas no topo  $p$  (vertical) e  $Q$  (lateral) e distribuídas  $p$  (peso – próprio) em cenários separados, sendo nessa última abordada a resolução da EDO mediante funções de Bessel. Neste sentido, é procedida a análise da estabilidade elástica do referido pilar com carregamentos com atuação conjunta:  $P, p$  (verticais concentrada no topo do pilar e distribuído na altura, respectivamente),  $Q, q_1, q_2$  (laterais concentrada no topo, constante na altura e sob variação linear com valor máximo igual a  $q_2$  no topo, respectivamente). Vide figura 1.

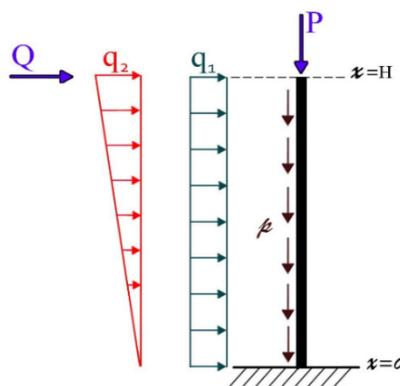


Figura 1. Estado de carga do pilar sob cargas verticais e laterais

A resolução da Equação Diferencial oriunda da ação conjunta dos carregamentos é bastante laboriosa se conduzida via funções de Bessel, sendo mais eficaz e prática a utilização de Métodos Aproximados: a exemplo, cita-se a utilização do Método das Diferenças Finitas (SOARE, 1962) e (GUTKOWSKI, 1981). A obtenção da carga crítica será procedida mediante incremento sucessivo da carga lateral  $p$  até o deslocamento  $v$  no topo do pilar tender ao infinito. A verificação de tais resultado é realizada mediante casos particulares com soluções analíticas presentes na literatura especializada.

## 2 | REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Formulação Matemática

Ao considerar os efeitos de primeira ordem, verifica-se a ativação do momento fletor ao longo do eixo axial  $x$  do pilar, unicamente pelas cargas laterais oriundas da atuação do vento. Por outro lado, ao considerar a posição deformada do pilar e, em consequente, o cálculo dos efeitos de 2ª ordem, obtém-se o momento fletor  $\mathfrak{M}(x)$  mediante equilíbrio de momento numa seção genérica. Conforme é apresentado na figura 2.

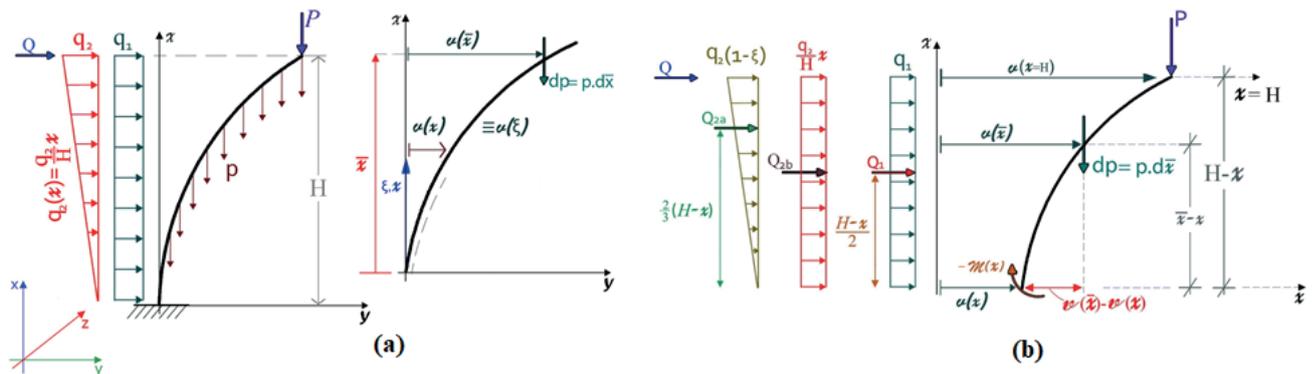


Figura 2. Pilar sob cargas verticais e laterais: (a) Pilar deformado, (b) Momento fletor

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) = & - \int_x^H [v(\bar{x}) - v(x)] \cdot dp - [v(H) - v(x)] \cdot P + Q_1 \cdot \frac{(H-x)}{2} + Q_{2a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (H-x) \\ & + Q_{2b} \cdot \frac{(H-x)}{2} + Q \cdot (H-x) \end{aligned} \quad (1)$$

onde:  $v(x)$  – é a deflexão do pilar na direção  $y$  ao longo do eixo axial  $x$ ;  $v(\bar{x})$  – é a deflexão do pilar na direção  $y$  para a posição  $\bar{x}$  do elemento diferencial do peso – próprio  $dP$ ;  $v(H)$ ,  $v(0)$  – a deflexão do pilar para o topo e na base;  $H$  – a altura total do pilar;  $P$  – a carga vertical aplicada no topo do pilar (decorrente da reação de apoio da superestrutura);  $p$  – é o peso – próprio do pilar (constante se a seção transversal do pilar for invariável);  $q_1, q_2$  – as cargas laterais oriundas da ação do vento ao longo do pilar;  $Q$  – a carga lateral originária da atuação do vento na superestrutura; e  $\mathfrak{M}(x)$  – é a função do momento fletor ao longo do eixo longitudinal  $x$ .

As resultantes  $Q_{2a}$ ,  $Q_{2b}$  e  $Q_1$  dos carregamentos laterais  $q_1$  e  $q_2$ , são expressas por:

$$Q_{2a} = \frac{q_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{H}\right) \cdot (H-x) \quad (2a)$$

$$Q_{2b} = \frac{q_2}{H} \cdot x \cdot (H-x) \quad (2b)$$

$$Q_1 = q_1 \cdot (H-x) \quad (2c)$$

A expressão do momento fletor  $M(x)$  apresentado na equação (1) é válida para qualquer forma de variação do peso – próprio  $p(x)$ . Por outro lado, neste caso de seção transversal variável, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) = & - \int_x^H [v(\bar{x}) - v(x)]. p(x). d\bar{x} - [v(H) - v(x)]. P \\ & + (H - x). \left\{ \frac{q_1}{2}. (H - x) + q_2. \left[ \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.H} \right) + \left( \frac{H}{3} - \frac{2}{3}.x + \frac{x^2}{3.H} \right) \right] + Q \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

Utilizando na equação (1) a Teoria da Linha Elástica proposta por Navier e de acordo com a Hipótese de Bernoulli, que as seções transversais permanecem perpendiculares à linha elástica após a deformação por flexão, escreve-se:

$$E.I(x). v''(x) = \int_x^H p(x). [v(\bar{x}) - v(x)]. d\bar{x} + P. [v(H) - v(x)] + Q^*(x) \quad (4)$$

com:  $Q^*(x) = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$ ;  $A = \frac{q_2}{6.H}$ ;  $B = -\frac{q_1}{2}$ ;  $C = \left( q_1 - \frac{q_2}{2} \right). H + Q$ ;

$$D = -\left( \frac{3.q_1 - 2.q_2}{6} \right). H^2 - Q.H.$$

Na figura 3 explicita-se a mudança do intervalo de integração de  $x$  a  $H$  em relação ao eixo  $\bar{x}$  para o intervalo de 0 a  $H$  no eixo axial  $x$ .

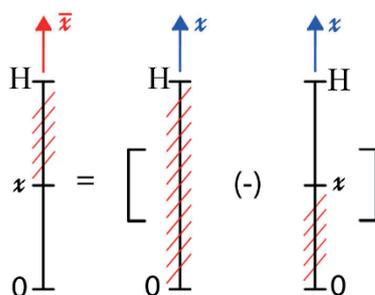


Figura 3. Mudança dos limites de integração e do referencial  $\bar{x}$  para  $x$ .

Pela transformação de referencial apresentada na figura 3, reescreve-se a equação (4), como:

$$\begin{aligned} E.I(x). v''(x) = & \int_0^H p(x). v(x). dx - \int_0^x p(x). v(x). dx - p(x). v(x). \int_x^H d\bar{x} \\ & + P. [v(H) - v(x)] + A.x^3 + B.x^2 + C.x + D \quad (5) \end{aligned}$$

A fim de remover as integrais da equação (5), procede-se com a derivação em relação ao eixo axial  $x$  de toda a equação, resultando:

$$-E \cdot \frac{d}{dx} [I(x) \cdot v''(x)] = p(x) \cdot v(x) + \frac{d}{dx} [p(x) \cdot v(x) \cdot (H - x)] + \frac{d}{dx} [P \cdot v(x)] + Q(x) \quad (6)$$

onde:  $Q(x) = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C$ ;

$$A_1 = -3 \cdot A = -\frac{q_2}{2 \cdot H}; \quad B_1 = -2 \cdot B = q_1; \quad \frac{d}{dx} [P \cdot v(H)] = P \cdot \frac{d}{dx} [v(H)] = 0;$$

$$\int_0^H p(x) \cdot v(x) dx = cte \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H p(x) \cdot v(x) dx \right] = 0 \quad e$$

$$\frac{d}{dx} [p(x) \cdot v(x) \cdot (H - x)] = [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) - p(x) \cdot v(x).$$

Após realizar a derivação da equação (6) expressa-se a equação diferencial ordinária (EDO) que rege a estabilidade elástica do pilar analisado. Sendo adotada a variação da seção transversal do pilar (conforme ilustração na figura 4), bem como o estado de carga e condições de contorno apresentados na figura 4.5. Resultando assim a EDO:

$$E \cdot [I'(x) \cdot v''(x) + I(x) \cdot v'''(x)] + [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) + P \cdot v'(x) = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C \quad (7)$$

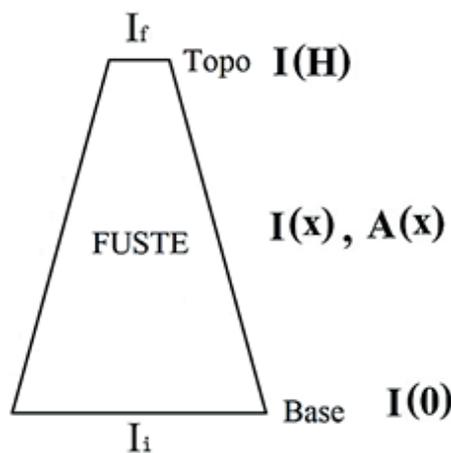


Figura 4. Pilar com seção variável

Ainda para o caso particular de seção transversal constante, tem-se:  $EI = cte, p = cte, p'(x) = 0, I'(x) = 0$  e reescreve-se a equação (7), para pilar do tipo ilustrado na figura 5, como:

$$E \cdot I \cdot v'''(x) + [p \cdot (H - x) + P] \cdot v'(x) = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C \quad (8)$$

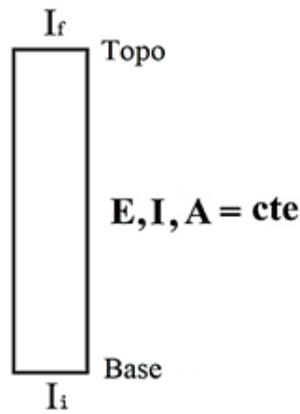


Figura 5. Pilar com seção transversal constante

## 2.2 Diferenças Finitas

Baseado em Soare (1962) e com o intuito de introduzir uma primeira maneira de transformar a equação diferencial que rege o problema analisado em sistema de equações algébricas, isto via o Método das Diferenças Finitas, procede-se para a ocorrência de função dependente unicamente de uma variável, vide figura 6. Através da curva de interpolação, verifica-se que é possível utilizar Funções de Lagrange.

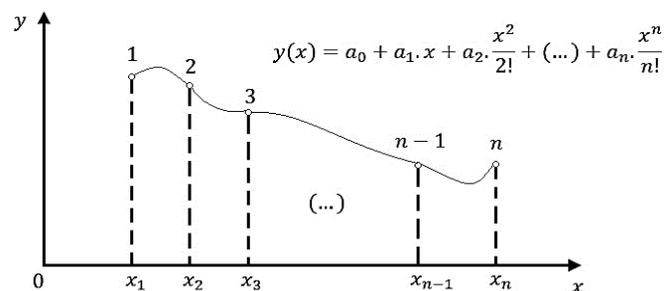


Figura 6. Interpolação polinomial para n graus de liberdade

As funções  $\varphi$  são caracterizadas através de aplicação unitária por ponto discretizado, baseando-se em Soare (1962) e Guelfond (1963), define-se a interpolação polinomial de grau  $n$  (Função de Lagrange).

$$y = \sum_{k=1}^{k=n+1} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{n+1})} \quad (9)$$

Para o método das diferenças finitas, procede-se a aplicação de curvas de interpolação de ordem igual ou superior a maior derivação presente na EDO. No caso em questão, utiliza-se curva de interpolação quártica com o ponto  $j$  (ponto de aplicação) e os quatro adjacentes. Configurando-se dois tipos, basicamente, de diferenças finitas: centrais e assimétrica à direita. A formulação clássica do método das diferenças finitas é postulada com polinômio de interpolação parabólica e para tal referencia-se Quarteroni

et al. (2007).

### a) Operadores de Diferenças Finitas Centrais

Ao considerar intervalos de igual comprimento e aplicar o caso particular do Método da Colocação para pontos no entorno do ponto  $j$ , tem-se a utilização de cinco pontos para o caso do polinômio interpolador de grau quártico, conforme é ilustrado na figura 7.

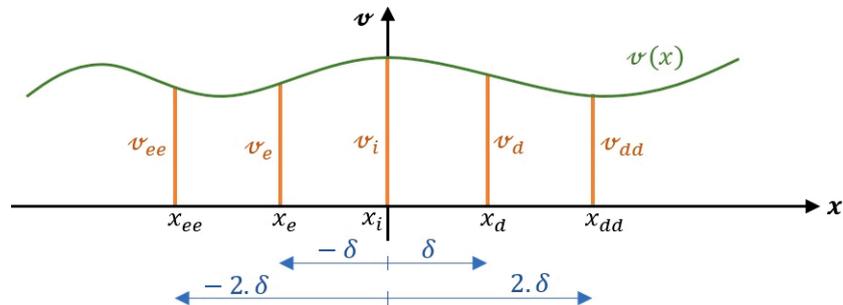


Figura 7. Polinômio de ordem quártica e os pontos de aplicação para diferenças finitas centrais

A função de interpolação  $v(x)$  apresentada na figura 7 é determinada mediante regra de Simpson, de formulação admitida em 1750 e citada em O'Hara e Ramming (2015), e expressa por:

$$v(x) = \alpha_a \cdot x^4 + \alpha_b \cdot x^3 + \alpha_c \cdot x^2 + \alpha_d \cdot x + \alpha_e \quad (10)$$

Após obter o polinômio  $v(x)$  expresso na equação (10) por meio da aplicação nos pontos, procedem-se as derivações até terceira ordem e caracteriza-se o ponto de aplicação centrado ( $j = 0$ ). Para tal aplicação, apresenta-se na figura 8 o ponto  $j$  e os vizinhos a distância relativa  $h$ .

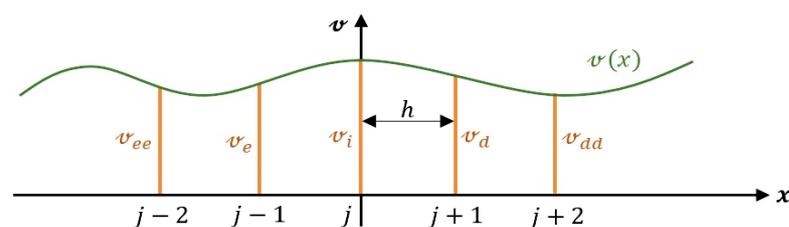


Figura 8. Ponto de aplicação para operadores de diferenças finitas centrais

Os operadores das derivadas, até ordem 3 para as diferenças finitas centradas, ficam expressos em termos dos pontos de vizinhança à esquerda ( $j - 2$ ) e ( $j - 1$ ), bem como à direita ( $j - 1$ ) e ( $j - 2$ ) e definidos por:

$$v_j' = \frac{1}{12 \cdot h} \{v_{j-2} - 8 \cdot v_{j-1} + 8 \cdot v_{j+1} - v_{j+2}\} \quad (11 a)$$

$$v_j'' = \frac{1}{12 \cdot h^2} \{-v_{j-2} + 16 \cdot v_{j-1} - 30 \cdot v_j + 16 \cdot v_{j+1} - v_{j+2}\} \quad (11 b)$$

$$v_j''' = \frac{1}{2 \cdot h^3} \{-v_{j-2} + 2 \cdot v_{j-1} - 2 \cdot v_{j+1} + v_{j+2}\} \quad (11 c)$$

Empregando os Operadores de Diferenças Finitas Centrais apresentados nas equações (11) na EDO (equação 8) do problema de ponto limite para o pilar com seção transversal constante e de base engastada e topo livre, escreve-se a lei de formação das equações algébricas para os pontos do domínio do pilar ( $2 \leq j \leq n + 1$ ), como:

$$\begin{aligned} \{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j-2} + \{2 \cdot T_1 - 8 \cdot T_{2j}\} \cdot v_{j-1} + \{-2 \cdot T_1 + 8 \cdot T_{2j}\} \cdot v_{j+1} + \{T_1 - T_{2j}\} \cdot v_{j+2} \\ = Q_j \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando os Operadores das derivadas para a EDO do problema de ponto limite válida para pilar de seção transversal variável, equação (7), escreve-se a lei de colocação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (T_{1a} + T_{2j}) \cdot v_{j-2} + (T_{1b} - 8 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j-1} + (T_{1c} + p_a) \cdot v_j + (T_{1d} + 8 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j+1} \\ + (T_{1e} - T_{2j}) \cdot v_{j+2} = Q_j \end{aligned} \quad (13)$$

onde:  $I_j, I_{j-1}, I_{j-2}, I_{j+1}, I_{j+2}$  são os momentos de inércia nos pontos de colocação;  $h$  é o intervalo de interpolação;  $v_{j-2}, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, v_{j+2}$  são as deflexões na direção  $y$  nos pontos do entorno de  $j$ ;  $Q_j$  é a carga horizontal no ponto de aplicação, sendo:  $Q_j = Q(x = x_j) = A_1 \cdot x_j^2 + B_1 \cdot x_j + c$  e  $x_j$  a coordenada  $x$  do ponto de colocação  $j$ .

$$\begin{aligned} \text{com: } T_{1a} &= -\frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 8 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} - \frac{E \cdot I_j}{2 \cdot h^3} - 8 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_{j+2}}{144 \cdot h^3}; \quad T_{2j} = \frac{[p \cdot (H - x_j) + P]}{12 \cdot h}; \\ T_{1b} &= 16 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 128 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} + 2 \cdot \frac{E \cdot I_j}{2 \cdot h^3} + 128 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} - 16 \cdot \frac{E \cdot I_{j+2}}{144 \cdot h^3}; \quad T_1 = \frac{E \cdot I}{2 \cdot h^3}; \\ T_{1c} &= -30 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 240 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} - 240 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} + 30 \cdot \frac{E \cdot I_{j+2}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1d} &= 16 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 128 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} - 2 \cdot \frac{E \cdot I_j}{2 \cdot h^3} + 128 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} - 16 \cdot \frac{E \cdot I_{j+2}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1e} &= -\frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 8 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_j}{2 \cdot h^3} - 8 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_{j+2}}{144 \cdot h^3} \quad e \\ p_a &= \frac{H - x_j}{12 \cdot h} \{p_{j-2} - 8 \cdot p_{j-1} + 8 \cdot p_{j+1} - p_{j+2}\}. \end{aligned}$$

### b) Operadores de Diferenças Finitas Assimétricas à Direita

Na figura 9 é apresentada a função interpoladora para a utilização do método das diferenças finitas com equacionamento assimétrico à direita. Assim, o ponto de aplicação  $j$  é posicionado a distância  $h$  da origem da abscissa. Restando apenas um ponto à frente da aplicação.

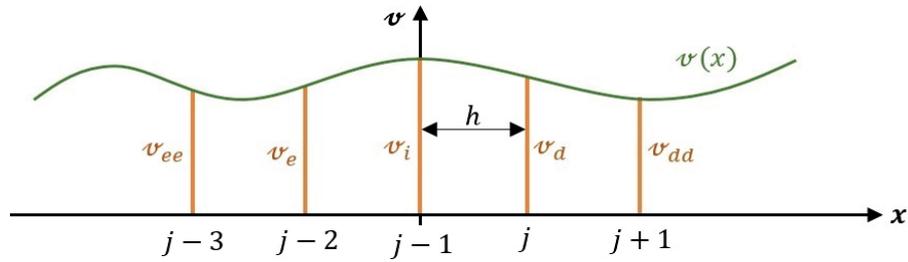


Figura 9. Ponto de aplicação para operadores de diferenças finitas assimétrica à direita

Baseado no exposto em Mancini (1973), os operadores de diferenças finitas assimétricas à direita ficam expressos por:

$$v_j' = \frac{1}{12 \cdot h} \{-v_{j-3} + 6 \cdot v_{j-2} - 18 \cdot v_{j-1} + 10 \cdot v_j + 3 \cdot v_{j+1}\} \quad (14 a)$$

$$v_j'' = \frac{1}{12 \cdot h^2} \{-v_{j-3} + 4 \cdot v_{j-2} + 6 \cdot v_{j-1} - 20 \cdot v_j + 11 \cdot v_{j+1}\} \quad (14 b)$$

$$v_j''' = \frac{1}{2 \cdot h^3} \{v_{j-3} - 6 \cdot v_{j-2} + 12 \cdot v_{j-1} - 10 \cdot v_j + 3 \cdot v_{j+1}\} \quad (14 c)$$

Analogamente ao procedido no item (a) desta subseção, expressam-se as leis de formação das equações algébricas (aplicável ao topo do pilar, no ponto  $j = n + 2$  apresentado na figura 10) para seção transversal constante e variável, respectivamente, tais como:

$$\begin{aligned} \{T_1 - T_{2j}\} \cdot v_{j-3} + 6 \cdot \{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j-2} + \{12 \cdot T_1 - 18 \cdot T_{2j}\} \cdot v_{j-1} \\ + 10 \cdot \{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_j + 3 \cdot \{T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j+1} = Q_j \end{aligned} \quad (15 a)$$

$$\begin{aligned} (T_{1aa} - T_{2j}) \cdot v_{j-3} + (T_{1bb} + 6 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j-2} + (T_{1cc} - 18 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j-1} \\ + (T_{1dd} + p_{aa} + 10 \cdot T_{2j}) \cdot v_j + (T_{1e} + 3 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j+1} = Q_j \end{aligned} \quad (15 b)$$

$$\begin{aligned} \text{com: } T_{1aa} &= \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} - 6 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 18 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{2 \cdot h^3} + 62 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} - 3 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1bb} &= -4 \cdot \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} + 24 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 72 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} - 392 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} + 12 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \end{aligned}$$

### c) Discretização

A discretização do pilar é realizada mediante pontos distantes da altura  $h$  e de numeração zero (0), localizado a dois pontos abaixo do engaste, enquanto na base engastada tem-se o ponto  $j = 2$ , e a numeração dos pontos é até o enésimo mais três pontos, este localizado acima do topo do pilar. Desta forma, aplica-se na base do pilar ( $j = 2$ ) a lei de aplicação com operadores de diferenças finitas centrais, ver equações (12) e (13), a depender da variação da seção transversal. As já mencionadas leis de aplicação

com diferenças finitas centrais também são aplicáveis aos pontos no domínio ( $j = 3$  até  $j = n + 1$ ), requerendo-se assim dois pontos além do ( $n + 1$ ), no caso até o ponto acima do topo ( $j = n + 3$ ). Por fim, no último ponto do domínio, o topo do pilar ( $j = n + 2$ ) aplica-se a lei de colocação com as diferenças finitas assimétricas à direita, pois estas necessitam apenas dos pontos já descritos. A resposta aproximada pelo Método das Diferenças Finitas será cada vez mais realística quanto mais próximos estejam os pontos da discretização, conseqüentemente,  $h$  será minorado. Vide figura 10.

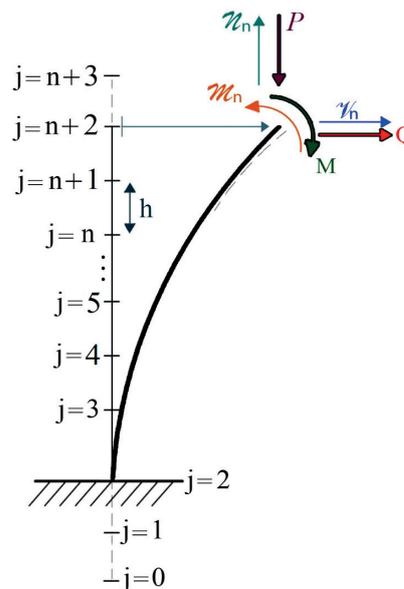


Figura 10. Discretização do Pilar via Diferenças Finitas

Para completar as equações do sistema de equações algébricas (em função da imposição dos três pontos fictícios), adicionam-se três equações extras, que são provenientes das condições de contorno, e expressas por:

$$v(x = 0) = 0 \quad \therefore \quad v_{(j=2)} = 0 \quad (16 a)$$

$$v'(x = 0) = 0 \quad \therefore \quad v'_{(j=2)} = 0 \quad (16 b)$$

$$\mathfrak{M}(x = H) = 0 \quad \therefore \quad v''_{(j=2)} = 0 \quad (16 c)$$

As condições de contorno, via operadores de diferenças finitas, ficam reescritas como:

$$M_{0,2} \cdot v_2 = q_0 \quad (17 a)$$

$$M_{1,0} \cdot v_0 + M_{1,1} \cdot v_1 + M_{1,3} \cdot v_3 + M_{1,4} \cdot v_4 = q_1 \quad (17 b)$$

$$M_{n+3,n-1} \cdot v_{n-1} + M_{n+3,n} \cdot v_n + M_{n+3,n+1} \cdot v_{n+1} + M_{n+3,n+2} \cdot v_{n+2} + M_{n+3,n+3} \cdot v_{n+3} = q_{n+3} \quad (17 c)$$

onde:  $M_{0,2} = M_{1,0} = 1$ ;  $M_{1,1} = -8$ ;  $M_{1,3} = 8$ ;  $M_{1,4} = -1$ ;  $M_{n+3,n-1} = -1$ ;  $M_{n+3,n} = 4$ ;  
 $M_{n+3,n+1} = 6$ ;  $M_{n+3,n+2} = -20$ ;  $M_{n+3,n+3} = 11$  e  $q_0 = q_1 = q_{n+3} = 0$ .

Resultando, por fim, a aplicação das equações (12), (13) e (15) na malha de discretização apresentada na figura 10, no seguinte sistema de equações algébricas:

$$[M] \cdot \{v\} = \{q\} \quad (18 a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & \dots & \\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0 & M_{2,3} & M_{2,4} & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & M_{n+2,n-1} & M_{n+2,n} & M_{n+2,n+1} & M_{n+2,n+2} & M_{n+2,n+3} \\ & & & & & & \dots & M_{n+3,n-1} & M_{n+3,n} & M_{n+3,n+1} & M_{n+3,n+2} & M_{n+3,n+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n+2} \\ v_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n+2} \\ q_{n+3} \end{Bmatrix} \quad (18 b)$$

sendo:  $\{v\}$  o vetor de incógnitas (deslocamentos transversais na direção y);  $[M]$  a matriz de coeficientes e  $\{q\}$  o vetor independente.

#### d) Determinação da carga crítica

A obtenção da carga crítica pode ser realizada via dois procedimentos: o primeiro com a resolução da EDO, eq. (7) ou eq. (8), não homogênea e em decorrência do problema de ponto limite (Curva 1 apresentada na figura 11), na qual procede-se o incremento da carga até a convergência. Para o segundo método referencia-se Chajes (1974, p. 110 – 115), o qual consiste em adotar a EDO homogênea (Curva 2 da figura 11), através da imposição de nulidade ao termo particularizante ( $Q_j = 0$ ). Nestes, com a devida transformação de equação diferencial em sistema algébrico, mediante imposição dos operadores de diferenças finitas, obtém-se a carga crítica  $P_{CR}$  via solução não trivial.

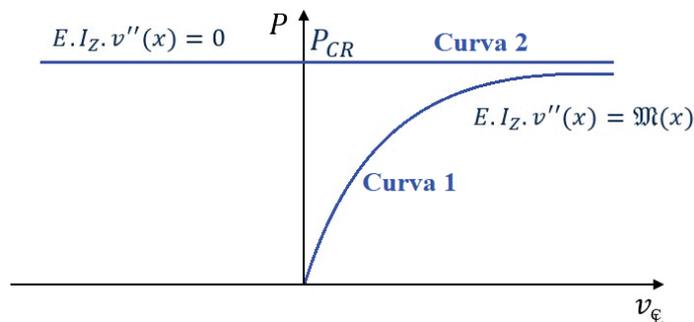


Figura 11. Obtenção da carga crítica por equação diferencial homogênea e problema de ponto limite

### 2.3 Inaplicabilidade da equação clássica de Bessel

Realiza-se a adimensionalização da EDO apresentada na equação (8) através da fórmula  $\xi = \frac{x}{h}$  e das transformações nas derivações relativas ao eixo longitudinal  $x$  para o eixo adimensional  $\xi$  mediante:  $v'(x) = H^{-1} \cdot v'(\xi)$ ;  $v''(x) = H^{-2} \cdot v''(\xi)$  e  $v'''(x) = H^{-3} \cdot v'''(\xi)$ . Resultando na EDO adimensionalizada expressa por:

$$v'''(\xi) + \left[ p \cdot (1 - \xi) + \frac{P}{H} \right] \cdot \frac{H^3}{EI} \cdot v'(\xi) = Q_c \quad (19)$$

$$\text{com: } Q_c = -\frac{Q \cdot H^3}{EI} + \frac{H^4}{EI} \cdot \left[ -\frac{q_2}{2} \cdot \xi^2 + q_1 \cdot \xi + \left( \frac{q_2}{2} - q_1 \right) \right].$$

Observa-se que a EDO adimensional apresentada na equação (19) está com derivação um grau superior a definição das Funções de Bessel. Desta forma, aplica-se a transformação  $y = v'$  e por condições de contorno:  $y(\xi = 0) = 0$  e  $y'(\xi = 0) = 0$ , reescreve-se:

$$y''(\xi) + \left[ p \cdot (1 - \xi) + \frac{P}{H} \right] \cdot \frac{H^3}{EI} \cdot y(\xi) = Q_c \quad (20)$$

Partindo da equação clássica de Bessel, ver Spiegel (1974, p. 101), resolvendo-se a parcela homogênea, obtém-se a carga de flambagem, sendo a referida equação canônica de Bessel:

$$x^2 \cdot y'' + (2 \cdot k + 1) \cdot x \cdot y' + (\alpha^2 \cdot x^{2 \cdot r} + \beta^2) \cdot y = 0 \quad (21)$$

Aplicando a mudança de variável  $x = (1 - \xi)$  na equação (20) e enquadrando-a na equação de Bessel, eq. (25), tem-se como solução homogênea expressa por:

$$y = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ D_1 \cdot J_{1/3} \cdot \left( \sqrt{\frac{p \cdot H^3}{EI}} \cdot x^{3/2} \right) + D_2 \cdot J_{-1/3} \cdot \left( \sqrt{\frac{p \cdot H^3}{EI}} \cdot x^{3/2} \right) \right] \quad (22)$$

$$\text{sendo: } P = 0; \quad \alpha = H \cdot \sqrt{\frac{p \cdot H}{EI}}; \quad k = -\frac{1}{2}; \quad k^* = \frac{1}{2}; \quad \beta = H \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}}; \quad r = \frac{3}{2}.$$

Verifica-se que a solução expressa na equação (22) é bastante laboriosa e que tal resolução via Bessel, nesta aplicação, é válida apenas para o caso particular de seção transversal ser constante e a carga no topo tida como nula. Tal implicação indicaria a inexistência do carregamento na superestrutura/vigas. No caso de pontes, equivale ao tabuleiro sem atuação dos veículos. Desta forma, como a solução apresentada na eq. (22) não contempla todos os casos possíveis de carregamento, conclui-se que é mais indicada a abordagem do problema através de Métodos Aproximados, a exemplo do Método das Diferenças Finitas.

### 3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

**EXEMPLO 1:** Nesta primeira aplicação será adotado o pilar metálico engastado na base e com extremidade livre no topo. Procedendo-se a análise da carga crítica para o pilar de ponte, sob configurações de seções transversais maciça e vazadas de formato retangular. O estado de carga será:  $q_1 = q_2 = 0 \text{ kN/m}$  e  $Q = 290 \text{ kN}$  como cargas laterais. Já o módulo de elasticidade vale  $E = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  e a altura do pilar é de 100 metros. Na figura 12 apresentam-se as configurações analisadas.

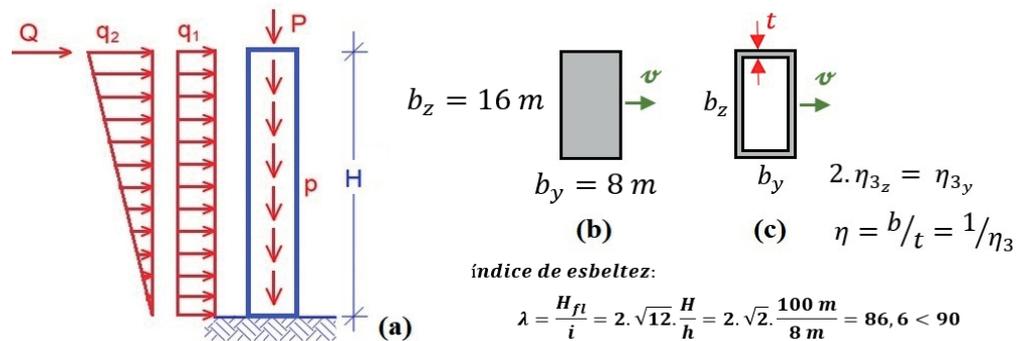


Figura 12. Configurações do pilar: (a) estado de carga, (b) seção retangular maciça e (c) seção retangular vazada em termos da espessura relativa via  $\eta$

Varia-se o valor do peso próprio  $p$  sob unidade “kN/m” e mantém-se inalterada a seção transversal, determinando-se a carga crítica via convergência do deslocamento no topo (vide figura 11). O processamento da EDO é realizado via método das diferenças finitas. Na tabela 1 são apresentadas as deflexões para a seção maciça (figura 12 b).

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )			
$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$	$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$
0	0,00067	$112,32 \times 10^4$	6,22664
10	0,00067	$112,33 \times 10^4$	39,08649
$100 \times 10^4$	0,00060	$112,331 \times 10^4$	82,76339
$110 \times 10^4$	0,03178	$112,3317 \times 10^4$	308,01060
$112 \times 10^4$	0,22317	$112,33188 \times 10^4$	4.970,34480
$112,2 \times 10^4$	0,56156	$112,33189 \times 10^4$	15.111,65985
$112,27 \times 10^4$	1,19664	$112,3318945 \times 10^4$	<b>184.024,58580</b>

Tabela 1. Deflexões em  $y$ , no topo do pilar retangular, por incremento em  $p$  até convergência

Na figura 13 é apresentada a curva de convergência da carga crítica para a seção maciça.

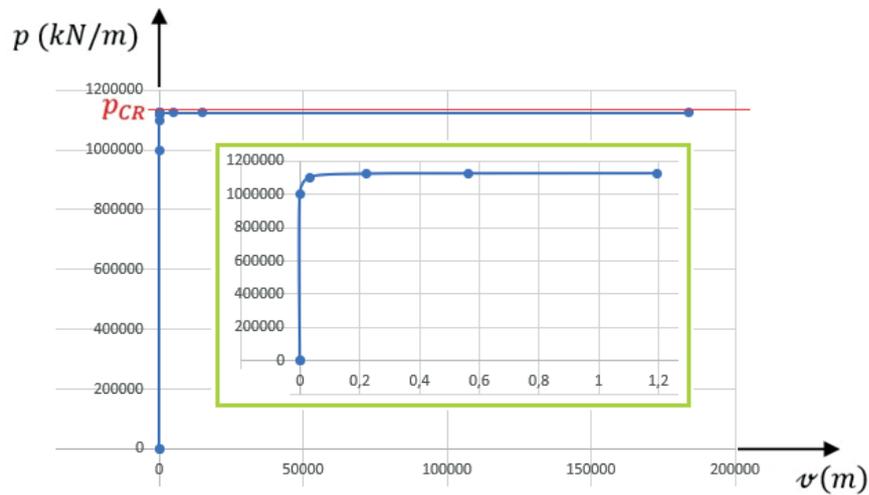


Figura 13. Curva de convergência de  $p_{CR}$  para pilar engastado na base e seção retangular maciça

A carga crítica obtida através da convergência na curva apresentada na figura 13 é  $p_{CR} = 112,3318945 \times 10^4$  kN/m. Mediante solução analítica apresentada em Timoshenko e Gere (2009) tem-se  $p_{CR} = 112,35123 \times 10^4$  kN/m caracterizando uma aproximação de 0,017 % a favor da segurança.

Nas tabelas 2 e 3 são apresentados os deslocamentos no topo do pilar com seção retangular vazada (ver figura 12 c), porém são simuladas quatro espessuras  $\tau$  relativas das paredes, via coeficiente  $\eta = \{5, 10, 15, 20\}$ . Na referida tabela apresentam-se também a carga crítica via Timoshenko e Gere (2009) e conseguinte percentual de aproximação.

<b>Diferenças Finitas com 100 pontos (<math>h = 1</math> m)</b>			
$\eta = 5$		$\eta = 10$	
$[10^5] p \left(\frac{kN}{m}\right)$	$v$ (m)	$[10^5] p \left(\frac{kN}{m}\right)$	$v$ (m)
<b>11,16</b>	0,38437	<b>9,29</b>	3,53645
<b>11,1757</b>	2,07456	<b>9,292</b>	78,50342
<b>11,1790</b>	27,41317	<b>9,29205</b>	167,01516
<b>11,1792</b>	105,53502	<b>9,29207</b>	304,21481
<b>11,17927</b>	40.995,52293	<b>9,292094</b>	21.390,73143
<b>11,17927015</b>	241.907,21360	<b>9,2920943</b>	160.345,53260
<b>11,17927018</b>	11.585.627,62397	<b>9,29209434</b>	1.197.181,06281
$p_{CR} = 11,18119 \times 10^5 \frac{kN}{m}$		$p_{CR} = 9,29369 \times 10^5 \frac{kN}{m}$	
<b>Via Timoshenko e Gere (2009)</b>		<b>Via Timoshenko e Gere (2009)</b>	
<b>0,017 % (a favor da segurança)</b>		<b>0,017 % (a favor da segurança)</b>	

Tabela 2. Deflexões em y, no topo do pilar, para seção retangular vazada para  $\eta = 5$  e  $\eta = 10$

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1\text{ m}$ )			
$\eta = 5$		$\eta = 10$	
$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$	$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$
7,392	4,06060	6,05	1,06790
7,3937	59,72808	6,0545	3,04075
7,39375	100,08278	6,0568	54,55065
7,39379	217,81425	6,05688	132,79715
7,39382	1.849,20169	6,056932	1.962,98015
7,393824	1.936.108,10456	6,0569355	27.118,06388
7,3938240035	25.369.692,40570	6,05693577	2.398.156,48192
$p_{CR} = 7,39509 \times 10^5 \frac{kN}{m}$		$p_{CR} = 6,05798 \times 10^5 \frac{kN}{m}$	
Via Timoshenko e Gere (2009)		Via Timoshenko e Gere (2009)	
0,017 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)	

Tabela 3. Deflexões em y no topo do pilar, com seção retangular vazada sob  $\eta = 15$  e  $\eta = 20$

$$\text{com: } I_z(x) = \frac{b_z \cdot b_y^3}{12} \cdot \left\{ 1 - \left[ (1 - 2 \cdot \eta_{3z}) \cdot (1 - 2 \cdot \eta_{3y})^3 \right] \right\}; \quad b_z = 2 \cdot b_y; \quad \eta_{3z} = \frac{t}{b_z}; \quad \eta_{3y} = \frac{t}{b_y}.$$

Na figura 14 apresentam-se as curvas de convergência da carga crítica em forma comparativa, para os quatro cenários de espessura relativa das paredes.

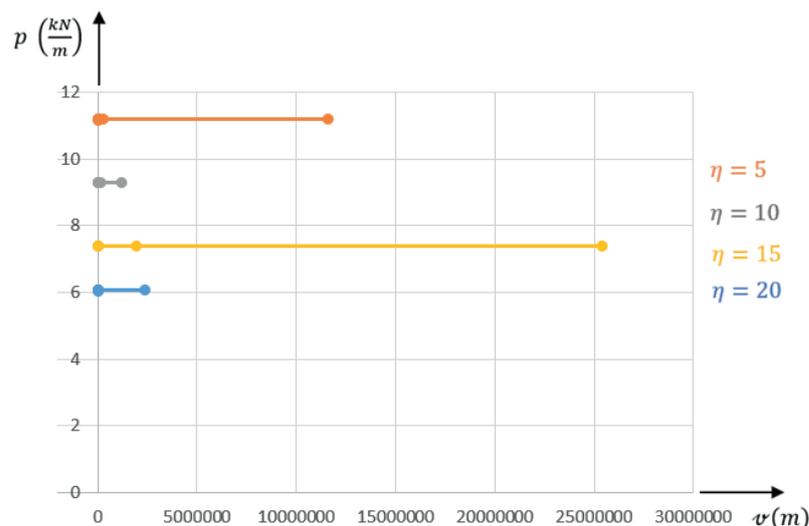


Figura 14. Curvas de convergência de  $p$  para pilar engastado na base e seção retangular vazada com espessura relativa das paredes

**EXEMPLO 2:** Nesta segunda análise admite-se o pilar com seção transversal circular vazada e contida na equivalência do retângulo do exemplo 1, vide figura 15. Sendo o

estado de carga:  $q_1 = 2\text{kN/m}$ ,  $q_2 = 3\text{kN/m}$ ,  $Q = 10\text{kN}$  e  $P = 0\text{kN}$ . O material utilizado será o aço, assim tem-se como módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Adota-se a altura do pilar de 100 metros. Busca-se neste exemplo a mera aplicação das equações (7) e (8) resolvidas mediante diferenças finitas (ver item 2.2), daí a não verificação do índice de esbeltez inferior a 90, sendo esse o critério para a estrutura funcionar no campo das pequenas deformações, isso segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014).

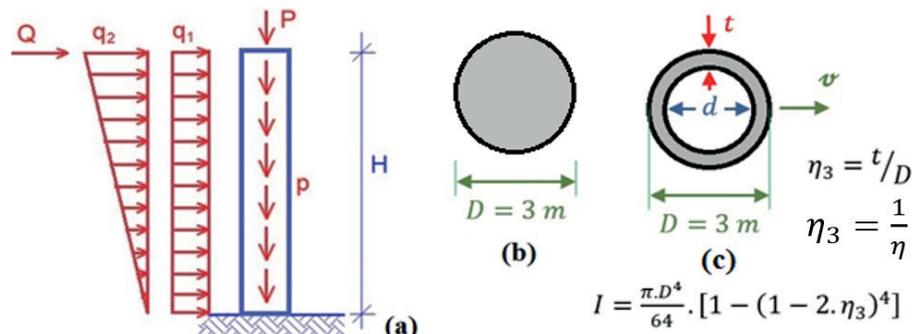


Figura 15. Geometria do pilar de seção circular vazada e constante na altura: (a) estado de carga, (b) seção transversal maciça e (c) seção anelar

Na tabela 4 são apresentados os deslocamentos no topo do pilar para quatro espessuras relativas das paredes, bem como carga crítica por convergência e pelo cálculo analítico presente em Timoshenko e Gere (2009) e análise da aproximação. Ver figura 15 (c).

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )							
$\eta = 5$		$\eta = 10$		$\eta = 15$		$\eta = 20$	
$p \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)$	$v \text{ (m)}$	$p \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)$	$v \text{ (m)}$	$p \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)$	$v \text{ (m)}$	$p \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)$	$v \text{ (m)}$
5.500	0,03553	3.500	0,01898	2.800	0,13454	2.220	0,23094
5.600	0,07316	3.800	0,11038	2.840	0,60447	2.230	0,34657
5.660	0,19994	3.860	2,522919	2.845	1,07189	2.245	1,38812
5.690	1,48634	3.862	9,35073	2.850,500	7,16265	2.249	6,97158
5.692	2,60183	3.862,50	28,70482	2.850,800	10,37901	2.249,60	17,57173
5.693	4,16447	3.862,55	36,19672	2.851,400	101,82416	2.249,80	35,62892
5.694	10,42619	3.862,70	166,79780	2.851,450	383,08885	2.249,95	155,38855
5.694,66	1.363,99757	3.862,74	4.407,26714	2.851,465	2.236,58360	2.249,99	1.499,04343
$p_{CR} = 5.694,66 \text{ kN/m}$		$p_{CR} = 3.862,74 \text{ kN/m}$		$p_{CR} = 2.851,46 \text{ kN/m}$		$p_{CR} = 2.249,99 \text{ kN/m}$	
Via convergência		Via convergência		Via convergência		Via convergência	
$p_{CR} = 5.695,64 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$		$p_{CR} = 3.863,41 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$		$p_{CR} = 2.851,96 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$		$p_{CR} = 2.250,38 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	
Timoshenko e Gere (2009)		Timoshenko e Gere (2009)		Timoshenko e Gere (2009)		Timoshenko e Gere (2009)	
$I_z = 3,461 \text{ m}^4$		$I_z = 2,347 \text{ m}^4$		$I_z = 1,733 \text{ m}^4$		$I_z = 1,367 \text{ m}^4$	
0,017 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)		0,018 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)	

Tabela 4. Deflexões em y, no topo do pilar, para seção circular vazada (anelar)

Na figura 16 é apresentada a plotagem comparativa das curvas (carga x deformação), isso em detrimento da espessura relativa da seção circular vazada.

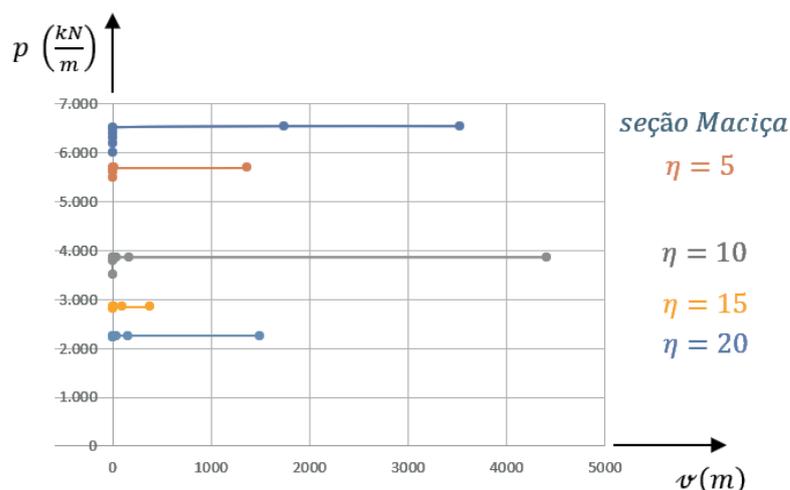


Figura 16. Curvas de convergência de  $p_{CR}$  para pilar engastado na base e seção circular maciça e vazada com espessura relativa das paredes

Enquanto, na tabela 5 apresenta-se a convergência dos deslocamentos no topo do pilar para seção transversal circular maciça. Para tal, a inércia vale:  $I_z = 3,976\text{m}^4$ . Ver figura 15 (b).

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1\text{ m}$ )				
$p\text{ (kN/m)}$	$v\text{ (m)}$	$p\text{ (kN/m)}$	$v\text{ (m)}$	
6.000	0,01270	6.500	0,16276	$p_{CR} = 6.542,58\text{ kN/m}$ Via convergência
6.200	0,20160	6.520	0,3069	$p_{CR} = 6.543,71\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ Via Timoshenko e Gere (2009)
6.300	0,02850	6.542,580	1.748,54162	
6.400	0,04855	6.542,582	3.527,44185	0,017 % (a favor da segurança)

Tabela 5. Deflexões em  $y$ , no topo do pilar circular, por incremento em  $p$  até convergência

**EXEMPLO 3:** Admite-se o pilar analisado no exemplo 1 e sob mesmo estado de carga, material e altura. A única exceção é considera-lo de seção retangular variável linearmente na altura, sendo as dimensões na base:  $b_y = 10\text{ m}$  e  $b_z = 30\text{ m}$ . Já, para o topo adota-se:  $h_y = 4\text{ m}$  e  $h_z = 12\text{ m}$ . Vide figura 17. Proceda-se neste último exemplo a mera aplicação das equações de obtenção da carga crítica, sem almejar verificações quanto ao índice de esbeltez.

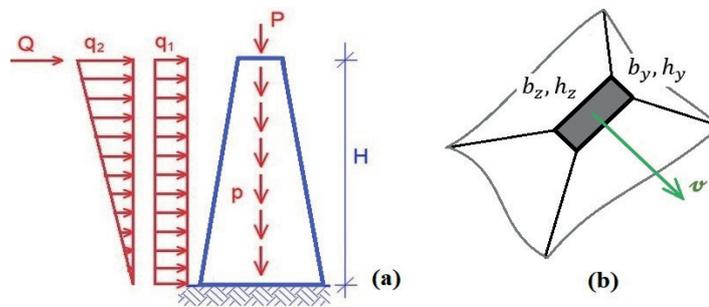


Figura 17. Pilar retangular maciço: (a) estado de carga e (b) perspectiva

Na tabela 6 apresentam-se os deslocamentos no topo do pilar, isso mediante incremento no peso específico y do material em  $\text{kN/m}^3$ .

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )						
$\gamma [10^4]$	$p_{base} [10^6]$	$\nu \text{ (m)}$	$\gamma [10^4]$	$p_{base} [10^6]$	$\nu \text{ (m)}$	
0	0	0,01732	1,458	4,374	21,08928	$p_{CR} = 4,377 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
1,3	3,9	0,15462	1,459	4,377	150,33863	Via convergência
1,4	4,2	0,41511	1,4591	4,377	388,35275	
1,45	4,35	2,67749	1,45915	4,37745	1.863,45913	$p_{CR} = 3,977 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
1,451	4,353	3,00543	1,45916	4,37748	7.753,89744	Timoshenko e Gere (2009)
1,454	4,362	4,75141	1,459162	4,377486	21.082,09253	10,06 % (contra a
1,457	4,371	11,34023	1,4591625	4,3774875	36.968,35366	segurança)

Tabela 5. Deflexão y, para a seção retangular maciça e variável linearmente, com p em  $\text{kN/m}$

A carga crítica por convergência é  $p_{CR} = 4,37749 \times 10^6 \text{ kN/m}$ , já via Timoshenko e Gere (2009, pag. 128) e sob interpolação no programa Cálculo Numérico V5 (versão livre), tem-se:  $p_{CR} = 3,977 \times 10^6 \text{ kN/m}$ . verifica-se aproximação de 10,06 % contra a segurança.

#### 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A obtenção da equação diferencial que rege os efeitos de 2ª ordem do pilar submetido a carregamentos verticais devido ao peso – próprio e a reação de apoio da superestrutura foi obtida neste artigo de maneira prática pela Técnica do Meio Contínuo. Tal formulação é apresentada para seção transversal variável ao longo do eixo longitudinal x, bem como para o caso particular de seção constante. Na resolução da EDO em termo dos deslocamentos v no topo do pilar e na direção y, obtém-se de forma rápida a carga de flambagem via discretização do Meio Contínuo pelo Método das Diferenças Finitas.

Na determinação da carga crítica são analisados pilares de seção constante ou variável e com altura já mencionada e com seção transversal sob as seguintes configurações:

retangular, circular (maciças), tubular e anelar com paredes de espessura  $t$  relativa as demais dimensões. Além das seções transversais constantes ao longo do eixo axial do pilar (as seções anteriormente listadas), procede-se a determinação da carga crítica para seção transversal em formato retangular e linearmente variável na altura. A curva de convergência da carga crítica é obtida mediante discretização da EDO do problema de estabilidade, utilizando-se o método das diferenças finitas (MDF) com polinômio de interpolação quártica.

Por fim, comparam-se tais resultados em três aplicações de casos particulares com resolução analítica apresentada na literatura especializada. E ainda, discute-se a ineficácia operacional da solução mediante Equação Clássica de Bessel.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

CHAJES, A. **Principles of structural stability theory**. New York: Prentice Hall, 1974.

GUELFOND, A.O. **Calcul des differences finies**. Paris: Dunod, 1963.

GUTKOWSKI, R.M. **Structures – fundamental theory and behavior**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1981.

MANCINI, E. **Análise continua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento**. 1973. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1973.

O'HARA, S.; RAMMING, C.H. **Numerical structural analysis**. New York: Momentum, 2015.

QUARTERONI, A. et al. **Méthodes numériques: Algorithmes, analyse et applications**. Milan: Springer, 2007.

SOARE, M. **Application des équations aux differences finies au calcul des conques**. Paris; Éditions Eyrolles, 1962. p. 73 – 82.

SPIEGEL, M.R. **Schaum's outline of theory and problems of analysis**. New York: McGRAW-HILL, 1974. p. 101.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. **Theory of elastic stability**. Second edition. New York: Dover Edition, 2009.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aderência 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 17, 18, 20, 42, 183, 276

Adições Minerais 38, 39, 49, 51, 55, 67, 81, 82, 90, 94

Aditivo 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 32, 33, 45, 46, 47, 74, 83, 105, 107, 108, 110, 112, 113, 114, 116, 119, 120, 125, 126, 127

Aditivo Plastificante 114, 116, 119, 120

Areia de Brita 13, 14, 16

Argamassas 3, 4, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 97, 105, 106, 107, 108, 109, 112, 113, 114, 116, 117, 119, 120, 126, 127, 130, 139, 206, 210

Argamassas Estabilizadas 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 25, 27, 28, 105, 106, 112, 113

Arquitetura 30, 31

### C

Cal Hidratada 1, 5, 10

Chapisco 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Cisalhamento Direto 128, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142

Colorido 30, 31, 32, 36, 37

Compósitos Cimentícios 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 79

Concreto 3, 12, 13, 15, 18, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 72, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 102, 103, 104, 113, 115, 116, 123, 127, 143, 144, 145, 146, 148, 149, 157, 158, 160, 161, 162, 163, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 204, 210, 211, 214, 217, 220, 221, 222, 223, 224, 227, 231, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 245, 250, 251, 252, 253, 255, 256, 257, 267, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 296, 298, 299, 303, 304

Corrosão 38, 40, 42, 49, 50, 51, 53, 54, 66, 67, 303

### D

Detergente Doméstico 114, 116, 119, 125, 127

### E

EPS 128, 129, 130, 131, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 277

Escoramento 159, 160, 161, 162, 163, 168, 169

## F

Fibras de Celulose 68, 71, 73, 78

## G

Geossintéticos 128, 140, 141

## I

Interação 55, 75, 76, 139, 143, 220, 250

Íon Cloreto 39, 42

## L

Laje Pré-Moldada 159, 166, 168

## M

Manifestações Patológicas 15, 51, 53, 223, 225, 226, 235, 301, 302, 303, 304

Metacaulim 11, 12, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 64, 65, 66, 67

Método dos Elementos Finitos 143, 144

Migração de Íons 39, 43, 45

Módulo de Elasticidade 81, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 164, 198, 201, 207, 210, 211, 214, 217, 218, 239, 242, 276, 289

## P

Patologias 39, 97, 222, 223, 234, 252

Permeabilidade 13, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 27, 28, 39, 40, 51, 65, 66, 112, 125, 306

Poliestireno Expandido 128, 129, 137, 138, 140, 141

Procedimento 11, 37, 49, 93, 105, 108, 132, 157, 165, 172, 174, 175, 185, 204, 211, 226, 229, 284, 292, 295, 304

Programa Computacional 61, 143

## R

Reforço 11, 50, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 129, 232, 233, 236, 251, 252, 253, 255, 256, 257, 259, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 272, 285, 288, 289, 304, 305

Rigidez à Torção 143, 144, 146, 148, 154, 155, 157

Rigidez Experimental 159, 167, 168

## S

Sílica 12, 32, 33, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 56, 81, 82, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 91, 92, 93

Sílica Ativa 32, 33, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 81, 82, 83, 84, 85, 89, 90, 92, 93  
Solos 128, 129, 130, 133, 134, 135, 136, 137, 142, 305, 306

 **Atena**  
Editora

**2 0 2 0**