

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS  
(ORGANIZADOR)



# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS  
(ORGANIZADOR)



2020 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2020 Os autores  
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora  
**Editora Chefe:** Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Edição de Arte:** Luiza Batista  
**Revisão:** Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais. Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

#### **Editora Chefe**

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira

#### **Bibliotecário**

Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

#### **Conselho Editorial**

##### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí  
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

#### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

#### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Prof<sup>a</sup> Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof<sup>a</sup> Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Prof<sup>a</sup> Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Prof<sup>a</sup> Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Prof<sup>a</sup> Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Prof<sup>a</sup> Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>a</sup> Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ

Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás

Prof. Me. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe

Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados

Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná

Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos

Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior

Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará

Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados

Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal

Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão

Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo

Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana

Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo

Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

## Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecário:** Maurício Amormino Júnior  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Edição de Arte:** Luiza Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizador:** José Elyton Batista dos Santos

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I62      Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática  
[recurso eletrônico] / Organizador José Elyton Batista dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF  
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader  
Modo de acesso: World Wide Web  
Inclui bibliografia  
ISBN 978-65-5706-175-6  
DOI 10.22533/at.ed.756201607

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino.  
3. Professores de matemática – Formação. I. Santos, José Elyton Batista dos.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**  
Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
Telefone: +55 (42) 3323-5493  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A coletânea “Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática” é uma obra composta por 27 artigos que tem como foco principal a difusão de conhecimentos na dimensão matemática perante a uma diversidade de trabalhos. O livro apresenta produções científicas do âmbito nacional e internacional em formato de relatos de casos, estudos bibliográficos e experimentais com temáticas relevantes para a comunidade científica, para professores em exercício e aos que estão aperfeiçoando seus conhecimentos acerca do que está sendo pesquisado, debatido e proposto no ensino da educação básica, bem como no ensino superior.

A relevância da matemática nos diferentes níveis educacionais é imensurável. Em todo canto e em toda situação a matemática está presente. Perante esse contexto, esta obra fomenta as pesquisas na área da educação matemática, dissemina os conhecimentos científicos a partir das diferentes visões teóricas e estudos contemplados pela referida área, a saber: etnomatemática, tecnologias, recursos didáticos, formação de professores e modelagem matemática. Também se insere nessa dimensão da difusão do conhecimento, as propostas interdisciplinares e conteudista para a educação básica e ensino superior, que visa primordialmente a aprendizagem com qualidade e de acordo com as exigências da sociedade contemporânea, isto é, um ensino próximo ao contexto do aluno.

Debruçar nessa coletânea permite ao leitor se aventurar por diferentes conhecimentos científicos. Ampliará seus conhecimentos teóricos, bem como, enriquecerá sua prática docente a partir dos relatos com materiais concretos, tecnológicos e problemas contextualizados. Todavia, desejo que esta obra contribua significativamente não apenas para o enriquecimento teórico e prático, mas como meio motivador para novas investigações e conseqüentemente para a difusão do conhecimento científico matemático.

José Elyton Batista dos Santos

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
A CIÊNCIA É RACIONAL? TENTATIVA DE RESPOSTA EM PAUL FEYERABEND E EDGAR MORIN	
Deise Leandra Fontana Ettiène Cordeiro Guérios	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016071</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>11</b>
A MATEMÁTICA COMO MEIO DE COMPREENSÃO E TRANSFORMAÇÃO DO MUNDO	
Andreza dos Santos Silva Brito Eloá de Fátima Velho Godinho Peixer Eliani Aparecida Busnardo Buemo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016072</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>20</b>
O ENSINO DAS CAPACIDADES ESPACIAIS COMO POSSIBILIDADES PARA A FORMAÇÃO NA DOCÊNCIA	
Leila Pessôa Da Costa Regina Maria Pavanello Sandra Regina D'Antonio Verrengia	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016073</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>31</b>
OS IMPACTOS DOS RECURSOS DIDÁTICOS NA FORMAÇÃO DOCENTE NO PROGRAMA GESTAR MATEMÁTICA	
Sheyla Silva Thé Freitas Valmiro de Santiago Lima	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016074</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>41</b>
OS NÚMEROS E AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS ELEMENTARES: DO CONHECIMENTO DOCENTE E DAS PRÁTICAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS DESENVOLVIDAS	
Leila Pessôa Da Costa Regina Maria Pavanello	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016075</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>49</b>
CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E PARA O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE	
Silvana Cocco Dalvi Oscar Luiz Teixeira de Rezende Mirelly Katiene e Silva Boone Luciano Lessa Lorenzoni Agostinho Zanuncio Andressa Coco Lozório Ana Elisa Tomaz	
<b>DOI 10.22533/at.ed.7562016076</b>	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>62</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A VACINAÇÃO CONTRA O SARAMPO	
Nathalia Kathleen Santana Reyes Douglas Souza de Albuquerque Thaís Madruga de Oliveira Mendonça	

Josiane da Silva Cordeiro Coelho

Claudia Mazza Dias

DOI 10.22533/at.ed.7562016077

**CAPÍTULO 8 ..... 69**

A MODELAGEM MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM FUTUROS PROFESSORES DA UNEMAT: APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA DE UMA VARIÁVEL REAL

Polyanna Possani da Costa Petry

Kátia Maria de Medeiros

Raul Abreu de Assis

DOI 10.22533/at.ed.7562016078

**CAPÍTULO 9 ..... 81**

CONTEXTUALIZANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA EXPERIÊNCIA ANCORADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Rudinei Alves dos Santos

Vanessa Pires Santos Maduro

Verônica Solimar dos Santos

Gilbson Santos Soares

Adriana Oliveira dos Santos Siqueira

DOI 10.22533/at.ed.7562016079

**CAPÍTULO 10 ..... 95**

A IMPORTÂNCIA DO SENTIDO DO SABER: A MATEMÁTICA PRESENTE NA ATIVIDADE PESQUEIRA NO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS

Lucivaldo Vieira Pinheiro

DOI 10.22533/at.ed.75620160710

**CAPÍTULO 11 ..... 105**

ANÁLISE DOS MÉTODOS DE CUBAGEM NA ZONA DA MATA DO ESTADO DE RONDÔNIA

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

DOI 10.22533/at.ed.75620160711

**CAPÍTULO 12 ..... 115**

A PORCENTAGEM E OS PESCADORES DO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS-PARÁ

Lucivaldo Vieira Pinheiro

Sandro Benício Goulart Castro

DOI 10.22533/at.ed.75620160712

**CAPÍTULO 13 ..... 126**

UMA NOVA ABORDAGEM DE RESIDÊNCIA INTELIGENTE BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA INSERIDA EM UMA REDE NEBULOSA

Suelio Lima de Alencar

Orlando Donato Rocha Filho

Danúbia Soares Pires

Lorena Maria Figueiredo Albuquerque

DOI 10.22533/at.ed.75620160713

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>132</b>
DINÂMICA DO HIV COM TERAPIA ANTIRRETROVIRAL VIA EXTENSÃO FUZZY BIDIMENSIONAL DE ZADEH	
Kassandra Elena Inoñan Alfaro	
Ana Maria Amarillo Bertone	
Rosana Sueli da Motta Jafelice	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160714</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>148</b>
ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA IMUNOTERAPIA	
Marcelo Oliveira Esteves	
Pedro Nascimento Martins	
Ana Carolina Delgado Malvaccini Mendes	
Sarah Rachid Ozório	
Maria Zilda Carvalho Diniz	
Valeria Mattos da Rosa	
Flaviana Andrea Ribeiro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160715</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>155</b>
ANÁLISE DA DEFLEXÃO DE UMA VIGA APOIADA-ENGASTADA	
Mariana Coelho Portilho Bernardi	
Adilandri Mércio Lobeiro	
Rogério Zolin Bertechini	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160716</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>160</b>
ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	
Felipe Klein Genz	
Odair Menuzzi	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160717</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>163</b>
DIFUSÃO DE INOVAÇÕES: ANÁLISE DE UMA ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS	
Cassio Cristiano Giordano	
Douglas Borreio Maciel dos Santos	
Eliana Calixto Santos	
Jailma Ferreira Guimarães	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160718</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>178</b>
PRÁTICAS TEATRAIS COMO ORGANIZADOR DIDÁTICO-PEDAGÓGICO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO	
Rizaldo da Silva Pereira	
Arthur Gonçalves Machado Júnior	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160719</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>187</b>
A PESQUISA ESTATÍSTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA VYGOTSKYANA	
Celia Alves Pereira	
Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha	
Leonardo Sturion	
<b>DOI 10.22533/at.ed.75620160720</b>	

**CAPÍTULO 21 ..... 199**

O BICENTENÁRIO GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903)

Liliane Silva Nascimento Coelho

Ana Paula Nunes Felix

Miguel Chaquiam

**DOI 10.22533/at.ed.75620160721**

**CAPÍTULO 22 ..... 210**

DISCUSSÃO E ANÁLISE: UM PASSEIO NA LÓGICA LPA2v, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Clewton Rodrigues Rúbio

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

**DOI 10.22533/at.ed.75620160722**

**CAPÍTULO 23 ..... 217**

COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER E HEUN NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM PROVENIENTES DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA QUÍMICA

Anne Karolyne Maia Vieira

Matheus da Silva Menezes

**DOI 10.22533/at.ed.75620160723**

**CAPÍTULO 24 ..... 233**

A NUMERICAL APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF FREDHOLM FUNCTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS BY CHEBYSHEV TAU METHOD

Juarez dos Santos Azevedo

Suzete Maria Silva Afonso

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Adson Mota Rocha

**DOI 10.22533/at.ed.75620160724**

**CAPÍTULO 25 ..... 245**

REALCE DA IMAGEM COM PRESERVAÇÃO DO BRILHO MÉDIO BASADA NA TRANSFORMADA TOP-HAT MULTI-ESCALA

Julio César Mello Román

Horacio Legal-Ayala

José Luis Vázquez Noguera

Diego P. Pinto-Roa

**DOI 10.22533/at.ed.75620160725**

**CAPÍTULO 26 ..... 253**

EXTENSÃO VIA E-OPERADOR DE IMPLICAÇÕES FUZZY VALORADAS EM RETICULADO

Mariana Rosas Ribeiro

Eduardo Silva Palmeira

Wendy Díaz Veldés

Giovanny Snaider Barrera Ramos

**DOI 10.22533/at.ed.75620160726**

**CAPÍTULO 27 ..... 258**

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: UMA DISCUSSÃO ACERCA DO POTENCIAL DE UMA PROVA ESCRITA EM FASES E INTERVENÇÕES ESCRITAS

Celia Alves Pereira

Marcele Tavares Mendes

Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha

**DOI 10.22533/at.ed.75620160727**

**SOBRE O ORGANIZADOR..... 270**

**ÍNDICE REMISSIVO ..... 271**

## COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER E HEUN NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM PROVENIENTES DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA QUÍMICA

*Data de aceite: 05/06/2020*

*Data da submissão: 04/04/2020*

**Anne Karolyne Maia Vieira**

Universidade Federal Rural do Semiárido

Mossoró – Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/5933851972088367>

**Matheus da Silva Menezes**

Universidade Federal Rural do Semiárido

Mossoró – Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/7790866637385232>

**RESUMO:** A eficiência de um método numérico na resolução de uma equação diferencial varia em funções de vários fatores, como precisão, tempo de processamento, capacidade da máquina, tipo de problema, entre outros. Portanto, a análise dessa eficiência é bastante complexa. A análise desse trabalho se concentrará em um problema de valor inicial de primeira ordem, onde serão revisados métodos e técnicas já consolidadas pela literatura, como o método de Euler, que se trata de um método direto e considerado elementar para resolução de EDO's; e o método de Heun, que pode ser analisado de forma direta ou iterativa. Tais análises serão feitas a partir de aplicações

comparativas, em que serão aplicados em dois estudos de caso da Engenharia Química, e serão analisados indicadores de rapidez e precisão de cada método.

**PALAVRAS-CHAVE:** Métodos Numéricos; Equações Diferenciais; Análises Numéricas.

COMPARISON BETWEEN EULER AND HEUN'S NUMERICAL METHODS IN RESOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER FROM APPLICATION IN CHEMICAL ENGINEERING

**ABSTRACT:** The efficiency of a numerical method in solving a differential equation varies in function of several factors, such as accuracy, processing time, machine capacity, type of problem, among others. Therefore, the analysis of this efficiency is quite complex. The analysis of this work will focus on a first-order initial value problem, where methods and techniques already consolidated in the literature will be reviewed, such as the Euler method, which is a direct method and considered elementary for solving ODE's; and Heun's method, which can be analyzed directly or iteratively. Such analyzes will be made from comparative applications, in which they will be applied in two case studies of

Chemical Engineering, and indicators of speed and precision of each method will be analyzed.

**KEYWORDS:** Numerical methods; Differential Equations; Numerical Analysis.

## 1 | INTRODUÇÃO

Muitos problemas fundamentais da engenharia são dados em termos de variações espaciais e temporais, e definem mecanismos de variação [4]. A abordagem de tais problemas é feita através de Equações Diferenciais, que envolve uma função desconhecida e suas derivadas. Processos químicos, fenômenos de transporte, e transferência de calor e massa são exemplos de tais fenômenos, presentes na engenharia química.

Em problemas envolvendo misturas químicas é bastante comum encontrarmos equações diferenciais lineares de primeira ordem. As misturas são constituídas por duas ou mais substâncias, sendo estas simples ou compostas, onde suas propriedades vão variar de acordo com a proporção de seus componentes e essas proporções podem ser alteradas por processos químicos [4].

Uma equação diferencial é dita ordinária (EDO) quando as derivadas da equação pertencem a uma única variável, caso contrário, se trata de uma equação diferencial parcial (EDP). Há também a classificação quanto ao índice, ou ordem, da derivada presente na equação. Sendo assim, de acordo com [2], uma ED pode ser de ordem  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

A resolução de uma equação diferencial implica em uma família de curvas, chama-se de solução geral. Porém, na maioria dos problemas, é necessário especificar uma curva para descrever o fenômeno apresentado. Segundo [10], se existir condições cujo número coincide com a ordem da EDO, tem-se um problema de valor inicial – PVI, onde a solução geral se reduz a uma solução particular, baseada nas condições apresentadas.

A determinação dessas soluções é um dos grandes desafios da ciência. Para esse fim, há vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, contudo nem sempre é possível obter a solução analítica de uma EDO, neste caso, os métodos numéricos são a saída para se encontrar uma solução aproximada [2]. Outro desafio é obter uma solução numérica que se encaixam dentro de limites razoáveis, com o mínimo de erro possível. A análise desse erro, assim como apresentação de melhorias é o campo de estudo do presente trabalho.

## 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Equações diferenciais

A fim de gerar uma melhor compreensão acerca dos estudos desenvolvidos neste trabalho, será apresentado um breve resumo da teoria fundamental relacionada as equações diferenciais. As demonstrações dos teoremas mais gerais fogem do escopo do

presente trabalho e serão omitidas em seu texto, podendo ser vistas na bibliografia básica dos cursos de equações diferenciais. Para iniciar-se o estudo, faz-se necessário entender as classificações de uma equação diferencial. Entre outros autores, [4] vem mostrar que:

**Definição 2.1** *Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ED).*

Tais equações, podem ser classificadas por tipo, ordem e linearidade. Quanto ao tipo, podem ser ordinárias ou parciais, onde a equação que apresenta derivadas com relação a uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Entretanto, se a equação apresenta derivadas com relação a duas ou mais variáveis independentes é denominada de equação diferencial parcial (EDP). A classificação por ordem, corresponde a derivada de maior ordem na equação. Quanto à linearidade, dada a EDO de  $n$  - ésima ordem por:

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = F \left( x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} \right)$$

O problema a ser tratado em Equações Diferenciais Ordinárias, consiste em encontrar uma função  $y$  (ou solução) que satisfaça a equação citada anteriormente. Esta solução é uma função que não possui derivadas nem diferenciais e ela podendo ser considerada geral ou particular.

Uma solução particular é obtida a partir da solução geral, dando-se valores específicos às constantes. Frequentemente são dadas as seguintes condições que permitem encontrar os valores das constantes obtidas pelas integrações:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_1) &= y_1 \\ y''(x_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{(n-1)}$$

Para tais casos, se  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$  então o problema é dito ser de valor inicial. Caso contrário, o problema é de valor de contorno.

Neste trabalho, serão tratados métodos numéricos para se conseguir os valores de  $y(x)$  a partir de problemas de valor inicial.

### 2.1.2 Problema de Valor Inicial (PVI)

Em geral, os métodos matemáticos utilizados para resolver uma E.D.O. de primeira ordem, fornecem como resultado uma solução geral. Contudo, na prática é de maior interesse uma solução particular, ou seja, uma função  $y(x)$  que satisfaça determinadas condições de contorno que são impostas sobre ela e suas derivadas, e o problema para encontrar tal função dada as condições iniciais sobre  $x_0$ , é chamado de problema de valor inicial (PVI).

Para resolver numericamente uma E.D.O. de primeira ordem com P.V.I., demonstrado na equação (2), supõem-se que ela satisfaz as condições de existência e unicidade. Esta solução numérica será encontrada para um conjunto finito de pontos (um intervalo fechado  $[a, b]$ ) no eixo das abscissas.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Considerando  $m$  subintervalos deste intervalo  $[a, b]$ , sendo  $m \geq 1$ , é possível determinar  $m + 1$  pontos onde as soluções numéricas devem ser calculadas. Estes pontos  $x_j$  e  $[a, b]$  são igualmente espaçados entre si por um tamanho de passo  $h$ , onde  $x_j = x_0 + j \cdot h$ . O conjunto  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$  obtido denomina-se rede ou malha de  $[a, b]$ . A solução numérica é uma função linear por partes, em que é aplicada a cada subintervalo, cujo gráfico apresenta-se como uma poligonal com vértices nos pontos  $(x_j, y_j)$ . Embora existam métodos que apresentem uma boa precisão, os métodos numéricos sempre apresentarão erros quando comparados com as soluções exatas obtidas de um estudo analítico.

## 2.2 Abordagem dos métodos numéricos para resolução de equações diferenciais

### 2.2.1 Série de Taylor de função de uma variável

Uma função  $f$  de uma variável  $x$ , contínua e indefinidamente derivável e aproximada em torno do ponto

$x = a$ , pode ser representada por uma série de potências da forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots \quad (3)$$

Em aplicações práticas, a Série de Taylor é utilizada em métodos numéricos, não é possível computar todos os seus termos. O que se faz, então, é considerar apenas um número finito deles, truncando a série após o  $n$ -ésimo termo, na forma:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \quad (4)$$

O termo apresentado como  $R_n(x)$  corresponde ao erro de truncamento, que é expresso pela equação:

$$R_n(x) = f^n(\varepsilon) \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (5)$$

Em que  $a < \varepsilon < x$ .

### 2.2.2 Método de Euler

O método de Euler é o método mais antigo e simples para resolução de equações diferenciais ordinárias. Desenvolvido por Euler (1707 – 1783) por volta de 1768, esse método é também chamado de método da reta tangente, pois sua abordagem é feita a partir da equação da reta tangente [4]. Em um PVI, deseja-se obter as aproximações  $y_1, y_2, \dots, y_i$ , para as soluções exatas  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  uma vez que estas últimas são desconhecidas. Segundo Chapra (2006, p.555), a primeira derivada da função  $y = f(x)$ , em  $x_0$ , fornece uma estimativa direta da inclinação em  $x_0$ . Portanto, para determinar a projeção aproximada de um ponto seguinte ( $x_1$ ) em  $y$ , é feita uma estimativa através desta inclinação, que é definida pela função da reta tangente a curva  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$ :

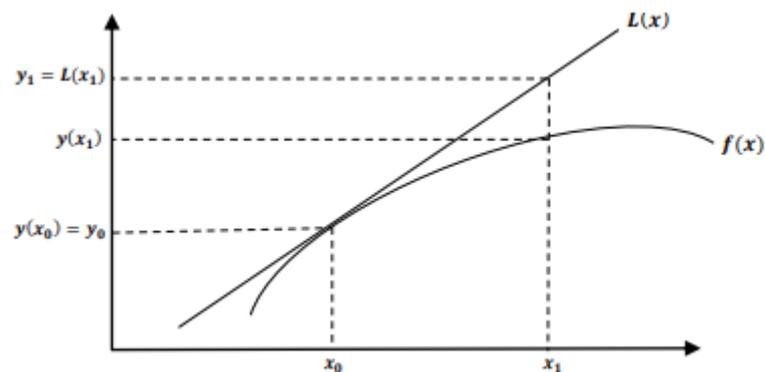


Figura 1 – Gráfico de  $L(x)$

Fonte: Gráfico de  $L(x)$  [7].

Sabendo que o ponto inicial  $(x_0, y_0)$  é fornecido pelo problema, o primeiro passo torna-se a determinação de um valor para  $y_1$ . Para tal, aproximando-se a solução  $y(x)$  por uma série de Taylor no ponto  $x=x_0$  e truncando o segundo termo, tem-se:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (6)$$

Para  $x = x_1$ :

$$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot y'(x_0) \quad (7)$$

Tendo em vista que, como valores exatos para  $y(x_j)$  são desconhecidos, faz-se uso de valores aproximados  $y_j$  e que  $(x_1 - x_0) = h$  e  $y'(x_0) = f(x_0 - y_0)$ , onde  $h$  é a distância entre os pontos  $x_j$ , então:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 - y_0) \quad (8)$$

Aplicando a formulação de Taylor para todos os subintervalos, pode-se definir uma regra geral para o Método de Euler:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j - y_j) \quad (9)$$

Em que  $j$  pode assumir valores de  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

### 2.2.3 Método de Heun

Segundo Chapra (2013, p. 561), uma grande fonte de erro, no método de Euler, é considerar que a derivada no início do intervalo pode ser usada em todo o intervalo. O método de Heun, que também é chamado de método de Euler melhorado, apresenta uma estratégia para melhorar a precisão da solução numérica. Uma das estratégias abordadas nesse método, segundo o mesmo autor, consiste em envolver a determinação de duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no ponto final, onde a nova inclinação será dada pela média das duas derivadas. As Figuras 2 e 3 ilustram essa abordagem.

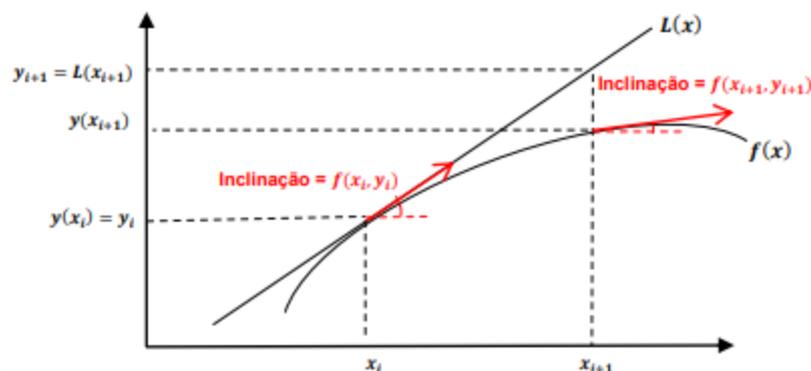


Figura 2 – Gráfico mostrando as inclinações em  $(x_i, y_i)$  e  $(x_{i+1}, y_{i+1})$

Fonte: Gráfico mostrando as inclinações em  $(x_i, y_i)$  e  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  [7].

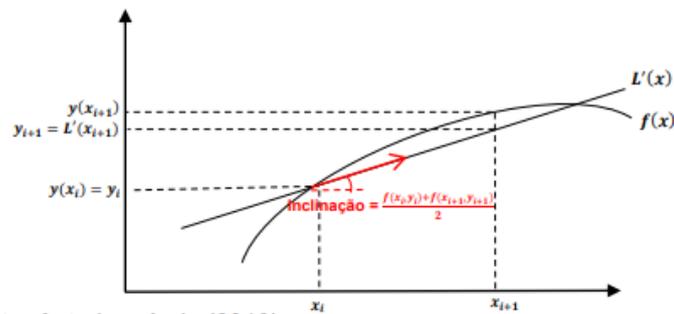


Figura 3 - Gráfico mostrando as inclinações em  $(x_i, y_i)$  formando uma nova reta  $L(x)$  [7].

Fonte: Gráfico mostrando as inclinações em formando uma nova reta [7].

Neste método, uma estimativa antiga pode ser usada repetidamente para obter uma estimativa melhorada de  $y_{i+1}$ , convergindo para uma estimativa de erro de truncamento finito.

Pode-se então considerar [10]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'(x_i) + y'(x_{i+1})) \quad (10)$$

Usando o PVI, pode-se escrever as equações:

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i) \quad (11)$$

$$y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (12)$$

A partir de uma aproximação dada por:

$$y(x_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (13)$$

Tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, hf(x_i, y_i))) \quad (14)$$

Pode-se então considerar o algoritmo de Heun, dados  $x_0, y_0, h$ . Gera-se aproximações para  $y_i$  para  $y(x_i)$  através de  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

### 3 | METODOLOGIA

Este estudo almeja ilustrar uma situação analítica e sua respectiva solução numérica, como também sua comparação com a solução computacional, a partir da abordagem de duas problemáticas diferentes, o Problema 1, “*P1*”, que trata da análise de mistura em um tanque com salmoura e o Problema 2 “*P2*” que trata da análise de concentrações das substâncias e da temperatura em função do tempo em um motor, onde há trocas de calor. As análises e comparações serão feitas a partir da aplicação dos métodos numéricos de Euler e Heun, que possibilitarão não só a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como também a observação das diferenças entre os métodos e suas funções computacionais.

A aplicação dos métodos nos problemas selecionados, foram feitos com auxílio computacional. As configurações do computador utilizado no teste estão indicadas nos quadros a seguir:

CARACTERÍSTICAS GERAIS	
Fabricante:	Lenovo
Modelo:	50GA
Processador:	Intel® Core™ i3-4005U CPU @ 1.70GHz
Memória RAM:	4GB
HD:	1000GB

Quadro 1 – Dados referentes ao computador utilizado nos testes

Fonte: Manual do fabricante (2015).

CARACTERÍSTICAS GERAIS	
Fabricante:	Lenovo
Modelo:	Windows 10 Profissional 64 bits

Quadro 2 – Dados referentes ao sistema operacional utilizado nos testes

Fonte: Manual do fabricante (2015).

#### 3.1 Problemas Teóricos

Os problemas que vamos solucionar a seguir, constituem parte da análise teórica e abordam dois casos de aplicação na engenharia química, onde são aplicados os métodos numéricos citados anteriormente. Vejamos seus enunciados:

**Problema 1** [2]: Considerando um tanque contendo inicialmente 300 galões de salmoura, com taxa de entrada da salmoura 3gal/min, concentração de 2lb/gal, e taxa de saída de 2gal/min. Com essas informações nota-se que o líquido acumulará no tanque a uma taxa de 1gal/min, logo em um tempo tem-se um volume de  $(300 + t)$  galões e uma taxa de entrada do sal igual a  $(3\text{gal/min}) * (2\text{lb/gal}) = 6\text{lb/min}$ . A concentração no fluxo de saída é  $A(t)/(300 + t)$ , em que  $A(t)$  é a quantidade de sal no interior do tanque e a

quantidade fluxo de saída de sal é  $A(t)/(300 + t) * (2\text{lb/gal})$ . Descrevendo a variação da quantidade de sal  $A$  em função do tempo  $t$ , tem-se:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t}$$

**Problema 2** [5]: Um motor resfriado a ar que gera calor com uma taxa constante  $Q_{\text{geração}} = 8530 \text{ Btu/min.}$

O ar no invólucro do motor circula rápido o suficiente para que sua temperatura seja considerada uniforme e igual à temperatura do ar de saída. O ar passa através do invólucro do motor com uma vazão de  $6,00 \text{ lb.mol/min}$ , entrando com uma temperatura de  $65^\circ\text{F}$ , uma média de  $0,200 \text{ lb.mol}$  de ar está contida no invólucro do motor. (Desprezaremos a variação desta quantidade com a mudança da temperatura do ar.) O calor é érdido do invólucro para as vizinhanças com uma taxa de

$$\dot{Q}_{\text{geração}} \left( \frac{\text{Btu}}{\text{min}} \right) = \left[ 33,0 \frac{\text{Btu}}{^\circ\text{F. min}} \right] (T - 65^\circ\text{F})$$

Suponha que o motor é ligado com a temperatura do ar dentro do invólucro igual a  $65^\circ\text{F}$ .

Deduzza uma equação diferencial para a variação da temperatura de saída com o tempo desde a partida e a resolva.

Dados:

$$M = 0,2 \text{ lb.mol}$$

$$C_v = 5,00 \text{ Btu}/(\text{min.}^\circ\text{F})$$

$$\dot{Q}_{\text{gerado}} = 8530 \text{ Btu/min}$$

$$\dot{Q}_{\text{perdido}} = 33,0(T - 65) \text{ (Btu/min)}$$

### 3.2 Estratégias de resolução

- Análise da resolução no tamanho do passo  $h$ ;
- Análise de erros cometidos: erros absolutos (médio e máximo) e relativo (médio e máximo).

### 3.3 Algoritmos

A seguir, estão representados os algoritmos utilizados nas simulações dos métodos numéricos.

#### 3.3.1 Algoritmo para o Método de Euler

No método, após a inicialização dos parâmetros, o laço é iniciado executando o método de Euler e, conseqüentemente, novos valores de  $y$  são retornados ao passo que o valor de  $x(i)$  é atualizado a cada operação com um acréscimo  $h$  no seu valor. O processo

termina quando o método tiver percorrido todo o intervalo  $[x_{inicial}, x_{final}]$ . O gráfico contendo a função solução analítica e a função aproximada pelo método é gerado simultaneamente.

```

Método de Euler
Declare
   $x_{inicial}$       (variável com o início do intervalo em  $x$ )
   $x_{final}$       (variável com o fim do intervalo em  $x$ )
   $y_{inicial}$     (variável com o valor inicial de  $y$ )
   $h$             (variável com o tamanho do passo)
   $x$             (vetor com os valores de  $x$ )
   $y_e$           (vetor com o valor da solução numérica)
   $f$             (função na variável  $x$  e  $y$ , da equação diferencial)
   $SA$           (solução analítica do problema)

Leia  $x_{inicial}, x_{final}, y_{inicial}, h, f$ 

 $x \leftarrow \text{vetor}[x_{inicial}:h:x_{final}]$ 
 $y_e \leftarrow y_{inicial}$ 

Para  $i$  de 1 até  $(x_{final} - x_{inicial})/h$  faça
   $y_e \leftarrow y_e + h * f(x(i), y_e(i))$ 
Fim para
Escreva  $y_e$ 
Plot  $y_e, SA$ 

```

Figura 4 – Algoritmo para o Método de Euler

Fonte: Autoria própria (2018).

### 3.3.2 Algoritmo para o método de Heun

No método, após a inicialização dos parâmetros, o laço é iniciado gerando novos valores de  $y$  partir da média das inclinações ao passo que o valor de  $x(i)$  é atualizado a cada operação com um acréscimo  $h$  no seu valor. O processo termina quando o método tiver percorrido todo o intervalo  $[x_{inicial}, x_{final}]$ . O gráfico contendo a função solução analítica e a função aproximada pelo método é gerado simultaneamente.

Método de Heun	
<b>Declare</b>	
$x_{inicial}$	(variável com o início do intervalo em $x$ )
$x_{final}$	(variável com o fim do intervalo em $x$ )
$y_{inicial}$	(variável com o valor inicial de $y$ )
$h$	(variável com o tamanho do passo)
$x$	(vetor com os valores de $x$ )
$y_e$	(vetor com o valor da solução numérica)
$k1$	(valor da primeira inclinação de cada iteração)
$f$	(função na variável $x$ e $y$ , da equação diferencial)
$SA$	(solução analítica do problema)
<b>Leia</b> $x_{inicial}, x_{final}, y_{inicial}, h, f$	
$x \leftarrow \text{vetor}[x_{inicial}: h: x_{final}]$	
$y_e \leftarrow y_{inicial}$	
<b>Para</b> $i$ <b>de</b> 1 <b>até</b> $(x_{final} - x_{inicial})/h$ <b>faça</b>	
$k1 \leftarrow y_e + h * f(x(i), y_e(i))$	
$y_e \leftarrow y_e + \left(\frac{h}{2}\right) * \{[k1] + (f(x(i), y_e) + f(x(i + 1), k1))\}$	
<b>Fim para</b>	
<b>Escreva</b> $y_e$	
<b>Plot</b> $y_e, SA$	

Figura 5 - Algoritmo para o Método de Heun

Fonte: Autoria própria (2018).

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir serão apresentados os resultados e discussões relacionados aos problemas teóricos propostos e a análise comportamental em diferentes casos de processos químicos.

Para resolver os problemas citados nesta análise comparativa, os métodos numéricos se apresentam como uma alternativa válida para encontrar uma solução aproximada. No presente estudo foi utilizado o cálculo analítico, e comparado o desempenho dos métodos numéricos de Euler e Heun, onde ambos são classificados como método de passo único. Segundo [2], métodos de passo único trabalham com base apenas na informação de um único ponto, e calculam uma predição futura. Os problemas envolvendo misturas químicas trabalham com problema de valor inicial, portanto esse primeiro ponto é sempre conhecido.

### 4.1 Resultados

#### 4.1.1 Problema 1

A priori, analisou-se as condições estabelecidas pelo problema, juntamente com a E.D.O. fornecida:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t}$$

Tal equação diferencial, possui a seguinte solução analítica segundo a substituição dos dados abordados pelo problema:

$$\frac{dA}{dt} = \left( \frac{(2(t^3 + 900t^2 + 270000t + 2250000))}{(t + 300)^2} \right)$$

A partir do enunciado, sabe-se que a quantidade de sal envolvida no tanque é de 50lb, portanto  $A(0) = 50$ . Considerou-se

Na modelagem do problema em questão, foram considerados dois tamanhos de passo  $h$  para a análise comparativa, no algoritmo dos dois métodos, sendo eles  $h = 1$  e  $h = 10$ . A partir disso, obteve-se os seguintes resultados:

Considerando a resolução pelo método de Euler:

$h$	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
1	401	$6.7425 \times 10^{-1}$	$8.1724 \times 10^{-1}$	0.1091%	0.2024 %
10	41	6.8137	8.3979	1.0969%	2.1143 %

Tabela 1 – Resultados do método de Euler para o Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo  $h = 1$  e  $h = 10$  na Figura 6:

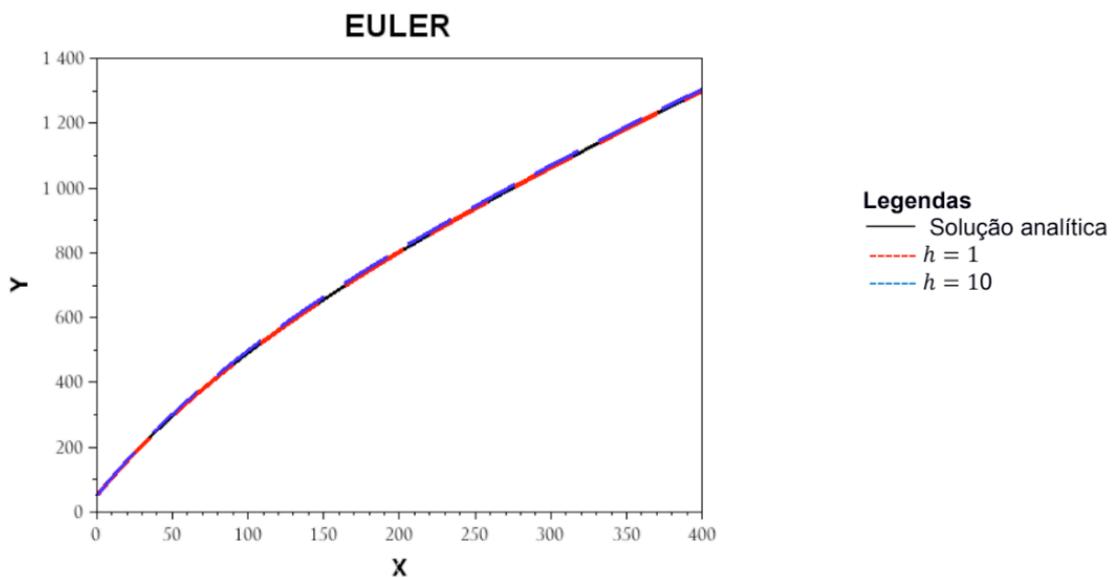


Figura 6 – Aplicação do método de Euler no Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Considerando a resolução pelo método de Heun:

$h$	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
1	401	0.0006	0.0008	0.0001 %	0.0002 %
10	41	0.0621	0.0797	0.0105%	0.0224%

Tabela 2 – Resultados do método de Heun para o Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo  $h = 1$  e  $h = 10$  na Figura 7:

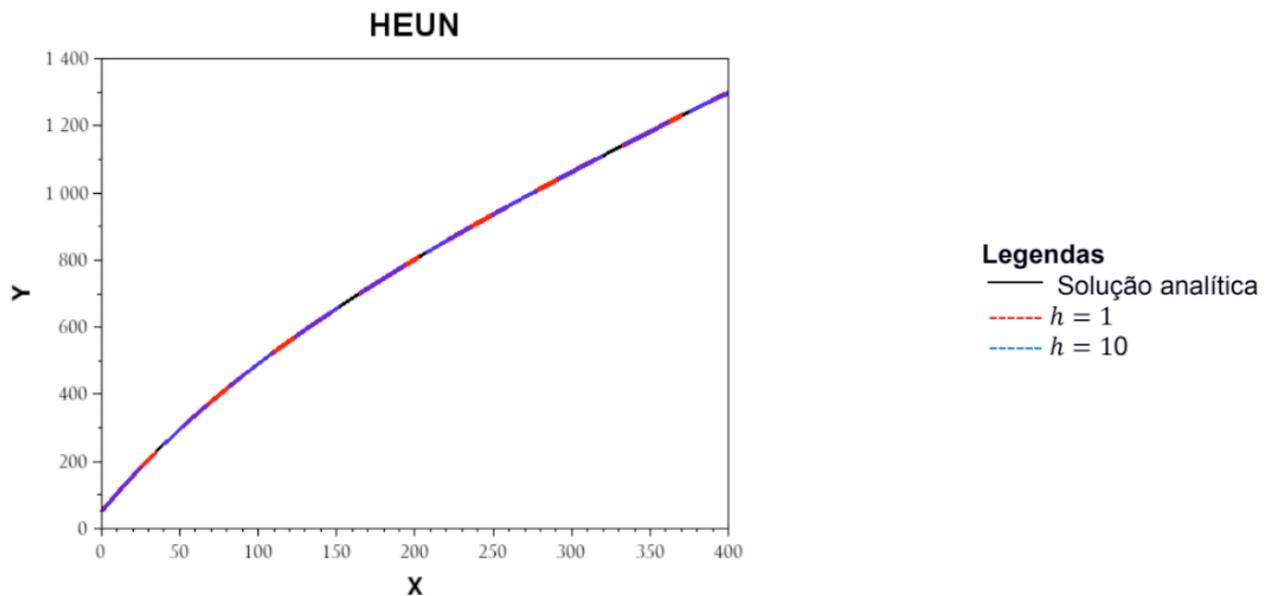


Figura 7 – Aplicação do método de Heun no Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

#### 4.1.2 Problema 2

Inicialmente é feita uma análise sobre as condições de contorno fornecidas no enunciado do problema, e a partir disso deu-se prosseguimento aos balanços de massa e energia em estado transiente, em que:

$$MC_v \frac{dT}{dt} = \dot{m}C_p(65^\circ F - T) + \dot{Q}_{gerado} - \dot{Q}_{perdido}$$

Substituindo-se os dados destacados do enunciado, chegamos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -74,9T + 13.400^\circ C/min$$

Com PVI definido por:  $t = 0$  e  $T = 65^\circ\text{F}$ .

A resolução desta equação diferencial leva ao seguinte resultado analítico:

$$y(x) = -113,905 e^{-74,9x} + 178,905$$

Na modelagem do problema em questão, foram considerados três tamanhos de passo  $h$  para a análise comparativa no algoritmo dos dois métodos, sendo eles  $h = 0.01$ ,  $h = 0.001$  e  $h = 0.0001$ . A partir disso, obteve-se os seguintes resultados:

$h$	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
0.01	31	2.0646	25.2687	1.4223%	20.2075%
0.001	301	0.1918	1.6206	0.1326%	1.2599%
0.0001	3001	0.0192	0.1576	0.0132%	0.1218%

Tabela 3 – Resultados do método de Euler para o Problema 2

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo  $h = 0.01$ ,  $h = 0.001$  e  $h = 0.0001$  na Figura 8:

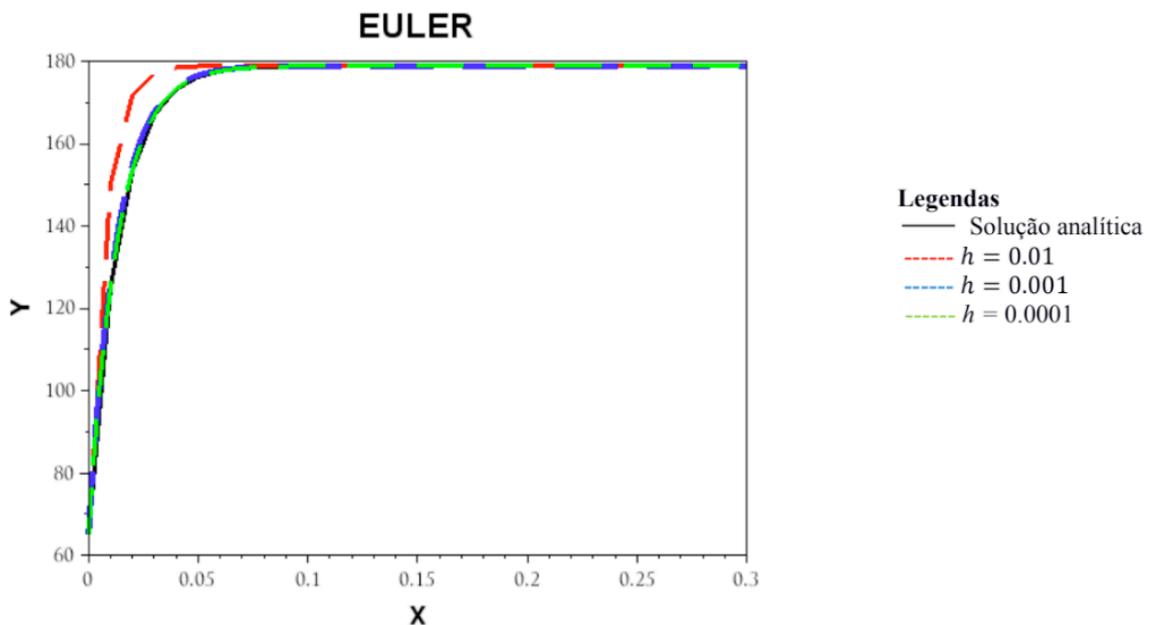


Figura 8 – Aplicação do método de Euler no Problema 2

Fonte: Autoria própria (2018).

Considerando a resolução pelo método de Heun:

$h$	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
0.01	31	0.8726	6.7107	0.5692 %	5.3434 %
0.001	301	0.0050	0.0413	0.0035 %	0.0320%
0.0001	3001	0.0002%	0.0003	0.0001%	0.0002%

Tabela 4 – Resultados do método de Heun para o Problema 2

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo  $h = 0.01$ ,  $h = 0.001$  e  $h = 0.0001$  na Figura 9:

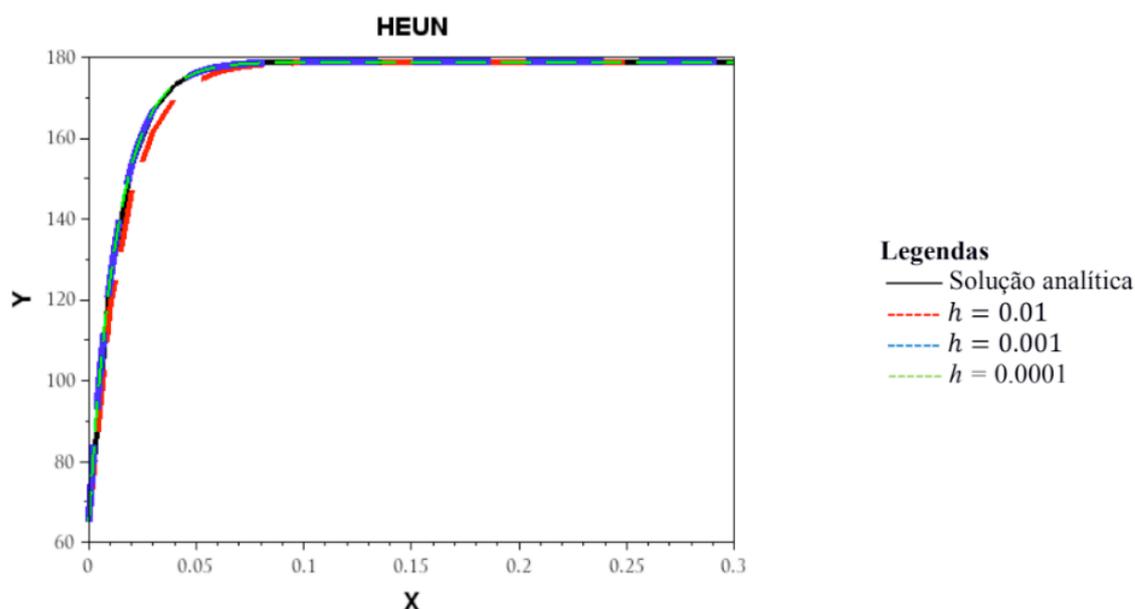


Figura 9 - Aplicação do método de Heun no Problema 4

Fonte: Autoria própria (2018).

## 4.2 Discussões

A partir da análise computacional comparativa dos Métodos Numéricos de Euler e Heun para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, a influência do tamanho de passo  $h$  no desenvolvimento dos problemas aplicados à engenharia química abordados neste trabalho, foi o que mais se destacou na comparação entre os métodos, onde a diminuição do tamanho de passo  $h$  acarretou diretamente na diminuição dos erros associados aos métodos, tornando-os quase nulos. Tal efeito traduz-se em um comportamento bastante aproximado ao comportamento da curva do resultado analítico. Outro efeito observado neste estudo foi o do aumento de operações diretamente proporcional à diminuição do tamanho de passo  $h$ , nos dois problemas abordados, em decorrência do aumento da precisão.

## 5 | CONCLUSÕES

Mediante apresentação dos resultados obtidos neste estudo, conclui-se que o método de Heun apresentou um menor erro em relação ao método de Euler, sendo mais apropriado para resolução destes tipos de problemas, embora a diferença entre os erros dos dois métodos possa ser considerada mínima. Além disto, obteve-se resultados importantes quanto a influência do tamanho de passo utilizado  $h$ , onde constatou-se que quanto menor o tamanho de passo  $h$ , para os dois estudos de caso considerados no presente trabalho, mais parecido se torna o comportamento da curva expressa pelos métodos de Euler e Heun com o comportamento da curva expressa a partir do resultado obtido analiticamente. Deste modo, comprova-se a melhor eficiência da utilização do método numérico de Heun na resolução dos problemas utilizados na análise comparativa deste trabalho, no ramo da Engenharia Química.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALENCAR, M. S. et al. **Comparativo entre as soluções analítica e numérica de um modelo de mistura de soluções salinas.**
- [2] Chapra. S. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas.** 3 ed., Bookman, Porto Alegre, 2013.
- [3] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia: QUINTA EDIÇÃO.** 5 ed. São Paulo: Mc Graw Hill, 2006. 785 p.
- [4] D.G. Zill. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem.** 9 ed., Cengage Learning, São Paulo, 2011.
- [5] FELDER, Richard M.; ROUSSEAU, Ronald W.. **Princípios elementares de processos químicos: TERCEIRA EDIÇÃO.** 3 ed. São Paulo: LTC, 576 p.
- [6] FREITAS, Igor R. B. De; MENEZES, Matheus Silva De. **Análise diferencial da vibração livre com amortecimento viscoso de um sistema massa-mola para diferentes fluidos.**
- [7] FREITAS, Sérgio Roberto De. **Métodos numéricos: métodos numéricos.** 1 ed. Mato Grosso do Sul: UFMGS, 2000. 224 p.
- [8] MENDONÇA, Pedro Thiago Vilela. **Comparativo entre os métodos numéricos de euler, heun e runge-kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.**
- [9] PEDROSA, **Diogo Pinheiro Fernandes.** **Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias.**
- [10] T. Brown, H.E. Lemay, B.E. Bursten **Química: a ciência central.** 9 ed., Prentice Hall, São Paulo, 2005.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aplicações 53, 71, 74, 82, 105, 107, 165, 167, 168, 169, 192, 210, 212, 214, 217, 220, 232, 255, 258

Aprendizagem 8, 11, 12, 13, 18, 21, 22, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 61, 71, 79, 83, 86, 91, 92, 96, 98, 104, 125, 160, 162, 169, 170, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 267, 269, 270

Avaliação 3, 15, 16, 36, 91, 95, 116, 191, 192, 259, 260, 261, 262, 269, 270

### B

Bicentenário 199, 201

Biomatemática 133, 134, 148, 149

### C

Cálculo 46, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 103, 105, 110, 115, 129, 147, 164, 208, 209, 227, 266, 268, 270

Cálculo Diferencial 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 86

Ciência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 18, 31, 33, 39, 43, 46, 53, 54, 58, 79, 80, 82, 92, 96, 102, 104, 169, 170, 199, 203, 205, 206, 216, 218, 232, 233

Computacionais 147, 160, 161, 224

Conceito 34, 43, 45, 47, 55, 56, 57, 60, 61, 71, 74, 83, 126, 127, 170, 171, 172, 178, 179, 181, 182, 185, 192, 194, 199, 207, 261

Cubagem 105, 107, 108, 110, 112, 113, 114

### D

Docência 20, 21, 22, 23, 27, 28, 47

### E

Educação 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 21, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 61, 69, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 82, 91, 92, 95, 96, 98, 103, 104, 122, 124, 125, 162, 169, 173, 175, 176, 178, 180, 181, 186, 187, 189, 190, 198, 200, 202, 208, 261, 269, 270, 271

Ensino 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 83, 85, 86, 91, 92, 96, 98, 109, 115, 125, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 196, 197, 198, 199, 200,

201, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 269, 270, 271

Equação Diferencial Ordinária 155, 156, 219

Equations 63, 146, 149, 217, 218, 233, 234, 238, 243, 244, 248

Espacial 21, 22, 29, 58, 103, 105, 107, 111, 114

Estatística 55, 57, 61, 63, 64, 72, 114, 132, 164, 165, 176, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 258

Etnomatemática 15, 32, 95, 96, 97, 98, 103, 104, 114

## F

Formação 2, 8, 9, 12, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 47, 52, 53, 57, 70, 71, 79, 80, 86, 87, 91, 104, 151, 152, 179, 189, 196, 197, 198, 199, 202, 204, 205, 206, 261

Formação Continuada 12, 31, 33, 34, 35, 36

Funções 57, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 116, 135, 140, 160, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 174, 176, 190, 208, 217, 224, 233, 255

Functional-Integral 233, 234, 238, 241, 242, 243, 244

## G

GeoGebra 69, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 174, 175, 176

Geometria 14, 20, 21, 22, 28, 30, 72, 100, 103, 105, 106, 107, 108, 111, 114, 164, 175

Gestar 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40

## H

História da Matemática 13, 14, 19, 32, 199, 200, 207, 208

HIV 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 147

## I

Imunoterapia 148, 149, 150, 151, 152, 153

Inovações 35, 163, 165, 170, 171, 172, 173, 174, 176

Interdisciplinar 11, 13, 16, 17, 38, 163, 169

## J

Jogos 11, 13, 17, 18, 32, 33, 34, 35, 40, 45, 46, 180, 183, 186

## L

Lógica 7, 10, 129, 170, 185, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 255

## M

Matemática 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 106, 107, 109, 110, 111, 114, 115, 116, 117, 122, 123, 124, 125, 132, 147, 148, 149, 153, 155, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 186, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 207, 208, 243, 244, 245, 254, 255, 258, 260, 261, 262, 264, 270, 271

Matemática Crítica 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 186

Materiais Manipuláveis 31, 34, 35, 39, 45, 46

Método 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 16, 53, 63, 65, 71, 92, 99, 105, 110, 111, 113, 127, 130, 131, 135, 138, 155, 157, 158, 198, 215, 217, 221, 222, 223, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 254, 256, 258

Modelagem 32, 38, 39, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 81, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 128, 132, 133, 134, 136, 148, 149, 153, 228, 230, 232

Modelo Matemático 39, 52, 80, 81, 83, 84, 89, 94, 132, 148, 149, 151, 152, 153

## O

Operações Aritméticas 34, 41, 42

## P

Pescado 100, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 124

Porcentagem 115, 116, 117, 120, 121, 122, 123, 124, 137

Projeto 20, 39, 58, 75, 76, 127, 156, 163, 164, 165, 166, 169, 174, 175, 192, 197

## R

Racionalidade 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10

Recursos Didáticos 31, 33, 34, 39

Resolução 14, 15, 16, 32, 37, 38, 53, 65, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 97, 171, 179, 206, 217, 218, 220, 221, 224, 225, 228, 230, 231, 232, 266

Reticulado 254, 255

Retração 254, 255, 256, 257, 258

## S

Sarampo 62, 63, 64, 65, 67, 68

## T

Teatro 180, 181, 182, 183, 184, 186

Tecnologias 79, 116, 160, 161, 162, 175, 176

Teorema de Stokes 199, 206, 207

Terapia 132, 150, 152

Tora 105, 106, 107, 110, 112, 113

## V

Vacinação 62, 63, 64, 65, 67

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

 **Atena**  
Editora

Ano 2020

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

 **Atena**  
Editora

Ano 2020