

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS  
(ORGANIZADOR)



# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS  
(ORGANIZADOR)



2020 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2020 Os autores  
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora  
**Editora Chefe:** Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Edição de Arte:** Luiza Batista  
**Revisão:** Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais. Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

#### **Editora Chefe**

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira

#### **Bibliotecário**

Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

#### **Conselho Editorial**

##### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá  
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima  
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia  
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia  
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará  
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí  
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco  
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas  
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino  
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

#### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

#### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí  
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional  
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Prof<sup>a</sup> Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais  
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof<sup>a</sup> Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar  
Prof<sup>a</sup> Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos  
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas  
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília  
Prof<sup>a</sup> Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa  
Prof<sup>a</sup> Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás  
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia  
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases  
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina  
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil  
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita  
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí  
Prof<sup>a</sup> Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora  
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé  
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo  
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária  
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina  
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro  
Prof<sup>a</sup> Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College  
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará  
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social  
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe  
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay  
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás  
Prof<sup>a</sup> Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA  
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis  
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR  
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>a</sup> Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ

Profª Drª Livia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás  
Prof. Me. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe  
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados  
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná  
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos  
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior  
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará  
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri  
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados  
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão  
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo  
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana  
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

## Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática

**Editora Chefe:** Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
**Bibliotecário:** Maurício Amormino Júnior  
**Diagramação:** Maria Alice Pinheiro  
**Edição de Arte:** Luiza Batista  
**Revisão:** Os Autores  
**Organizador:** José Elyton Batista dos Santos

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I62      Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática  
[recurso eletrônico] / Organizador José Elyton Batista dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF  
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader  
Modo de acesso: World Wide Web  
Inclui bibliografia  
ISBN 978-65-5706-175-6  
DOI 10.22533/at.ed.756201607

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino.  
3. Professores de matemática – Formação. I. Santos, José Elyton Batista dos.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

**Atena Editora**  
Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
Telefone: +55 (42) 3323-5493  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A coletânea “Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática” é uma obra composta por 27 artigos que tem como foco principal a difusão de conhecimentos na dimensão matemática perante a uma diversidade de trabalhos. O livro apresenta produções científicas do âmbito nacional e internacional em formato de relatos de casos, estudos bibliográficos e experimentais com temáticas relevantes para a comunidade científica, para professores em exercício e aos que estão aperfeiçoando seus conhecimentos acerca do que está sendo pesquisado, debatido e proposto no ensino da educação básica, bem como no ensino superior.

A relevância da matemática nos diferentes níveis educacionais é imensurável. Em todo canto e em toda situação a matemática está presente. Perante esse contexto, esta obra fomenta as pesquisas na área da educação matemática, dissemina os conhecimentos científicos a partir das diferentes visões teóricas e estudos contemplados pela referida área, a saber: etnomatemática, tecnologias, recursos didáticos, formação de professores e modelagem matemática. Também se insere nessa dimensão da difusão do conhecimento, as propostas interdisciplinares e conteudista para a educação básica e ensino superior, que visa primordialmente a aprendizagem com qualidade e de acordo com as exigências da sociedade contemporânea, isto é, um ensino próximo ao contexto do aluno.

Debruçar nessa coletânea permite ao leitor se aventurar por diferentes conhecimentos científicos. Ampliará seus conhecimentos teóricos, bem como, enriquecerá sua prática docente a partir dos relatos com materiais concretos, tecnológicos e problemas contextualizados. Todavia, desejo que esta obra contribua significativamente não apenas para o enriquecimento teórico e prático, mas como meio motivador para novas investigações e conseqüentemente para a difusão do conhecimento científico matemático.

José Elyton Batista dos Santos

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1</b> .....   | <b>1</b>  |
| A CIÊNCIA É RACIONAL? TENTATIVA DE RESPOSTA EM PAUL FEYERABEND E EDGAR MORIN  |           |
| Deise Leandra Fontana<br>Ettiène Cordeiro Guérios   |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016071</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 2</b> .....   | <b>11</b> |
| A MATEMÁTICA COMO MEIO DE COMPREENSÃO E TRANSFORMAÇÃO DO MUNDO  |           |
| Andreza dos Santos Silva Brito<br>Eloá de Fátima Velho Godinho Peixer<br>Eliani Aparecida Busnardo Buemo  |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016072</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 3</b> .....   | <b>20</b> |
| O ENSINO DAS CAPACIDADES ESPACIAIS COMO POSSIBILIDADES PARA A FORMAÇÃO NA DOCÊNCIA  |           |
| Leila Pessôa Da Costa<br>Regina Maria Pavanello<br>Sandra Regina D'Antonio Verrengia  |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016073</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 4</b> .....   | <b>31</b> |
| OS IMPACTOS DOS RECURSOS DIDÁTICOS NA FORMAÇÃO DOCENTE NO PROGRAMA GESTAR MATEMÁTICA  |           |
| Sheyla Silva Thé Freitas<br>Valmiro de Santiago Lima  |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016074</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 5</b> .....   | <b>41</b> |
| OS NÚMEROS E AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS ELEMENTARES: DO CONHECIMENTO DOCENTE E DAS PRÁTICAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS DESENVOLVIDAS  |           |
| Leila Pessôa Da Costa<br>Regina Maria Pavanello   |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016075</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 6</b> .....   | <b>49</b> |
| CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E PARA O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE   |           |
| Silvana Cocco Dalvi<br>Oscar Luiz Teixeira de Rezende<br>Mirelly Katiene e Silva Boone<br>Luciano Lessa Lorenzoni<br>Agostinho Zanuncio<br>Andressa Coco Lozório<br>Ana Elisa Tomaz |           |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.7562016076</b>  |           |
| <b>CAPÍTULO 7</b> .....   | <b>62</b> |
| MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A VACINAÇÃO CONTRA O SARAMPO  |           |
| Nathalia Kathleen Santana Reyes<br>Douglas Souza de Albuquerque<br>Thaís Madruga de Oliveira Mendonça   |           |

Josiane da Silva Cordeiro Coelho

Claudia Mazza Dias

DOI 10.22533/at.ed.7562016077

**CAPÍTULO 8 ..... 69**

A MODELAGEM MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM FUTUROS PROFESSORES DA UNEMAT: APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA DE UMA VARIÁVEL REAL

Polyanna Possani da Costa Petry

Kátia Maria de Medeiros

Raul Abreu de Assis

DOI 10.22533/at.ed.7562016078

**CAPÍTULO 9 ..... 81**

CONTEXTUALIZANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA EXPERIÊNCIA ANCORADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Rudinei Alves dos Santos

Vanessa Pires Santos Maduro

Verônica Solimar dos Santos

Gilbson Santos Soares

Adriana Oliveira dos Santos Siqueira

DOI 10.22533/at.ed.7562016079

**CAPÍTULO 10 ..... 95**

A IMPORTÂNCIA DO SENTIDO DO SABER: A MATEMÁTICA PRESENTE NA ATIVIDADE PESQUEIRA NO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS

Lucivaldo Vieira Pinheiro

DOI 10.22533/at.ed.75620160710

**CAPÍTULO 11 ..... 105**

ANÁLISE DOS MÉTODOS DE CUBAGEM NA ZONA DA MATA DO ESTADO DE RONDÔNIA

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

DOI 10.22533/at.ed.75620160711

**CAPÍTULO 12 ..... 115**

A PORCENTAGEM E OS PESCADORES DO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS-PARÁ

Lucivaldo Vieira Pinheiro

Sandro Benício Goulart Castro

DOI 10.22533/at.ed.75620160712

**CAPÍTULO 13 ..... 126**

UMA NOVA ABORDAGEM DE RESIDÊNCIA INTELIGENTE BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA INSERIDA EM UMA REDE NEBULOSA

Suelio Lima de Alencar

Orlando Donato Rocha Filho

Danúbia Soares Pires

Lorena Maria Figueiredo Albuquerque

DOI 10.22533/at.ed.75620160713

|  |            |
|--|------------|
| <b>CAPÍTULO 14</b> .....   | <b>132</b> |
| DINÂMICA DO HIV COM TERAPIA ANTIRRETROVIRAL VIA EXTENSÃO FUZZY BIDIMENSIONAL DE ZADEH  |            |
| Kassandra Elena Inoñan Alfaro  |            |
| Ana Maria Amarillo Bertone   |            |
| Rosana Sueli da Motta Jafelice   |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160714</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 15</b> .....   | <b>148</b> |
| ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA IMUNOTERAPIA  |            |
| Marcelo Oliveira Esteves   |            |
| Pedro Nascimento Martins   |            |
| Ana Carolina Delgado Malvaccini Mendes   |            |
| Sarah Rachid Ozório  |            |
| Maria Zilda Carvalho Diniz   |            |
| Valeria Mattos da Rosa   |            |
| Flaviana Andrea Ribeiro  |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160715</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 16</b> .....   | <b>155</b> |
| ANÁLISE DA DEFLEXÃO DE UMA VIGA APOIADA-ENGASTADA  |            |
| Mariana Coelho Portilho Bernardi   |            |
| Adilandri Mércio Lobeiro   |            |
| Rogério Zolin Bertechini   |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160716</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 17</b> .....   | <b>160</b> |
| ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS  |            |
| Felipe Klein Genz  |            |
| Odair Menuzzi  |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160717</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 18</b> .....   | <b>163</b> |
| DIFUSÃO DE INOVAÇÕES: ANÁLISE DE UMA ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS  |            |
| Cassio Cristiano Giordano  |            |
| Douglas Borreio Maciel dos Santos  |            |
| Eliana Calixto Santos  |            |
| Jailma Ferreira Guimarães  |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160718</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 19</b> .....   | <b>178</b> |
| PRÁTICAS TEATRAIS COMO ORGANIZADOR DIDÁTICO-PEDAGÓGICO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO                          |            |
| Rizaldo da Silva Pereira   |            |
| Arthur Gonçalves Machado Júnior  |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160719</b>  |            |
| <b>CAPÍTULO 20</b> .....   | <b>187</b> |
| A PESQUISA ESTATÍSTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA VYGOTSKYANA |            |
| Celia Alves Pereira  |            |
| Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha  |            |
| Leonardo Sturion   |            |
| <b>DOI 10.22533/at.ed.75620160720</b>  |            |

**CAPÍTULO 21 ..... 199**

O BICENTENÁRIO GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903)

Liliane Silva Nascimento Coelho

Ana Paula Nunes Felix

Miguel Chaquiam

**DOI 10.22533/at.ed.75620160721**

**CAPÍTULO 22 ..... 210**

DISCUSSÃO E ANÁLISE: UM PASSEIO NA LÓGICA LPA2v, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Clewton Rodrigues Rúbio

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

**DOI 10.22533/at.ed.75620160722**

**CAPÍTULO 23 ..... 217**

COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER E HEUN NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM PROVENIENTES DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA QUÍMICA

Anne Karolyne Maia Vieira

Matheus da Silva Menezes

**DOI 10.22533/at.ed.75620160723**

**CAPÍTULO 24 ..... 233**

A NUMERICAL APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF FREDHOLM FUNCTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS BY CHEBYSHEV TAU METHOD

Juarez dos Santos Azevedo

Suzete Maria Silva Afonso

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Adson Mota Rocha

**DOI 10.22533/at.ed.75620160724**

**CAPÍTULO 25 ..... 245**

REALCE DA IMAGEM COM PRESERVAÇÃO DO BRILHO MÉDIO BASADA NA TRANSFORMADA TOP-HAT MULTI-ESCALA

Julio César Mello Román

Horacio Legal-Ayala

José Luis Vázquez Noguera

Diego P. Pinto-Roa

**DOI 10.22533/at.ed.75620160725**

**CAPÍTULO 26 ..... 253**

EXTENSÃO VIA E-OPERADOR DE IMPLICAÇÕES FUZZY VALORADAS EM RETICULADO

Mariana Rosas Ribeiro

Eduardo Silva Palmeira

Wendy Díaz Veldés

Giovanny Snaider Barrera Ramos

**DOI 10.22533/at.ed.75620160726**

**CAPÍTULO 27 ..... 258**

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: UMA DISCUSSÃO ACERCA DO POTENCIAL DE UMA PROVA ESCRITA EM FASES E INTERVENÇÕES ESCRITAS

Celia Alves Pereira

Marcele Tavares Mendes

Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha

**DOI 10.22533/at.ed.75620160727**

**SOBRE O ORGANIZADOR..... 270**

**ÍNDICE REMISSIVO ..... 271**

## DINÂMICA DO HIV COM TERAPIA ANTIRRETROVIRAL VIA EXTENSÃO FUZZY BIDIMENSIONAL DE ZADEH

*Data de aceite: 05/06/2020*

*Data de submissão: 02/04/2020*

### **Kassandra Elena Inoñan Alfaro**

Universidade de São Paulo, Instituto de  
Matemática e Estatística  
São Paulo - São Paulo  
<http://lattes.cnpq.br/8035208349507538>

### **Ana Maria Amarillo Bertone**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Matemática  
Uberlândia - Minas Gerais  
<http://lattes.cnpq.br/0632921389061617>

### **Rosana Sueli da Motta Jafelice**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Matemática  
Uberlândia - Minas Gerais  
<http://lattes.cnpq.br/4014114406515905>

**RESUMO:** O objetivo deste trabalho é a análise qualitativa de um modelo matemático que simula a ação do Vírus de Imunodeficiência Humana (HIV) na corrente sanguínea sob tratamento antirretroviral de indivíduos soropositivos. A modelagem matemática é realizada com parâmetros considerados números fuzzy. Os parâmetros considerados são o retardo e a taxa de mortalidade do vírus, com a finalidade

de incluir a incerteza encontrada no fenômeno biológico. A metodologia inclui a construção de um algoritmo baseado em informações provenientes de um autômato celular. O algoritmo descreve uma aproximação numérica de uma solução do sistema que simula a dinâmica do HIV, seguido da fuzzificação através do princípio fuzzy bidimensional da extensão de Zadeh. Uma comparação das soluções fuzzy dos sistemas com e sem retardo é realizada. Ressalta-se que em ambos os modelos têm sido incorporados à terapia antirretroviral, contudo as soluções fuzzy destes sistemas exibem comportamento qualitativo semelhante ao histórico natural do HIV sem tratamento, até a fase assintomática.

**PALAVRAS-CHAVE:** HIV, Equação diferencial com retardo, Extensão de Zadeh bidimensional.

### DYNAMICS OF THE HIV UNDER ANTIRETROVIRAL THERAPY VIA ZADEH'S BIDIMENSIONAL FUZZY EXTENSION

**ABSTRACT:** The aim of this work is the qualitative analysis of a mathematical model that simulates the action of the Human Immunodeficiency Virus (HIV) in the bloodstream under antiretroviral treatment of HIV-positive individuals.

Mathematical modeling is performed with parameters considered as fuzzy numbers. The parameters considered are the delay and the mortality rate of the virus in order to include the uncertainty found in the biological phenomenon. The methodology includes the construction of an algorithm based on information from a cellular automaton. The algorithm describes a numerical approximation of a system solution that simulates the HIV dynamics, followed by fuzzification through the two-dimensional fuzzy principle of the Zadeh extension. A comparison of the fuzzy solutions of the systems, with and without delay, is performed. It is noteworthy that antiretroviral therapy has been incorporated in both models, however the fuzzy solutions of these systems exhibit qualitative behavior like the natural history of HIV without treatment, until the asymptomatic phase.

**KEYWORDS:** HIV, Delay differential equation, Two-dimensional Zadeh extension.

## 1 | INTRODUÇÃO

A capacidade de incorporar incertezas provenientes de dados *in vitro* em fenômenos biológicos é um objetivo comum na área de modelagem biomatemática. A teoria dos conjuntos fuzzy constitui uma abordagem apropriada uma vez que transforma a incerteza em um número fuzzy. Em particular, o princípio de extensão de Zadeh bidimensional (NGUYEN, 1978) é a ferramenta utilizada neste estudo com a finalidade de incluir dois parâmetros incertos provenientes da modelagem da dinâmica do HIV com retardo.

O HIV é um retrovírus esférico, isto é, um vírus contendo ácido ribonucleico (RNA) que se replica em uma célula hospedeira que ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos T do tipo CD4+, que são células que fazem parte do sistema imunológico. A Figura 1 mostra um esquema do tempo de percurso da infecção do HIV em um adulto infectado. Nesta figura o comportamento dos linfócitos T CD4+ e dos linfócitos T citotóxico (CTL) são exibidos. Podemos também observar que o tempo médio de infecção da Síndrome de Imunodeficiência Adquirida (AIDS) é 10 anos, sem tratamento com antirretrovirais.

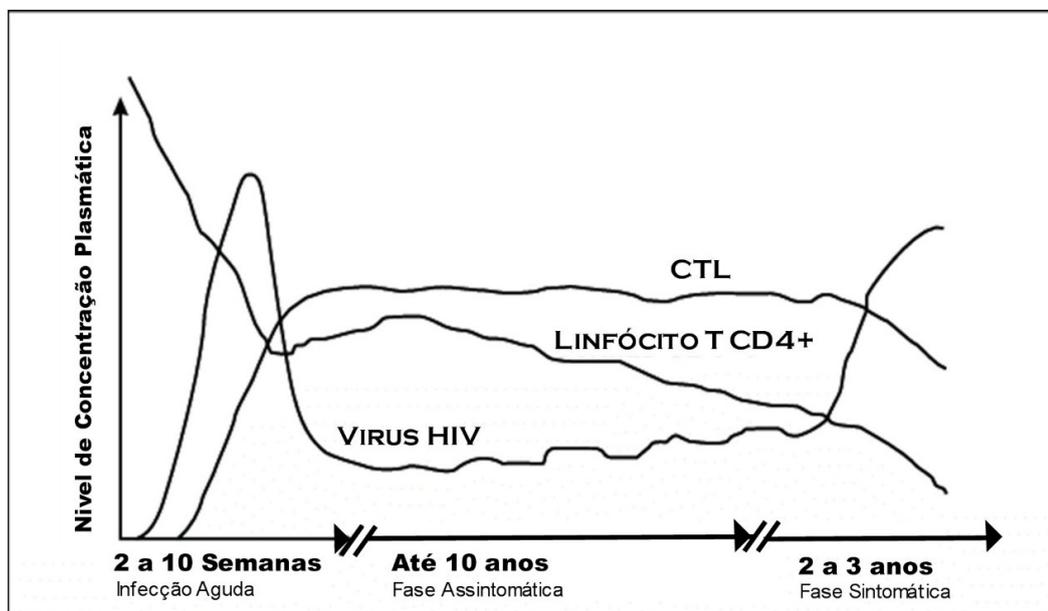


Figura 1: Esquema da história natural da infecção do HIV (SILVA, JAFELICE, 2010).

O objetivo básico deste trabalho é estudar modelos da biomatemática que utilizam equações diferenciais, no estudo das dinâmicas do HIV no contexto da teoria fuzzy (INOÑAN et al., 2019). De fato, a taxa de infecção do linfócito T do tipo CD4+ pelo vírus HIV, que é um parâmetro complexo de ser obtido nas ciências médicas, assim como outros parâmetros do sistema, são obtidos por meio de um Autômato Celular (AC) (JAFELICE et al, 2015). A partir desse ponto, determina-se uma aproximação numérica para uma fuzzificação do modelo desta dinâmica, em que os parâmetros de retardo e taxa de mortalidade do vírus são considerados como dois números fuzzy. Para isto, na Seção 2 são introduzidos os principais conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, incluindo o dos números fuzzy, que dão o alicerce teórico para os parâmetros incertos da modelagem. A seguir, na Seção 3 exibe-se os modelos da distintas dinâmicas do HIV. Na Seção 4 e 5 apresenta-se o autômato celular e a taxa de infecção respectivamente. Expõe-se na Seção 6 os outros parâmetros do sistema de equações diferenciais. Na Seção 7 explana-se como é obtida uma solução fuzzy do modelo da dinâmica do HIV com retardo, sendo que na Seção 8, obtém-se uma solução fuzzy da mesma modelagem sem retardo. Comparações entre as duas soluções são feitas na Seção 9. Finalmente, na Seção 10 elenca-se aspectos relevantes, conhecimentos adquiridos e a conclusão.

## 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um conjunto fuzzy  $A$  do universo  $\mathcal{U}$  é caracterizado por uma função de pertinência:  $\mu_A: \mathcal{U} \rightarrow [0,1]$ . Definimos como  $\alpha$ -nível de  $A$  ao conjunto:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um conjunto fuzzy  $A$  é o fecho topológico do conjunto denominado suporte de  $A$ ,  $\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mu_A(x) > 0\}$ .

Um conjunto fuzzy  $A$  é denominado número fuzzy quando  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  existir  $x$  tal que  $\mu_A(x) = 1$ ,  $[A]^a$  é um intervalo fechado para todo  $a \in [0, 1]$  e o suporte de  $A$  é limitado.

Dados dois números fuzzy  $A$  e  $B$  de universos  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{Z}$  respectivamente, o produto cartesiano fuzzy é dado por:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Sendo  $\mu_A: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  e  $\mu_B: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  as funções de pertinência de  $A$  e  $B$ , respectivamente e  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, a extensão de Zadeh de  $(A, B)$  através de  $F$  é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\hat{F}(A, B)}(z) = \sup_{(x, y)} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))], \text{ em que } z = F(x, y).$$

**TEOREMA:** Seja  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $A, B$  números fuzzy. Então

$$[\hat{F}(A, B)]^\alpha = F([A]^\alpha \times [B]^\alpha), \text{ para todo } \alpha \in [0, 1],$$

em que  $[A]^a$  e  $[B]^a$  representam os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy  $A$  e  $B$ , respectivamente (NGUYEN, 1978).

Outro elemento importante da teoria dos conjuntos fuzzy é o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) que contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados, uma coleção de regras nebulosas chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um número real como saída. O método de inferência utilizado neste trabalho é o Método de Inferência de Mamdani e o método de defuzzificação é o Centro de Gravidade (PEDRYCZ, GOMIDE, 1998).

Na próxima Seção explana-se o modelo clássico da dinâmica do HIV.

### 3 | MODELO DA DINÂMICA DO HIV

Nowak e Bangham (1996) apresentam um modelo da dinâmica do HIV que contém quatro variáveis dependendo do tempo  $t$  dadas por:

- $x(t)$  é a população de células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+;
- $y(t)$  é a população de células infectadas do linfócito T do tipo CD4+ que produzem o vírus;
- $v(t)$  é a carga viral ou partículas do vírus livre e
- $z(t)$  é a magnitude dos linfócitos T citotóxico,

cujas taxas de mortalidade são  $d$ ,  $a$ ,  $u$  e  $b$ , respectivamente. O valor  $p$  é a taxa de mortalidade das células infectadas causadas por CTL e  $c$  é a taxa de proliferação

do CTL em resposta do antígeno. O modelo supõe que as células não infectadas são continuamente produzidas pelo corpo humano sob um influxo constante  $\lambda$ . Células não infectadas e vírus livres produzem células infectadas a uma taxa  $\beta(t)$  e células infectadas produzem partículas de vírus livres a uma taxa  $k(t)$ . Assim, o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(t)xv - ay - pyz \\ \frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\ \frac{dz}{dt} &= cyz - bz.\end{aligned}\tag{1}$$

O modelo proposto não contém um retardo intracelular de tempo entre a infecção da célula e a produção de novas partículas de vírus. Com o objetivo de incorporar um retardo à modelagem, assume-se que a taxa de mortalidade  $\tilde{a}$  para as células infectadas que ainda não produzem vírus, é  $e^{-\tilde{a}\tau}$ . Interpreta-se assim a probabilidade de sobrevivência no tempo  $t - \tau$  para o tempo  $t$  (HERZ et al, 1996). Assim, o modelo obtido tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(t - \tau)x(t - \tau)v(t - \tau)e^{-\tilde{a}\tau} - ay - pyz \\ \frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\ \frac{dz}{dt} &= cyz - bz.\end{aligned}\tag{2}$$

A partir dessa modelagem, a metodologia segue com as informações obtidas através de um autômato celular, descrito na próxima seção.

#### 4 | AUTÔMATO CELULAR

O autômato celular (AC), estudado por Jafelice et al (2015), representa computacionalmente a corrente sanguínea de um indivíduo soropositivo, sob tratamento antirretroviral, onde vivem artificialmente células não infectadas e infectadas do linfócito T

do tipo CD4+, partículas de vírus livres e o linfócito T citotóxico. O linfócito T do tipo CD4+ é o principal linfócito que o vírus ataca ao atingir a corrente sanguínea.

No sistema (2) os parâmetros e os valores da taxa de infecção são obtidos a partir do autômato celular (JAFELICE et al, 2015). Para isso, o modelo AC utiliza a saída do SBRF para a simulação. As variáveis de entrada do SBRF são a adesão ao tratamento e a potência da medicação. Para adesão ao tratamento, o intervalo  $[0,1]$  é definido onde 0 significa nenhuma e 1 total da adesão. Também, define-se o intervalo de potência medicação como  $[0.8,0.9]$ . As variáveis de saída são a porcentagem de linfócitos CD4+ infectados e o período de replicação do vírus. Para as variáveis de entrada e a primeira variável de saída, os termos linguísticos são: muito baixo, baixo, médio, alto e muito alto, e para a segunda saída são: muito rápido, rápido, médio, lento e muito lento. Para a porcentagem de células CD4+ do HIV infectadas, o intervalo é  $[0.1,1]$  e para o período de replicação do vírus é  $[5,16]$ . O SBRF é construído com base no conhecimento médico especializado.

A simulação é realizada utilizando os valores de adesão ao tratamento e potência do medicamento de três indivíduos soropositivos ao HIV mostrados na Tabela 1. Nesta tabela, os parâmetros da primeira, segunda e terceira colunas correspondem a indivíduos soropositivos submetidos a três níveis de potência e adesão ao medicamento (JAFELICE et al, 2015). Os valores de saída do SBRF são mostrados na Tabela 2. A primeira linha da Tabela 2 mostra a porcentagem dos linfócitos T do tipo CD4+ infectados e a segunda linha mostra o período de replicação do vírus para os valores de entrada. A simulação é executada em um retângulo com  $38 \times 38$  células com 101 iterações. A escolha do tamanho da grade celular é definida com base em várias execuções experimentais do AC, variando o número de iterações, bem como o número inicial de elementos (linfócitos CD4 + não infectados e infectados, partículas de vírus livres e CTL específicos de vírus) e todos os outros parâmetros AC necessários para as simulações.

|                       | Primeira entrada | Segunda entrada | Terceira entrada |
|-----------------------|------------------|-----------------|------------------|
| Adesão ao tratamento  | 0.8              | 0.85            | 0.9              |
| Potência da medicação | 0.1              | 0.6             | 1                |

Tabela 1: Entradas para o SBRF usado na simulação.

|   | Primeira entrada | Segunda entrada | Terceira entrada |
|---|------------------|-----------------|------------------|
| Porcentagem de linfócitos CD4+ infectados | 0.85             | 0.55            | 0.1              |
| Período de replicação do vírus            | 6.35             | 10.4            | 16               |

Tabela 2: Saídas do SBRF e entradas do AC usadas na simulação.

A taxa de infecção para três indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral, obtidos por AC, são expostos na Seção 5, a seguir.

## 5 | TAXA DE INFECÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO

A taxa de infecção  $\beta(t)$  do sistema (2) é um parâmetro importante para o controle da AIDS em indivíduos soropositivos ao HIV. Esta taxa de infecção é calculada usando o quociente do número de linfócitos T do tipo CD4+ infectados pelo produto do número de linfócitos T do tipo CD4+ não infectados e a variação do tempo  $\Delta t$ , isto é,

$$\beta(t) = \frac{\text{linfócitos CD4+ infectados}}{\text{linfócitos CD4+ não infectados} \cdot \Delta t}$$

Como o resultado é obtido para cada iteração realizada, a variação de tempo  $\Delta t = 1$  e  $t = 1, \dots, 100$ . A Figura 2 apresenta o gráfico da taxa de infecção em função do tempo para os três valores de entrada. Observamos que o gráfico é decrescente, o que significa que a taxa de infecção dos linfócitos CD4+ pelo vírus diminui com o tempo. Com os valores obtidos (ver Figura 2), determinam-se três expressões  $\beta$  representando a taxa de infecção em função do tempo  $t$  para três indivíduos. A Figura 3 representa o ajuste para os pontos discretos  $\beta$  (ver Figura 2), que foi obtida pelo método dos mínimos quadrados (RUGGIERO; LOPES, 1996), de acordo com as regras fuzzy. Assim, as expressões obtidas para  $\beta(t)$  são:

- $\beta = 0.2703 e^{-0.005t} + 0.2499$  (1ª entrada);
- $\beta = 0.333 e^{-0.005527t}$  (2ª entrada);
- $\beta = 0.335 e^{-0.008937t}$  (3ª entrada).

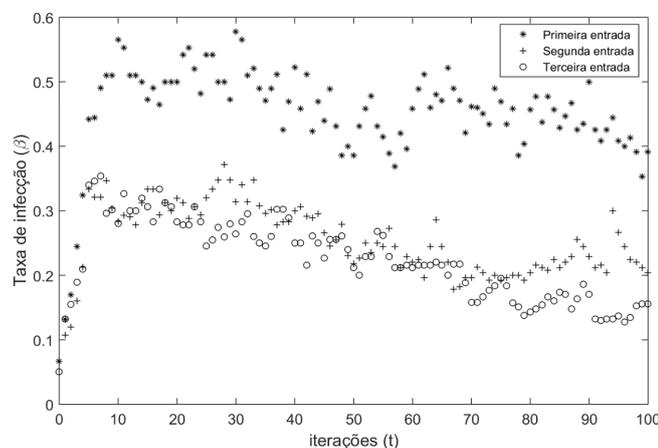


Figura 2: Taxas de infecção  $\beta(t)$  em função do tempo obtido com o autômato celular para as três entradas.

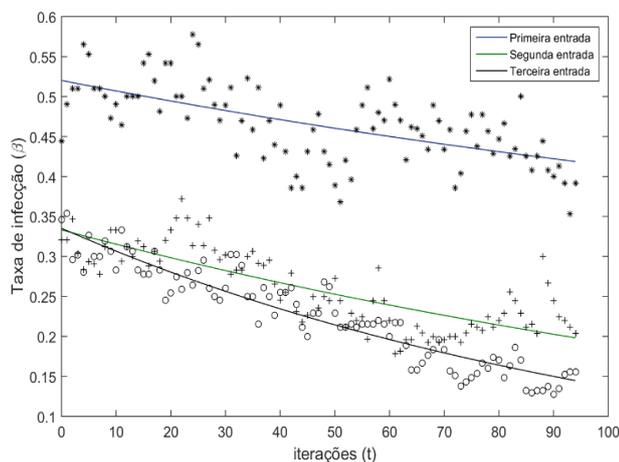


Figura 3: Diagrama de dispersão das taxas de infecção ajustados em função do tempo para as três entradas (JAFELICE et al., 2015).

A seguir, na Seção 6, se introduzem os outros parâmetros do sistema (2).

## 6 | PARÂMETROS DO SISTEMA DA DINÂMICA DO HIV

As taxas do sistema (2) são consideradas como valores inversos do tempo que no AC é o número de iterações (JAFELICE et al, 2015). Os valores das taxas são:

- $\lambda = 20$  que é o influxo constante de células não infectadas produzidas no corpo humano, colocadas aleatoriamente em cada iteração na AC.
- $d = 1/4$  que é a taxa de mortalidade de células não infectadas, pois no AC o número de iterações para morte de células não infectadas é 4.
- $a = 1/5$  que é a taxa de mortalidade de células infectadas, pois o número de iterações para morte de células infectadas é 5.
- $p = 0.4$  que é a taxa de mortalidade de células infectadas devido ao encontro com os CTL, porque nem todo encontro resulta em sucesso.
- $u = 1/2$  que é a taxa de mortalidade das células do HIV, pois o número de iterações para a morte por HIV é 2.
- $c = 1/14$  que é a taxa de proliferação dos CTL, uma vez que o número de iterações para a proliferação do CTL é 14.
- $b = 1/5$  que é a taxa de mortalidade do CTL, pois o número de iterações para morte dos CTL é 15.

Além desses valores para os parâmetros, é encontrado o valor  $\tilde{a} = 0.0825$ . No AC são contadas todas as células infectadas que morreram e não produziram vírus em cada iteração e depois calcula-se a média dos valores encontrados. O vetor  $k(t)$  que representa a reprodução das células infectadas, é obtido a partir do AC, contando o número de células infectadas recentemente reproduzidas em cada iteração .

Seja  $\Phi$  uma solução numérica do sistema (2). Para a solução numérica do sistema (2), representada na Figura 4, considera-se o ajuste  $\beta = 0.333 e^{-0.005527t}$  que representa o

indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio  $\tau = 0.5$  e as taxas definidas anteriormente.

As condições iniciais são  $x_0 = 0.99$ ,  $y_0 = 0.01$ ,  $v_0 = 0.1$  e  $z_0 = 0.01$ .

O software Matlab tem sido utilizado para obter a solução numérica para o sistema (2) (ver Figura 4).

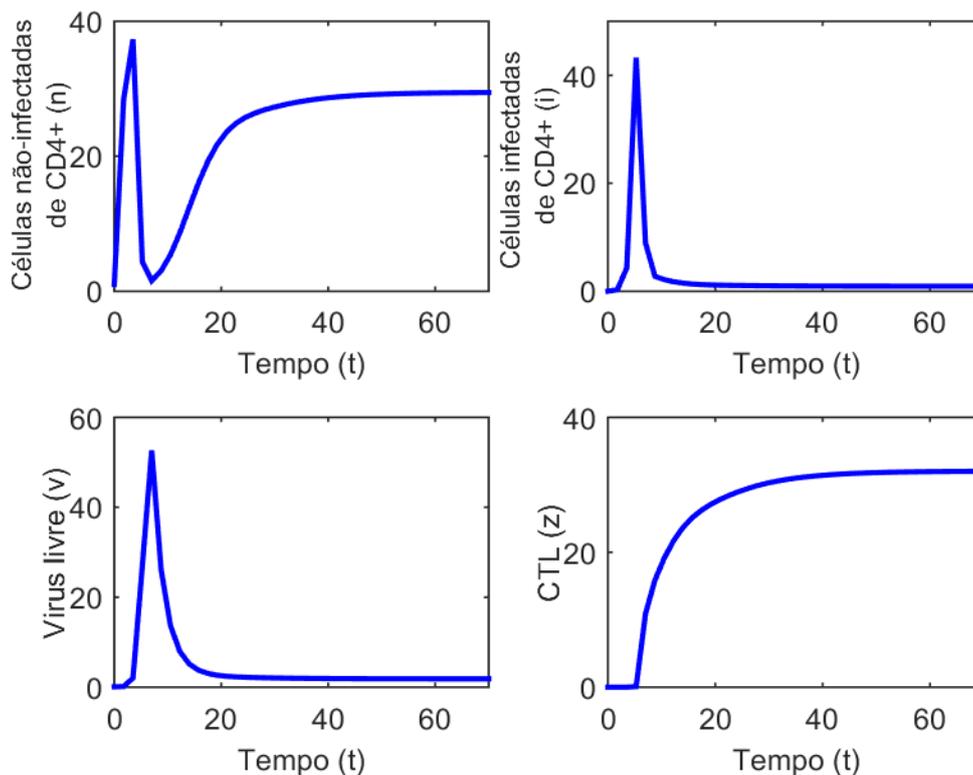


Figura 4: Solução numérica  $\Phi$  do sistema (2).

O princípio da extensão de Zadeh bidimensional é utilizado para obter uma aproximação numérica de uma solução fuzzy do sistema (2) considerando o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy triangulares, como é explanado na Seção 7, a seguir.

## 7 | SOLUÇÃO FUZZY DO MODELO DA DINÂMICA DO HIV COM RETARDO

Para determinar uma solução fuzzy considera-se o ajuste  $\beta = 0.333 e^{-0.005527t}$  que representa o indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio.

Primeiramente, o retardo e a taxa de mortalidade do vírus são construídos como números fuzzy triangulares  $\Gamma = (0.08, 0.5, 1)$  e  $U = (0.25, 0.5, 0.75)$ , e , respectivamente. As funções de pertinência estão dadas, respectivamente, por:

$$\mu_{\Gamma}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{0.42}(\tau - 0.08) & \text{se } 0.08 \leq \tau \leq 0.5 \\ \frac{1}{2(1 - \tau)} & \text{se } 0.5 < \tau \leq 1, \end{cases}$$

$$\mu_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{0.25}(u - 0.25) & \text{se } 0.25 \leq u \leq 0.5 \\ \frac{1}{0.25}(0.75 - u) & \text{se } 0.5 < u \leq 0.75. \end{cases}$$

Assim, o produto cartesiano fuzzy  $\Gamma \times U$  (ver Figura 5) de  $\Gamma$  e  $U$  é dado por

$$\mu_{\Gamma \times U}(\tau, u) = \min\{\mu_{\Gamma}(\tau), \mu_U(u)\}.$$

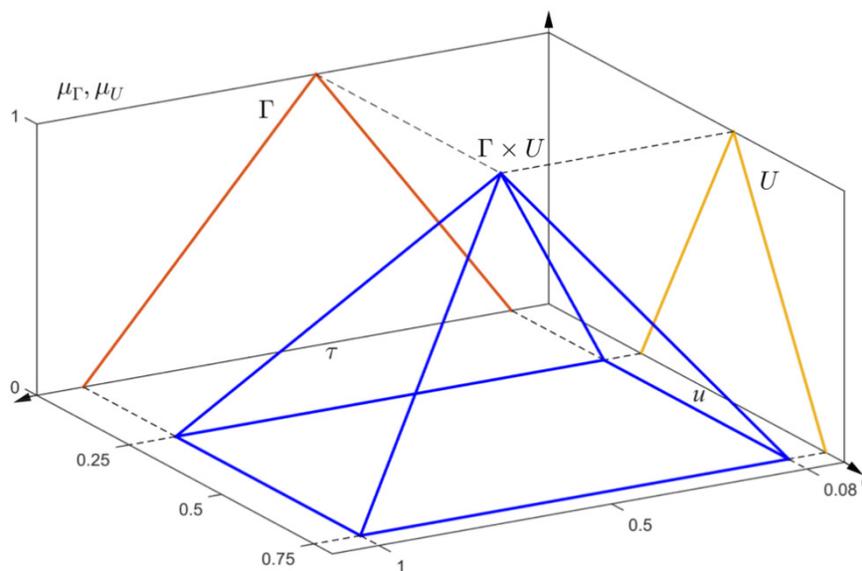


Figura 5: Produto cartesiano fuzzy  $\Gamma \times U$ .

Logo, para determinar uma solução fuzzy do sistema (2), o tempo  $t$  é fixado e definimos a seguinte função  $S_t(\tau, u) = \phi(t, \tau, u)$ .

A seguir, a extensão de Zadeh de via a função  $\Gamma \times U$ , fixa-se  $S_t$  e dada por:

$$\mu_{S_t(\Gamma, U)}(z) = \sup_{(\tau, u)} [\mu_{\Gamma \times U}(\tau, u)], \text{ em que } z = S_t(\tau, u).$$

Para cada instante  $t$ , aplicando a extensão de Zadeh bidimensional  $\Gamma \times U$  e o Teorema, implementa-se um algoritmo (ver subseção 7.1) para obter uma solução fuzzy do sistema (2).

## 7.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA (ALGORITMO)

Nesta subseção, o algoritmo para determinar uma solução fuzzy do sistema (2) é mostrado. Nas simulações numéricas e na fuzzificação, considera-se os números fuzzy triangulares mostrados na Figura 6. Na Figura 5,  $\mu_{\Gamma \times U}$  é a função de pertinência associada ao produto cartesiano fuzzy  $\Gamma \times U$ .

Com base no princípio de extensão de Zadeh bidimensional (Teorema) é desenvolvido

um algoritmo utilizando o software Matlab baseado no trabalho de Almeida et al (2018). Neste trabalho constrói-se uma fuzzificação de uma solução numérica para um modelo de equações diferenciais parciais através do princípio de extensão de Zadeh unidimensional.

Na Figura 6, do lado esquerdo pode-se observar o produto cartesiano fuzzy  $\Gamma \times U$ , os números fuzzy  $\Gamma$  e  $U$ , e os  $\alpha$ -níveis de  $\Gamma \times U$ . No lado direito, mostram-se os  $\alpha$ -níveis de  $\Gamma \times U$ . no plano para poder visualizar a divisão feita no algoritmo.

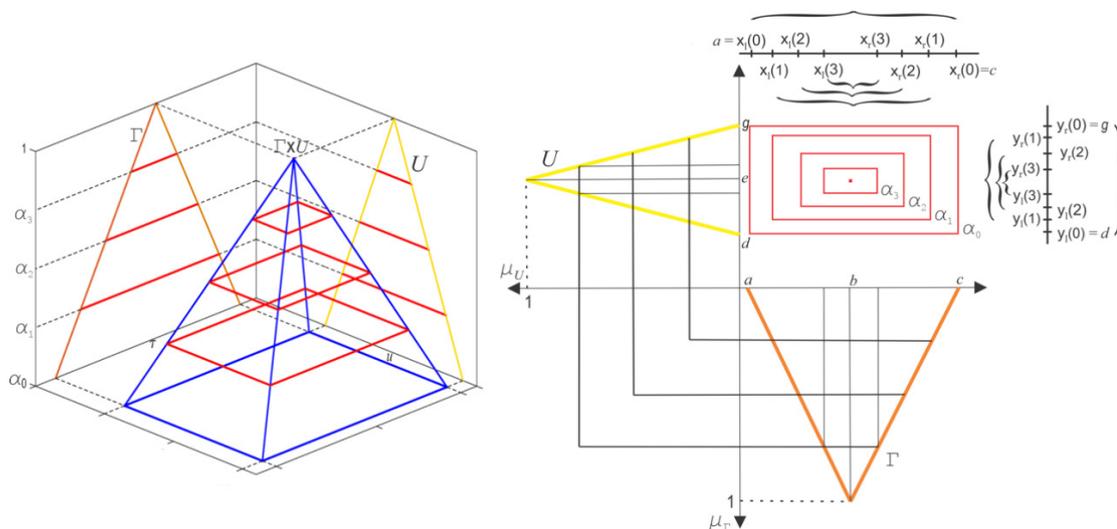


Figura 6: Produto cartesiano fuzzy  $\Gamma \times U$  e  $\alpha$  -níveis.

O primeiro passo do algoritmo é ilustrado na Figura 6, que exibe uma função de pertinência referente ao produto cartesiano fuzzy ( $\Gamma \times U$ ) dos números fuzzy  $\Gamma$  e  $U$ .

Uma afirmação utilizada no desenvolvimento do algoritmo descrita a seguir:

**LEMA:** Se  $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ , então é uma função contínua no intervalo  $[t_0, t_0 + A]$  (HALE, 1977).

O algoritmo de construção segue a seguinte sequência de passos:

- Para cada,  $\alpha_i$ ,  $0 \leq \alpha_i < 1$ , determine dois intervalos  $[x_l(i), x_r(i)]$  e  $[y_l(i), y_r(i)]$ .
- Comece com os intervalos centrais, considerando uma partição para cada um dos intervalos  $[x_l(i), x_r(i)]$  e  $[y_l(i), y_r(i)]$  com pontos igualmente espaçados em que  $i = n_\alpha - 1$ , em que  $n_\alpha$  é o número de  $\alpha$ -níveis (ver Figura 6).
- Obtenha a solução numérica do sistema (2) para cada ponto das partições mencionadas anteriormente

$$((\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)]).$$

- Note que estamos obtendo valores para  $S_t(\tau, u)$ , com

$$(\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)].$$

- Construa uma função de pertinência para  $S_t$  procurando primeiramente os valores mínimos e máximos do conjunto discreto  $S_t(\tau, u)$  (ver Teorema).
- Para cada  $i = n_\alpha - 1, n_\alpha - 2, \dots, 1$ , considere partições dos intervalos

$[x_l(i-1), x_l(i)], [x_r(i), x_r(i-1)], [y_l(i-1), y_l(i)], [y_r(i), y_r(i-1)]$ .

Utilize a continuidade da função  $S_t$  (Lema), os valores mínimos e máximos do conjunto discreto  $\{S_t(\tau, u)\}$ , em que

$$(\tau, u) \in [x_l(i-1), x_r(i-1)] \times [y_l(i-1), y_r(i-1)],$$

são obtidos por comparação entre os valores mínimos e máximos dos conjuntos discretos:

➤  $\{S_t(\tau, u)^{(l)}\}$  em que

$$(\tau, u)^{(l)} \in [x_l(i-1), x_l(i)] \times [y_l(i-1), y_l(i)];$$

➤  $\{S_t(\tau, u)^{(c)}\}$ , em que

$$(\tau, u)^{(c)} \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_r(i), y_l(i)],$$

➤  $\{S_t(\tau, u)^{(r)}\}$ , em que

$$(\tau, u)^{(r)} \in [x_r(i), x_r(i-1)] \times [y_r(i), y_r(i-1)].$$

- Conclua a construção de uma função de pertinência para  $S_t$  quando determinar o valor  $S_t(b, e)$ , em que  $b$  e  $e$  são os pontos que tem grau de pertinência 1.

## 8 | RESULTADO

Na Figura 7 é exposta a solução fuzzy do sistema (2) contendo suas quatro componentes através do princípio fuzzy bidimensional da extensão de Zadeh. Pode-se observar que, à medida que o tempo passa, as células não infectadas e os CTL aumentam até estabilizar em torno de um número. Notamos também que a carga viral e as células infectadas diminuem drasticamente com o tempo, este comportamento está de acordo com a literatura. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por ter grau de pertinência próximo de 1.

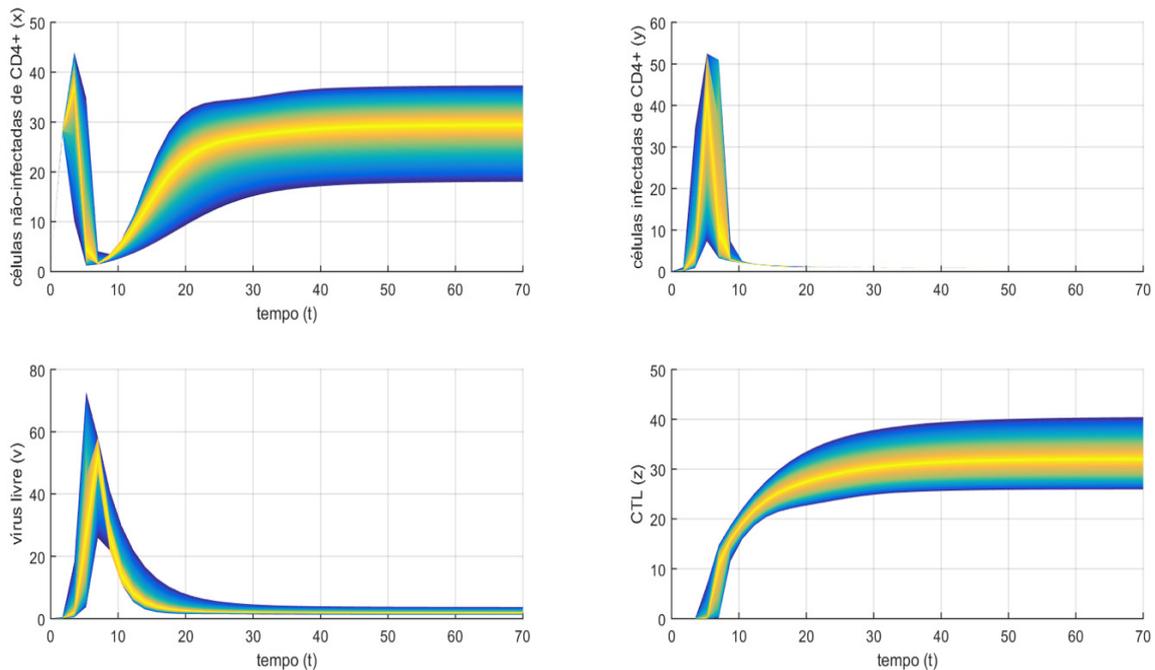


Figura 7: Fuzzificação da solução numérica  $\Phi$  do sistema (2) via extensão de Zadeh bidimensional.

A seguir é construída uma aproximação da solução fuzzy do sistema (1).

## 9 | SOLUÇÃO FUZZY DA DINÂMICA DO HIV SEM RETARDO

Para observar como o retardo influencia a solução dos sistemas (1) e (2), são considerados os mesmos parâmetros e taxas obtidas para o sistema de equações diferenciais com retardo (2) para o sistema de equações diferenciais ordinárias sem retardo (1). Além disso, utiliza-se o ajuste  $\beta = 0.333 e^{-0.005527t}$  para a taxa de infecção  $\beta(t)$  e as mesmas condições iniciais.

Considerando a taxa de mortalidade do vírus como parâmetro fuzzy triangular  $(0.25; 0.5; 0.75)$  e se determina uma solução fuzzy do sistema (1). Para isso, primeiramente se reescreve o sistema (1) como  $\dot{X}(t) = G(x(t), y(t), v(t), z(t), u)$ , com a mesma condição inicial dado no sistema (2),  $X_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0)$  e aplicando o teorema de existência e unicidade, obtém-se a única solução  $\phi(t, u)$  em algum aberto que é contínua (HALE, 1977). Logo, fixando  $t$ , se define a função  $\mathcal{F}^t(u) = \Phi(t, u)$  que é contínua. Finalmente, pelo Teorema, se determina uma solução fuzzy do sistema (1) (ver Figura 8).

Na Figura 8, mostra-se a solução fuzzy das quatro componentes do sistema (1). Além disso, a região de cor amarelo é a que melhor representa o fenômeno biológico, pois é onde a taxa de mortalidade do vírus  $u$ , que é um número fuzzy triangular, tem grau de pertinência próximo de 1.

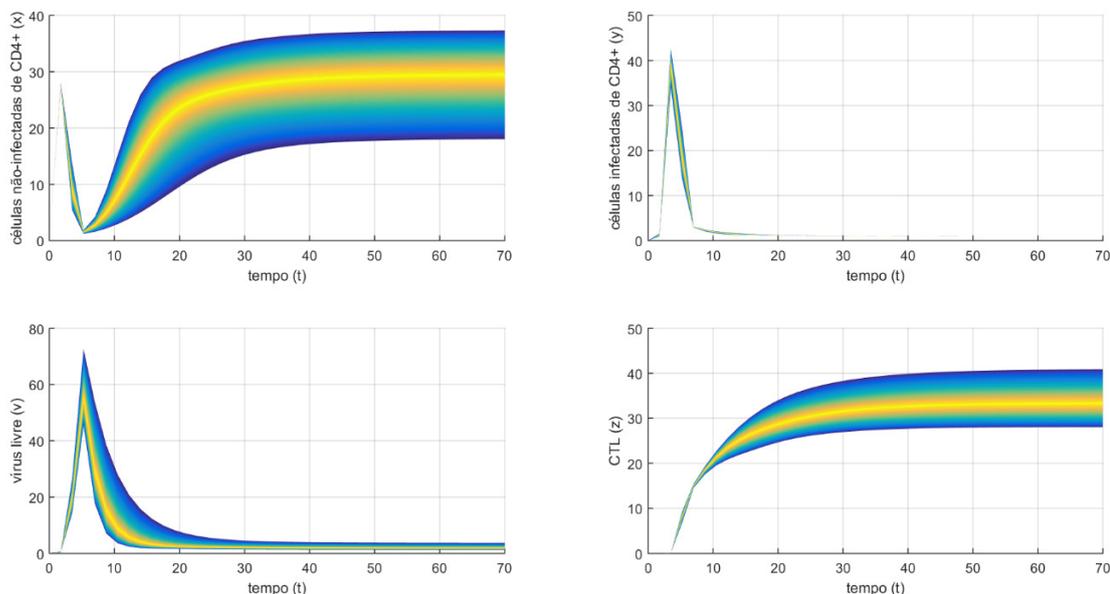


Figura 8 : Solução fuzzy do sistema sem retardo (1) com o parâmetro fuzzy triangular  $U$ .

Na Seção 9 descreve-se uma comparação entre a aproximação da solução fuzzy obtida na Seção 7 e a aproximação da solução fuzzy do modelo (1) construída nessa seção.

## 10 | COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MODELOS DO HIV

Nesta seção mostramos a comparação da solução fuzzy entre os modelos da dinâmica do HIV com retardo (2) e sem retardo (1).

Na Figura 9, observamos que as células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+, as partículas de vírus livres e o CTL apresentam o mesmo comportamento das soluções dos ambos sistemas com retardo (2) e sem retardo (1). No início, na solução fuzzy do sistema (1), as células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+ e o vírus livre, assumem pontos de máximos menores do que a solução fuzzy do sistema (2). O sistema (2) produz valores máximos e mínimos em tempos posteriores comparadas à solução do sistema (1). Finalmente, o CTL cresce previamente na solução do sistema (1) em comparação com a solução do sistema (2).

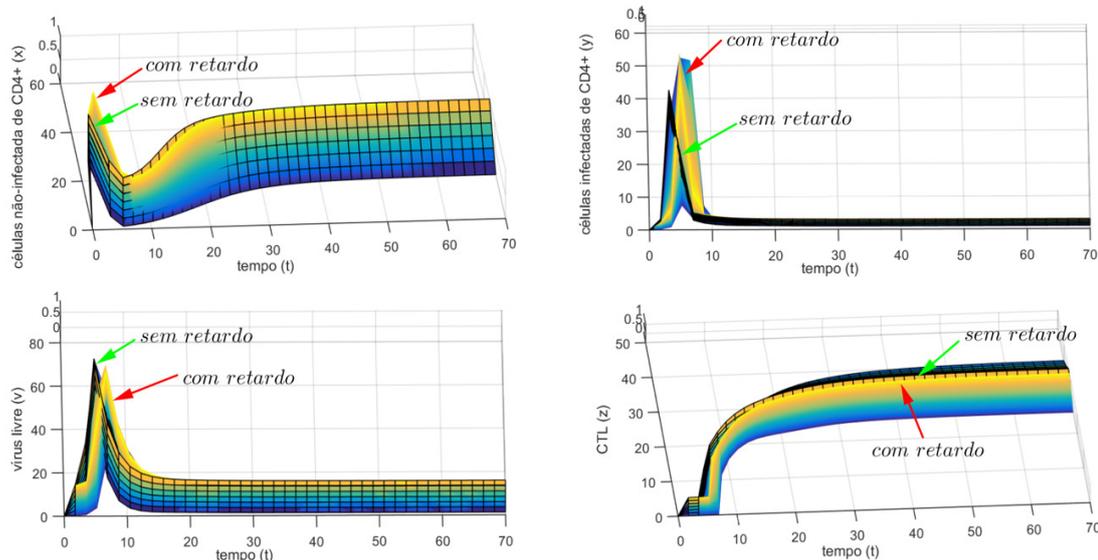


Figura 9: Comparação das soluções fuzzy dos sistemas (1) e (2).

## 11 | CONCLUSÃO

O comportamento do resultado da fuzzificação através da extensão de Zadeh bidimensional que relaciona dois parâmetros incertos da dinâmica do sistema com retardo (2), é qualitativamente similar à história natural da infecção do HIV (ver Figura 1), com a diferença que o modelo inclui o tratamento antirretroviral. De fato, a diferença é que, neste modelo (2), as células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ tendem a se estabilizar à medida que o tempo passa, enquanto na história natural decresce; o HIV no modelo (2) também se estabiliza com o tempo, contudo no histórico natural, aumenta quando o tempo passa. Além disso, para observar de que maneira o retardo influencia a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias que simula a dinâmica do HIV, tem sido feito uma comparação das soluções fuzzy dos sistemas sem retardo e com retardo. Conclui-se que, de fato, há uma alteração significativa do deslocamento das células e do vírus no tempo.

## AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece à CAPES pelo auxílio financeiro.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. G.; BERTONE, A. M. A.; JAFELICE R. M. **Fuzzification of the miscible displacement model in heterogeneous porous media.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, Amsterdam, v. 463., n. 1, p. 242-267, Julio 2018.

HALE, J. K. **Theory of Functional Differential Equations.** 3ª ed., USA, Applied Mathematical Science, Springer-Verlag New York Inc., 1977.

HERZ, A. V. M.; BONHOEFFER S.; ANDERSON R. M.; MAY R. M.; NOWAK M. A. **Viral dynamics in vivo: Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay.** Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, v. 93, n.14, p. 7247-7251, Julio 1996.

INOÑAN, A. K.; JAFELICE, R. M.; BERTONE, A. M. A. **Dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral com dois parâmetros fuzzy.** In XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2019, Uberlândia.

JAFELICE, R. M.; SILVA, C. A. F.; BARROS, L. C; BASSANEZI R. C. A. **A fuzzy delay approach for HIV dynamics using a cellular automaton,** Journal of Applied Mathematics, p. 1-9, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/378753>

NGUYEN, H. I. T. **A note on the extension principle for fuzzy sets.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, USA, v. 64, p. 369-380, Agosto 1978.

NOWAK, M. A.; BANGHAM, C. R. M. **Population dynamics of immune responses to persistent viruses.** Science, USA, v. 272, n. 5258, p. 74-79, Abril 1996.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design.** MIT Press, Cambridge, 1998.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais.** 2ª ed., Makron Books, São Paulo, 1996.

SILVA, C. A. F.; JAFELICE, R. S. M. **Estudo de modelos microscópico do HIV baseado em autômatos celulares.** In: X Semana da Matemática/ IX Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2010, Uberlândia.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Aplicações 53, 71, 74, 82, 105, 107, 165, 167, 168, 169, 192, 210, 212, 214, 217, 220, 232, 255, 258

Aprendizagem 8, 11, 12, 13, 18, 21, 22, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 61, 71, 79, 83, 86, 91, 92, 96, 98, 104, 125, 160, 162, 169, 170, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 267, 269, 270

Avaliação 3, 15, 16, 36, 91, 95, 116, 191, 192, 259, 260, 261, 262, 269, 270

### B

Bicentenário 199, 201

Biomatemática 133, 134, 148, 149

### C

Cálculo 46, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 103, 105, 110, 115, 129, 147, 164, 208, 209, 227, 266, 268, 270

Cálculo Diferencial 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 86

Ciência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 18, 31, 33, 39, 43, 46, 53, 54, 58, 79, 80, 82, 92, 96, 102, 104, 169, 170, 199, 203, 205, 206, 216, 218, 232, 233

Computacionais 147, 160, 161, 224

Conceito 34, 43, 45, 47, 55, 56, 57, 60, 61, 71, 74, 83, 126, 127, 170, 171, 172, 178, 179, 181, 182, 185, 192, 194, 199, 207, 261

Cubagem 105, 107, 108, 110, 112, 113, 114

### D

Docência 20, 21, 22, 23, 27, 28, 47

### E

Educação 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 21, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 61, 69, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 82, 91, 92, 95, 96, 98, 103, 104, 122, 124, 125, 162, 169, 173, 175, 176, 178, 180, 181, 186, 187, 189, 190, 198, 200, 202, 208, 261, 269, 270, 271

Ensino 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 83, 85, 86, 91, 92, 96, 98, 109, 115, 125, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 196, 197, 198, 199, 200,

201, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 269, 270, 271

Equação Diferencial Ordinária 155, 156, 219

Equations 63, 146, 149, 217, 218, 233, 234, 238, 243, 244, 248

Espacial 21, 22, 29, 58, 103, 105, 107, 111, 114

Estatística 55, 57, 61, 63, 64, 72, 114, 132, 164, 165, 176, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 258

Etnomatemática 15, 32, 95, 96, 97, 98, 103, 104, 114

## F

Formação 2, 8, 9, 12, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 47, 52, 53, 57, 70, 71, 79, 80, 86, 87, 91, 104, 151, 152, 179, 189, 196, 197, 198, 199, 202, 204, 205, 206, 261

Formação Continuada 12, 31, 33, 34, 35, 36

Funções 57, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 116, 135, 140, 160, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 174, 176, 190, 208, 217, 224, 233, 255

Functional-Integral 233, 234, 238, 241, 242, 243, 244

## G

GeoGebra 69, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 174, 175, 176

Geometria 14, 20, 21, 22, 28, 30, 72, 100, 103, 105, 106, 107, 108, 111, 114, 164, 175

Gestar 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40

## H

História da Matemática 13, 14, 19, 32, 199, 200, 207, 208

HIV 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 147

## I

Imunoterapia 148, 149, 150, 151, 152, 153

Inovações 35, 163, 165, 170, 171, 172, 173, 174, 176

Interdisciplinar 11, 13, 16, 17, 38, 163, 169

## J

Jogos 11, 13, 17, 18, 32, 33, 34, 35, 40, 45, 46, 180, 183, 186

## L

Lógica 7, 10, 129, 170, 185, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 255

## M

Matemática 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 106, 107, 109, 110, 111, 114, 115, 116, 117, 122, 123, 124, 125, 132, 147, 148, 149, 153, 155, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 186, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 207, 208, 243, 244, 245, 254, 255, 258, 260, 261, 262, 264, 270, 271

Matemática Crítica 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 186

Materiais Manipuláveis 31, 34, 35, 39, 45, 46

Método 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 16, 53, 63, 65, 71, 92, 99, 105, 110, 111, 113, 127, 130, 131, 135, 138, 155, 157, 158, 198, 215, 217, 221, 222, 223, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 254, 256, 258

Modelagem 32, 38, 39, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 81, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 128, 132, 133, 134, 136, 148, 149, 153, 228, 230, 232

Modelo Matemático 39, 52, 80, 81, 83, 84, 89, 94, 132, 148, 149, 151, 152, 153

## O

Operações Aritméticas 34, 41, 42

## P

Pescado 100, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 124

Porcentagem 115, 116, 117, 120, 121, 122, 123, 124, 137

Projeto 20, 39, 58, 75, 76, 127, 156, 163, 164, 165, 166, 169, 174, 175, 192, 197

## R

Racionalidade 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10

Recursos Didáticos 31, 33, 34, 39

Resolução 14, 15, 16, 32, 37, 38, 53, 65, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 97, 171, 179, 206, 217, 218, 220, 221, 224, 225, 228, 230, 231, 232, 266

Reticulado 254, 255

Retração 254, 255, 256, 257, 258

## S

Sarampo 62, 63, 64, 65, 67, 68

## T

Teatro 180, 181, 182, 183, 184, 186

Tecnologias 79, 116, 160, 161, 162, 175, 176

Teorema de Stokes 199, 206, 207

Terapia 132, 150, 152

Tora 105, 106, 107, 110, 112, 113

## V

Vacinação 62, 63, 64, 65, 67

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

 **Atena**  
Editora

Ano 2020

# INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br) 

[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br) 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br) 

 **Atena**  
Editora

Ano 2020