

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS
(ORGANIZADOR)



INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS
(ORGANIZADOR)



2020 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2020 Os autores
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora
Editora Chefe: Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Edição de Arte: Luiza Batista
Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais. Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Editora Chefe

Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira

Bibliotecário

Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Prof^a Dr^a Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia
Prof^a Dr^a Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof^a Dr^a Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^a Dr^a Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Prof^a Dr^a Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Prof^a Dr^a Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Prof^a Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Prof^a Dr^a Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof^a Dr^a Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof^a Dr^a Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof^a Dr^a Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof^a Dr^a Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof^a Dr^a Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof^a Dr^a Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná
Prof^a Dr^a Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Prof^a Dr^a Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof^a Dr^a Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Prof^a Dr^a Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Prof^a Dr^a Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Prof^a Dr^a Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves -Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof^a Dr^a Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Prof^a Dr^a Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina

Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Drª. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Me. Adalto Moreira Braz – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Dr. Fabiano Lemos Pereira – Prefeitura Municipal de Macaé
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ

Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Edição de Arte: Luiza Batista
Revisão: Os Autores
Organizador: José Elyton Batista dos Santos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática
[recurso eletrônico] / Organizador José Elyton Batista dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-175-6
DOI 10.22533/at.ed.756201607

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino.
3. Professores de matemática – Formação. I. Santos, José Elyton Batista dos.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

A coletânea “Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática” é uma obra composta por 27 artigos que tem como foco principal a difusão de conhecimentos na dimensão matemática perante a uma diversidade de trabalhos. O livro apresenta produções científicas do âmbito nacional e internacional em formato de relatos de casos, estudos bibliográficos e experimentais com temáticas relevantes para a comunidade científica, para professores em exercício e aos que estão aperfeiçoando seus conhecimentos acerca do que está sendo pesquisado, debatido e proposto no ensino da educação básica, bem como no ensino superior.

A relevância da matemática nos diferentes níveis educacionais é imensurável. Em todo canto e em toda situação a matemática está presente. Perante esse contexto, esta obra fomenta as pesquisas na área da educação matemática, dissemina os conhecimentos científicos a partir das diferentes visões teóricas e estudos contemplados pela referida área, a saber: etnomatemática, tecnologias, recursos didáticos, formação de professores e modelagem matemática. Também se insere nessa dimensão da difusão do conhecimento, as propostas interdisciplinares e conteudista para a educação básica e ensino superior, que visa primordialmente a aprendizagem com qualidade e de acordo com as exigências da sociedade contemporânea, isto é, um ensino próximo ao contexto do aluno.

Debruçar nessa coletânea permite ao leitor se aventurar por diferentes conhecimentos científicos. Ampliará seus conhecimentos teóricos, bem como, enriquecerá sua prática docente a partir dos relatos com materiais concretos, tecnológicos e problemas contextualizados. Todavia, desejo que esta obra contribua significativamente não apenas para o enriquecimento teórico e prático, mas como meio motivador para novas investigações e conseqüentemente para a difusão do conhecimento científico matemático.

José Elyton Batista dos Santos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
A CIÊNCIA É RACIONAL? TENTATIVA DE RESPOSTA EM PAUL FEYERABEND E EDGAR MORIN	
Deise Leandra Fontana Ettiène Cordeiro Guérios	
DOI 10.22533/at.ed.7562016071	
CAPÍTULO 2	11
A MATEMÁTICA COMO MEIO DE COMPREENSÃO E TRANSFORMAÇÃO DO MUNDO	
Andreza dos Santos Silva Brito Eloá de Fátima Velho Godinho Peixer Eliani Aparecida Busnardo Buemo	
DOI 10.22533/at.ed.7562016072	
CAPÍTULO 3	20
O ENSINO DAS CAPACIDADES ESPACIAIS COMO POSSIBILIDADES PARA A FORMAÇÃO NA DOCÊNCIA	
Leila Pessôa Da Costa Regina Maria Pavanello Sandra Regina D'Antonio Verrengia	
DOI 10.22533/at.ed.7562016073	
CAPÍTULO 4	31
OS IMPACTOS DOS RECURSOS DIDÁTICOS NA FORMAÇÃO DOCENTE NO PROGRAMA GESTAR MATEMÁTICA	
Sheyla Silva Thé Freitas Valmiro de Santiago Lima	
DOI 10.22533/at.ed.7562016074	
CAPÍTULO 5	41
OS NÚMEROS E AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS ELEMENTARES: DO CONHECIMENTO DOCENTE E DAS PRÁTICAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS DESENVOLVIDAS	
Leila Pessôa Da Costa Regina Maria Pavanello	
DOI 10.22533/at.ed.7562016075	
CAPÍTULO 6	49
CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E PARA O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE	
Silvana Cocco Dalvi Oscar Luiz Teixeira de Rezende Mirelly Katiene e Silva Boone Luciano Lessa Lorenzoni Agostinho Zanuncio Andressa Coco Lozório Ana Elisa Tomaz	
DOI 10.22533/at.ed.7562016076	
CAPÍTULO 7	62
MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A VACINAÇÃO CONTRA O SARAMPO	
Nathalia Kathleen Santana Reyes Douglas Souza de Albuquerque Thaís Madruga de Oliveira Mendonça	

Josiane da Silva Cordeiro Coelho

Claudia Mazza Dias

DOI 10.22533/at.ed.7562016077

CAPÍTULO 8 69

A MODELAGEM MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM FUTUROS PROFESSORES DA UNEMAT: APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA DE UMA VARIÁVEL REAL

Polyanna Possani da Costa Petry

Kátia Maria de Medeiros

Raul Abreu de Assis

DOI 10.22533/at.ed.7562016078

CAPÍTULO 9 81

CONTEXTUALIZANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA EXPERIÊNCIA ANCORADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Rudinei Alves dos Santos

Vanessa Pires Santos Maduro

Verônica Solimar dos Santos

Gilbson Santos Soares

Adriana Oliveira dos Santos Siqueira

DOI 10.22533/at.ed.7562016079

CAPÍTULO 10 95

A IMPORTÂNCIA DO SENTIDO DO SABER: A MATEMÁTICA PRESENTE NA ATIVIDADE PESQUEIRA NO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS

Lucivaldo Vieira Pinheiro

DOI 10.22533/at.ed.75620160710

CAPÍTULO 11 105

ANÁLISE DOS MÉTODOS DE CUBAGEM NA ZONA DA MATA DO ESTADO DE RONDÔNIA

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

DOI 10.22533/at.ed.75620160711

CAPÍTULO 12 115

A PORCENTAGEM E OS PESCADORES DO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS-PARÁ

Lucivaldo Vieira Pinheiro

Sandro Benício Goulart Castro

DOI 10.22533/at.ed.75620160712

CAPÍTULO 13 126

UMA NOVA ABORDAGEM DE RESIDÊNCIA INTELIGENTE BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA INSERIDA EM UMA REDE NEBULOSA

Suelio Lima de Alencar

Orlando Donato Rocha Filho

Danúbia Soares Pires

Lorena Maria Figueiredo Albuquerque

DOI 10.22533/at.ed.75620160713

CAPÍTULO 14	132
DINÂMICA DO HIV COM TERAPIA ANTIRRETROVIRAL VIA EXTENSÃO FUZZY BIDIMENSIONAL DE ZADEH	
Kassandra Elena Inoñan Alfaro Ana Maria Amarillo Bertone Rosana Sueli da Motta Jafelice	
DOI 10.22533/at.ed.75620160714	
CAPÍTULO 15	148
ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA IMUNOTERAPIA	
Marcelo Oliveira Esteves Pedro Nascimento Martins Ana Carolina Delgado Malvaccini Mendes Sarah Rachid Ozório Maria Zilda Carvalho Diniz Valeria Mattos da Rosa Flaviana Andrea Ribeiro	
DOI 10.22533/at.ed.75620160715	
CAPÍTULO 16	155
ANÁLISE DA DEFLEXÃO DE UMA VIGA APOIADA-ENGASTADA	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Rogério Zolin Bertechini	
DOI 10.22533/at.ed.75620160716	
CAPÍTULO 17	160
ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	
Felipe Klein Genz Odair Menuzzi	
DOI 10.22533/at.ed.75620160717	
CAPÍTULO 18	163
DIFUSÃO DE INOVAÇÕES: ANÁLISE DE UMA ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS	
Cassio Cristiano Giordano Douglas Borreio Maciel dos Santos Eliana Calixto Santos Jailma Ferreira Guimarães	
DOI 10.22533/at.ed.75620160718	
CAPÍTULO 19	178
PRÁTICAS TEATRAIS COMO ORGANIZADOR DIDÁTICO-PEDAGÓGICO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO	
Rizaldo da Silva Pereira Arthur Gonçalves Machado Júnior	
DOI 10.22533/at.ed.75620160719	
CAPÍTULO 20	187
A PESQUISA ESTATÍSTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA VYGOTSKYANA	
Celia Alves Pereira Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha Leonardo Sturion	
DOI 10.22533/at.ed.75620160720	

CAPÍTULO 21 199

O BICENTENÁRIO GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903)

Liliane Silva Nascimento Coelho

Ana Paula Nunes Felix

Miguel Chaquiam

DOI 10.22533/at.ed.75620160721

CAPÍTULO 22 210

DISCUSSÃO E ANÁLISE: UM PASSEIO NA LÓGICA LPA2v, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Clewton Rodrigues Rúbio

Natanael Camilo da Costa

Renato Lima dos Santos

Fabio Herrera Fernandes

Marcus Vinícius Oliveira Braga

Junior Cleber Alves Paiva

Rafael Luis da Silva

DOI 10.22533/at.ed.75620160722

CAPÍTULO 23 217

COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER E HEUN NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM PROVENIENTES DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA QUÍMICA

Anne Karolyne Maia Vieira

Matheus da Silva Menezes

DOI 10.22533/at.ed.75620160723

CAPÍTULO 24 233

A NUMERICAL APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF FREDHOLM FUNCTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS BY CHEBYSHEV TAU METHOD

Juarez dos Santos Azevedo

Suzete Maria Silva Afonso

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Adson Mota Rocha

DOI 10.22533/at.ed.75620160724

CAPÍTULO 25 245

REALCE DA IMAGEM COM PRESERVAÇÃO DO BRILHO MÉDIO BASADA NA TRANSFORMADA TOP-HAT MULTI-ESCALA

Julio César Mello Román

Horacio Legal-Ayala

José Luis Vázquez Noguera

Diego P. Pinto-Roa

DOI 10.22533/at.ed.75620160725

CAPÍTULO 26 253

EXTENSÃO VIA E-OPERADOR DE IMPLICAÇÕES FUZZY VALORADAS EM RETICULADO

Mariana Rosas Ribeiro

Eduardo Silva Palmeira

Wendy Díaz Veldés

Giovanny Snaider Barrera Ramos

DOI 10.22533/at.ed.75620160726

CAPÍTULO 27 258

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: UMA DISCUSSÃO ACERCA DO POTENCIAL DE UMA PROVA ESCRITA EM FASES E INTERVENÇÕES ESCRITAS

Celia Alves Pereira

Marcele Tavares Mendes

Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha

DOI 10.22533/at.ed.75620160727

SOBRE O ORGANIZADOR..... 270

ÍNDICE REMISSIVO 271

A NUMERICAL APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF FREDHOLM FUNCTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS BY CHEBYSHEV TAU METHOD

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 03/04/2020

Juarez dos Santos Azevedo

Universidade Federal da Bahia, Instituto de
Ciência, Tecnologia e Inovação - ICTI
Camaçari – Bahia

<http://lattes.cnpq.br/1750344103498728>

Suzete Maria Silva Afonso

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto
de Geociências e Ciências Exatas
Rio Claro – São Paulo

<http://lattes.cnpq.br/3759335100023544>

<https://orcid.org/0000-0003-3070-5856>

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Universidade Federal do Recôncavo da
Bahia, CETEC - Centro de Ciências Exatas e
Tecnológicas

Cruz das Almas – Bahia

<http://lattes.cnpq.br/1848784077302555>

<https://orcid.org/0000-0003-1801-4227>

Adson Mota Rocha

Universidade Federal do Recôncavo da
Bahia, CETEC - Centro de Ciências Exatas e
Tecnológicas

Cruz das Almas – Bahia

<http://lattes.cnpq.br/5772070728434925>

ABSTRACT: In this work we consider the general functional-integral equation:

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) + h(x), \quad x \in [0,1]$$

We use Chebyshev Tau method to determine the approximations of the solutions and provide a convergence analysis in the space of square-integrable function. We added some numerical experiments to illustrate the results of this work.

KEYWORDS: Fredholm functional-integral equation, Chebyshev Tau method.

UMA APROXIMAÇÃO NUMÉRICA PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES INTEGRAL-FUNCIONAIS DE FREDHOLM PELO MÉTODO DE TAU CHEBYSHEV

RESUMO: Neste trabalho consideramos a equação integral-funcional geral:

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) + h(x), \quad x \in [0,1]$$

Usamos o método de Tau Chebychev para determinar as aproximações das soluções e fornecemos uma análise de convergência no espaço das funções quadrado integráveis. Adicionamos alguns exemplos numéricos para ilustrar os resultados deste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Equação integral-

1 | INTRODUCTION

Functional-integral equations of several type have been studied in a vast literature (Browder, 1971, Sheng et al., 2016, Rocha et al., 2018) and references therein. Motivated by these works, we consider the following nonlinear functional-integral

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) + h(x), \quad x \in [0,1]. \quad (1.1)$$

Equations of this type arise very often in many applications in engineering, economics and mathematical physics (Banaś; Knap, 1989, Emmanuele, 1991), justifying the importance of your study.

The main purpose is to implement the Tau method for nonlinear functional-integral equation and produce an error analysis which theoretically justifies an exponential-like rate of convergence. The numerical discretization is done with the Chebyshev Tau method (Ansari and Mokhtary, 2019), resulting in a system of nonlinear equations that are subsequently solved by using a Picard iterative method (Rocha et al., 2018). In this step we show that the approximate solution converges, under particular conditions, to an exact solution in space of square-integrable function, and finally analyze the rate of its convergence.

In the following section, we present preliminary concepts and highlight that, under certain conditions, eq. (1.1) has a unique solution in $L^2([0,1])$ space, which can be obtained as the limit of successive approximations.

2 | PRELIMINARIES

Let $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lebesgue measurable function. We say that h is square integrable in $[0,1]$ or that h belongs to $L^2([0,1])$ space if

$$\int_0^1 |h(x)|^2 dx < \infty.$$

Moreover, if $h \in L^2([0,1])$, we define

$$\|h\|_2 = \left(\int_0^1 |h(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

In what follows, we assume that $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is square integrable in $[0,1]$ and the

function $f: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in (1.1) satisfies the Caratheodory conditions, that is,

- i. $f(x, y)$ is continuous in x for each fixed y ;
- ii. $f(x, y)$ is measurable in x for each fixed y ;
- iii. There is a non-negative Lebesgue-integrable function $m: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y)| \leq m(x), \text{ for all } (x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Theorem 2.1. Assume that the following conditions are satisfied:

(A1) There are a non-negative function $h_1 \in L^2([0,1])$ and a non-negative constant b_1 such that

$$|f(x, y)| \leq h_1(x) + b_1|y|,$$

for almost every $x \in [0,1], y \in \mathbb{R}$.

(A2) The kernel $k(x, \cdot)$ is measurable, belongs to the space for all $L^2([0,1]), x \in [0,1]$, and

$$\left(\int_0^1 |\kappa(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq M_1(x), \text{ for any } x \in [0,1],$$

where M_1 is a non-negative function in $L^2([0,1])$.

(A3) The function $g: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies Caratheodory conditions and

$$|g(s, z)| \leq b_0(s) + c_0|z|,$$

where b_0 is a non-negative function in $L^2([0,1])$ and C_0 is a non-negative constant.

(A4) The function $f: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies Lipschitz condition in the second variable, i.e., there is $M > 0$ such that

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \text{ for any } x \in [0,1] \text{ and } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

(A5) The function $g: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies Lipschitz condition in the second variable, i.e., there is $L > 0$ such that

$$|g(s, z_1) - g(s, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \text{ for any } s \in [0,1] \text{ and } z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Under such hypotheses, the successive approximation

$$\begin{cases} u_0(x) = 0, \\ u_{n+1}(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_n(y))dy\right) + h(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

converges almost everywhere to the exact solution of (1.1) provided

$$\int_0^1 C^2 |M_1(x)|^2 dx := \Gamma^2 < 1, \quad \text{where } C = ML. \quad (2.1)$$

Therefore, eq. (1.1) has a unique solution in $L^2([0,1])$, which can be obtained as the limit of successive approximations.

Proof. The ideas to prove this result follow from (Afonso et al., 2019). Basically, we consider the operator

$$(Au)(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) + h(x), \quad x \in [0,1],$$

and we show that it is a map from $L^2([0,1])$ into $L^2([0,1])$.

By virtue of condition (2.1), $A: L^2([0,1]) \rightarrow L^2([0,1])$ is a contractive map. We apply Banach's fixed point theorem and obtain a unique solution to the abstract equation $Au = u$. Consequently, it is possible to guarantee the unique solvability of (1.1), where the method of successive approximation converges for starting point $u_0 \equiv 0$.

3 | NUMERICAL METHOD

Let us suppose that

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x), \quad (3.1)$$

and $u_N(x)$ represents the Tau approximation, i.e.,

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) = \mathbf{u}_N^T \mathbf{\Phi}(x), \quad (3.2)$$

where

$$\mathbf{u}_N = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, \dots)^T \text{ and } \mathbf{\Phi}(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x), 0, \dots)^T$$

are shifted Chebyshev polynomials of degree defined on interval $[0,1]$.

Assume also that

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \phi_j(x) = \mathbf{h}_N^T \mathbf{\Phi}(x), \quad (3.3)$$

with $\mathbf{h}_N = (h_1, h_2, \dots, h_N, 0, \dots)^T$.

Substituting relations (3.2) and (3.3) in (1.1), we get

$$\mathbf{u}_N^T \mathbf{\Phi}(x) = \mathbf{h}_N^T \mathbf{\Phi}(x) + f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, \mathbf{u}_N^T \mathbf{\Phi}(y))dy\right). \quad (3.4)$$

Let $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ be the Chebyshev nodes and the vector that contains values of the integral (3.4) at the same nodes. Following (Driscoll, 2010), the integral into (3.4) can be approximated in matrix form

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{cccc} \kappa(x_1, x_1) & \kappa(x_1, x_2) & \cdots & \kappa(x_1, x_N) \\ \kappa(x_2, x_1) & \kappa(x_2, x_2) & \cdots & \kappa(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(x_N, x_1) & \kappa(x_N, x_2) & \cdots & \kappa(x_N, x_N) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_N \end{array} \right] g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N^T \Phi(\mathbf{x})), \quad (3.5)$$

where

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N^T \Phi(\mathbf{x})) = \left(g(x_1, \mathbf{u}_N^T \Phi(x_1)), g(x_2, \mathbf{u}_N^T \Phi(x_2)), \dots, g(x_N, \mathbf{u}_N^T \Phi(x_N)) \right)^T$$

and the set $\{w_i\}$ for fixed i are quadrature weights relative to integration interval $[0, 1]$, with the integration nodes $\{x_i\}$. For more details on the numerical implementation of this integral see (Trif; Ionescu, 2011).

Note that expression (3.5) can be written as

$$\mathbf{V} = \mathbf{KW}g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N^T \Phi(\mathbf{x})). \quad (3.6)$$

Using collocation about N Chebyshev nodes and substituting relation (3.6) into (3.4), we obtain

$$\mathbf{u}_N \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_N^T \Phi(\mathbf{x}) + f\left(\mathbf{x}, \mathbf{KW}g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N^T \Phi(\mathbf{x}))\right).$$

Due to the nonlinearity of this expression, we resort to an iterative procedure. In this case we choose the Picard iterative method that consists of determining a sequence (\mathbf{u}_N^{k+1}) in which the following relation of recurrence holds

$$\mathbf{u}_N^{(k+1)} \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_N^T \Phi(\mathbf{x}) + f\left(\mathbf{x}, \mathbf{KW}g\left(\mathbf{x}, (\mathbf{u}_N^{(k)})^T \Phi(\mathbf{x})\right)\right), \quad k \geq 0.$$

The procedure is terminated provided that one of the following criteria is satisfied

$$k > k_{max} \quad \text{or} \quad r_k = \|\mathbf{u}_N^{(k)} - \mathbf{u}_N^{(k-1)}\| < tol_1.$$

Once we get the solution vector $\mathbf{u}_N^{(k)}$ we have to relate it to the basis functions $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ as follows

$$\mathbf{u}_N^{(k)} \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{(k)} \phi_j(\mathbf{x}) = u_N^{(k)}(\mathbf{x}).$$

Finally, we obtain a solution $u_N^{(k)}$ that must satisfies

$$u_N^{(k)}(x) = h(x) + f\left(x, \int_0^1 k(x, y)g\left(y, u_N^{(k)}(y)\right)dy\right) + h(x), \forall x \in [0, 1].$$

4 | CONVERGENCE ANALYSIS

We provide a convergence analysis of the proposed method for the numerical solution of (1.1) In our subsequent analysis, some definitions and results are needed.

Firstly, we introduce the orthogonal projection

$$\Pi_N : L^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{P}_N$$

which is a mapping that, for any $v \in L^2([0, 1])$, satisfies

$$(v - \Pi_N v, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_N,$$

where \mathcal{P}_N is the space of all algebraic polynomials of degree up to N . Concerning the truncation error of a Chebyshev interpolation, the following estimates holds (Atkinson; Han, 2009)

$$\|v - \Pi_N v\|_2 \leq N^{-m} |v|_m, \quad |v|_m = \left\| \frac{\partial^m v}{\partial x^m} \right\|_2 \quad (4.1)$$

for $m > 0$.

The next result is devoted to provide a convergence analysis for the numerical scheme showing that the rate of convergence is exponential. Consider integral operator

$$(Ku)(x) = \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy$$

and Nemytskii operator

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)).$$

Theorem 4.1. Let u_N be the Tau approximation $e_N(x) = u(x) - u_N(x)$ of the exact solution of the Fredholm nonlinear functional-integral equations and consider the error function $e_N(x) = u(x) - u_N(x)$ and the operator

$$(FKu_N)(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right).$$

If the functions k, f and g are sufficiently smooth and satisfy assumptions (A2), (A4) and (A5), respectively, moreover condition is satisfied, then we have

$$\|e_N\|_2 \leq D(N^{-k_1}|h|_{k_1} + N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} + N^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2),$$

where $k_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, given that N is sufficiently large and D is a constant independent of N .

Proof. The ideas of this proof come from (Ansari; Mokhtary, 2019). Let

$$\begin{aligned} e_N(x) &= h(x) - \Pi_N h(x) \\ &\quad + f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) - \Pi_N f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x, y)g(y, u(y))dy\right) \\ &= (FKu)(x) - (FKu_N)(x) + J_0 + J_1 + J_2 \end{aligned}$$

and consider the difference

$$J_0 = h(x) - \Pi_N h(x),$$

with

$$J_1 = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right) - \Pi_N f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right),$$

and

$$J_2 = \Pi_N\left(f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right) - f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right)\right).$$

Since f and g are Lipschitz in the second variable, from conditions (A4) and (A5), we have

$$\begin{aligned} |e_N(x)| &\leq |(FKu)(x) - (FKu_N)(x)| + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq ML \left| \int_0^1 \kappa(x, y)e_N(y)dy \right| + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq ML \left(\int_0^1 |\kappa(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |e_N(y)|^2 dy \right)^{1/2} + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq MLM_1(x) \left(\int_0^1 |e_N(y)|^2 dy \right)^{1/2} + |J_0| + |J_1| + |J_2|, \end{aligned}$$

where the last inequality was obtained using condition (A2).

Applying the L^2 norm for both members of the above inequality we have

$$\|e_N\|_2 \leq \Gamma \|e_N\|_2 + \|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2,$$

whence we have

$$(1 - \Gamma)\|e_N\|_2 \leq \|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2.$$

By (2.1), $\Gamma < 1$, thus we obtain $C_1 > 0$ such that

$$\|e_N\|_2 \leq C_1 (\|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2). \quad (4.2)$$

Employing inequality (4.1), an estimate for J_0 is given below

$$\|J_0\|_2 \leq N^{-k_1} |h|_{k_1}, \quad (4.3)$$

where $K_2 > 0$ exists by virtue of smoothness of

Using again , we get

$$\|J_1\|_2 \leq N^{-k_2} |(FKu_N)(x)|_{k_2}, \quad (4.4)$$

where $k_2 > 0$ exists due to smoothness of f .

Since Π_N is an orthogonal projection, then $\|\Pi_N\|_2 = 1$. Moreover, as f and g are Lipschitz in the second variable and , we get

$$\begin{aligned} \|J_2\|_2 &\leq \left\| f\left(x, \int_0^1 \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right) - f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x, y)g(y, u_N(y))dy\right) \right\|_2 \\ &\leq M \left\| \int_0^1 |\kappa(x, y) - \Pi_N \kappa(x, y)| |g(y, u_N(y)) - g(0,0)| dy \right\|_2 \\ &\leq ML \left\| \int_0^1 |\kappa(x, y) - \Pi_N \kappa(x, y)| |u_N(y)| dy \right\|_2 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} C \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (\kappa(x, y) - \Pi_N \kappa(x, y))^2 dy \right) \left(\int_0^1 (u_N(y))^2 dy \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq CN^{-k_3} |\kappa|_{k_3} \|u_N\|_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where $k_3 > 0$ exists thanks to smoothness of κ , and $C = ML$ as in (2.1). We note that to obtain inequality (*) it was used Hölder's inequality (Folland, 1999).

Combining (4.3), (4.4) and (4.5) in (4.2) we have

$$\|e_N\|_2 \leq C_1 (N^{-k_1} |h|_{k_1} + N^{-k_2} |(FKu_N)(x)|_{k_2} + CN^{-k_3} |\kappa|_{k_3} \|u_N\|_2). \quad (4.6)$$

Let $C_2 \geq \max\{1, C\}$ be a constant such that

$$N^{-k_1} |h|_{k_1} \leq C_2 N^{-k_1} |h|_{k_1}, \quad (4.7)$$

$$N^{-k_2} |(FKu_N)(x)|_{k_2} \leq C_2 N^{-k_2} |(FKu_N)(x)|_{k_2} \quad (4.8)$$

and

$$CN^{-k_3} |\kappa|_{k_3} \|u_N\|_2 \leq C_2 N^{-k_3} |\kappa|_{k_3} \|u_N\|_2. \quad (4.9)$$

Therefore, $D = C_1 C_2$ taking , we conclude, by (4.6), (4.7), (4.8) and (4.9), that

$$\|e_N\|_2 \leq D(N^{-k_1}|h|_{k_1} + N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} + N^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2),$$

which completes the proof.

5 | NUMERICAL EXAMPLES

For the numerical application, we use Picard iterative process and admit that the convergence is achieved when the stopping criterion has tolerance $tol = 1e - 12$ in L^2 in norm and $tol = 1e - 12$ in L^2 norm and $k_{max} = 1000$. The error was computed using the following relative measures

$$err = \frac{\|u - u_N^{(k)}\|_2}{\|u\|_2}. \quad (5.1)$$

Here we employ the Chebyshev series and in the computation MATLAB package Chebpack available at the Mathworks website:

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32227-chebpack> as a stand-alone algorithm for solving nonlinear systems and investigating the performance of the numerical solution.

Example 1. Consider the nonlinear functional-integral equation with exact solution $u(x) = \sin(x)$ Take

$$\kappa(x, y) = \sin(x + y), \quad f(x, y) = \sin(y)$$

and

$$g(x, y) = \frac{|y|}{10}.$$

The function is defined by

$$h(x) = -\sin\left(\frac{(\cos(x) - \cos(1+x)\sin(1))}{20}\right) + \sin(x).$$

We point out that all of the hypotheses of Theorem 2.1 are satisfied and there exists a unique solution for this equation. Furthermore, the hypotheses of Theorem 4.1 are also satisfied and we can guarantee the convergence for this solution.

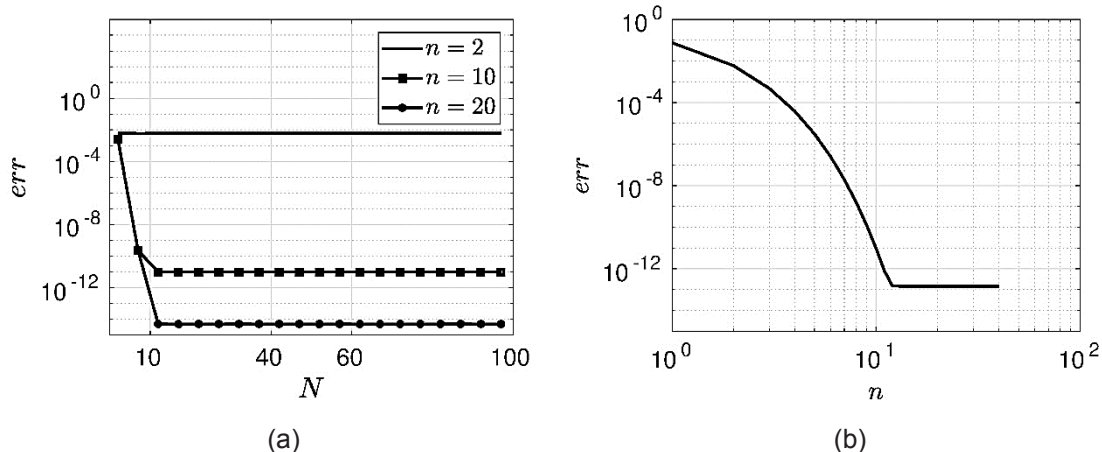


Figure 1. Relative error corresponding to Example 1: (a) of the numerical solution in relation to number of integration points N putting the iterations $n = 2, 10, 20$ using semi-log scale; (b) of the numerical solution on iterations number from to 0 using log-log scale.

Figure 1(a) establishes the minimum number of integration points in terms of error on L^2 norm. We noticed that 10 integration points are enough to have convergence as the number of iterations increases. It suggests us to conclude that few integration points are sufficient to preserve the convergence of the method when the hypotheses of Theorem 4.1 are satisfied.

Figure 1(b) depicts the exponential decay of the relative error considering a variation in the iterations number n , from 1 to 40. Recalling Fig. 1(a), note that for $n > 10$ this decay becomes almost imperceptible.

Example 2. Let us consider the nonlinear functional-integral equation:

$$u(x) = x^2 - \sin\left(\frac{51 + 8x}{192}\right) - \sin\left(\int_0^1 \kappa(x, y)u(y) dy\right),$$

with kernel

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1 + x - y & 0 < y \leq 1/2, \\ -1 & \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Here the exact solution in is given by

$$u(x) = x^2.$$

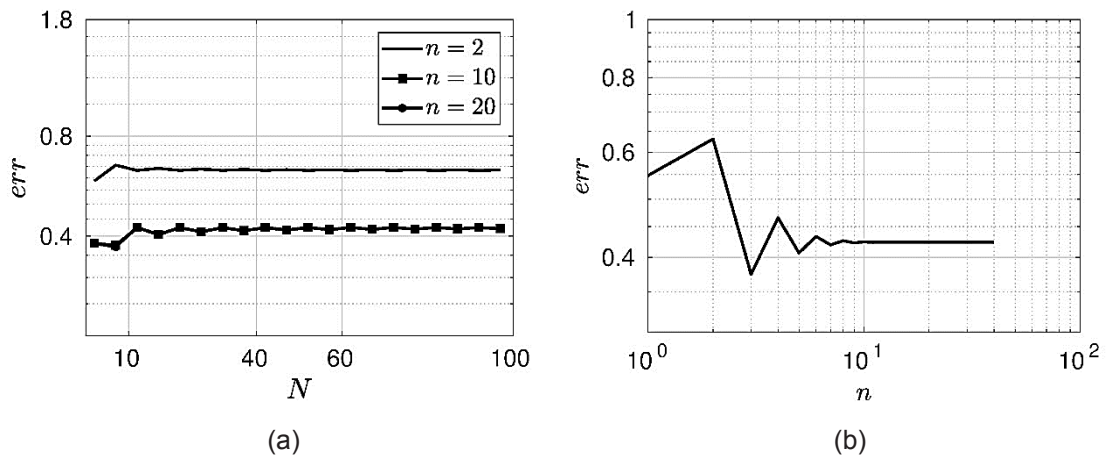


Figure 2. Relative error corresponding to Example 2: (a) of the numerical solution in relation to number of integration points N putting the iterations $n = 2, 10, 20$ using semi-log scale; (b) of the numerical solution on iterations number n , from 1 to 40 using log-log scale.

In this example we can see that the kernel is discontinuous, contrary to the hypotheses of Theorem 4.1. Consequently, disagreeing with the previous experiment, Fig. 2(a) shows that the increase in the number of integration points does not contribute satisfactorily to the convergence of the method. This is confirmed by Fig. 2(b), whose exponential convergence is violated.

CONCLUSION

This paper proposes a numerical method for Fredholm functional-integral equations based on Chebyshev basis functions considering the Tau method. The hypotheses of Theorem 2.1 are sufficient for conclude that the functional-integral equation (1.1) has a unique solution in $L^2([0,1])$ space. Moreover, Example 1 shows that assumptions from Theorem 4.1 were satisfactory to ensure the convergence of the Tau method for a moderate number of iterations. On the other hand, through Example 2 we can infer that piecewise continuous kernel causes damage to exponential convergence, restricting the results to a sufficiently regular kernel.

REFERENCES

- AFONSO, S. M. et al. **Existence, uniqueness, and approximation for solutions of a functional-integral equation in L_p spaces**. TEMA, São Carlos, n. 3, v. 20, p. 403 – 415, 2019.
- ANSARI, H.; MOKHTARY, P. **Computational Legendre Tau method for Volterra Hammerstein pantograph integral equations**. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Iran, v. 45, p. 475-493, April 2019.
- ATKINSON, K.; HAN, W. **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework**, Texts in Applied Mathematics, New York: Springer, 2009. 576 p.
- BANAŚ, J.; KNAP, Z. **Integrable solutions of a functional-integral equation**. Revista Matemática de la

Universidad Complutense de Madrid. Madrid, n. 1, v. 2, p. 31-38, 1989.

BROWDER, F. E. **Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type**. In: Zarantonello, E. H. (Ed.), Contributions to Nonlinear Functional Analysis. New York: Academic Press, 1971, p. 425 – 500.

DE FIGUEIREDO, D. G.; GUPTA, C. P. **On the variational method for the existence of solutions of nonlinear equations of Hammerstein type**. Proceedings of the American Mathematical Society, Providence, n. 2, v. 40, p. 470 – 476, October 1973.

DRISCOLL, T. A. **Automatic spectral collocation for integral, integro-differential, and integrally reformulated differential equations**. Journal of Computational Physics, United States, n. 17, v. 229, p. 5980 – 5998, August 2010.

EMMANUELE, G. **About the existence of integrable solutions of a functional-integral equation**. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. Madrid, n. 1, v. 4, p. 65 - 69, 1991.

EMMANUELE, G. **Integrable solutions of a functional-integral equation**. The Journal of Integral Equations and Applications, n. 1, v. 4, p. 89 – 94, 1992.

FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. Pure and Applied Mathematics, New Jersey: Wiley, 1999.

IBRAHIM, I. A. **On the existence of solutions of functional integral equation of Urysohn type**. Computers & Mathematics with Applications, n. 10, v. 57, p. 1609 – 1614, 2009.

KAROUI, A. **On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations**. Applied Mathematics Letters, n. 3, v. 18, p. 299 – 305, 2005.

KWAPISZ, M. **Bielecki's method, existence and uniqueness results for Volterra integral equations in L_p space**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, n. 2, v. 154, p. 403 – 416, 1991.

ROCHA, A. et al. **Numerical analysis of a collocation method for functional integral equations**. Applied Numerical Mathematics, v. 134, p. 31 – 45, 2018.

SHENG, C.; WANG, Z.-Q; GUO, B.-Y. **An hp-spectral collocation method for nonlinear Volterra functional integro-differential equations with delays**. Applied Numerical Mathematics, v. 105, p. 1-24, 2016.

TRIF, D.; IONESCU, C. M. **Matrix based operatorial approach to differential and integral problems**. In MATLAB-A Ubiquitous Tool for the Practical Engineer. IntechOpen, 2011.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Aplicações 53, 71, 74, 82, 105, 107, 165, 167, 168, 169, 192, 210, 212, 214, 217, 220, 232, 255, 258

Aprendizagem 8, 11, 12, 13, 18, 21, 22, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 61, 71, 79, 83, 86, 91, 92, 96, 98, 104, 125, 160, 162, 169, 170, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 267, 269, 270

Avaliação 3, 15, 16, 36, 91, 95, 116, 191, 192, 259, 260, 261, 262, 269, 270

B

Bicentenário 199, 201

Biomatemática 133, 134, 148, 149

C

Cálculo 46, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 103, 105, 110, 115, 129, 147, 164, 208, 209, 227, 266, 268, 270

Cálculo Diferencial 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 86

Ciência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 18, 31, 33, 39, 43, 46, 53, 54, 58, 79, 80, 82, 92, 96, 102, 104, 169, 170, 199, 203, 205, 206, 216, 218, 232, 233

Computacionais 147, 160, 161, 224

Conceito 34, 43, 45, 47, 55, 56, 57, 60, 61, 71, 74, 83, 126, 127, 170, 171, 172, 178, 179, 181, 182, 185, 192, 194, 199, 207, 261

Cubagem 105, 107, 108, 110, 112, 113, 114

D

Docência 20, 21, 22, 23, 27, 28, 47

E

Educação 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 21, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 61, 69, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 82, 91, 92, 95, 96, 98, 103, 104, 122, 124, 125, 162, 169, 173, 175, 176, 178, 180, 181, 186, 187, 189, 190, 198, 200, 202, 208, 261, 269, 270, 271

Ensino 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 83, 85, 86, 91, 92, 96, 98, 109, 115, 125, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 196, 197, 198, 199, 200,

201, 208, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 269, 270, 271

Equação Diferencial Ordinária 155, 156, 219

Equations 63, 146, 149, 217, 218, 233, 234, 238, 243, 244, 248

Espacial 21, 22, 29, 58, 103, 105, 107, 111, 114

Estatística 55, 57, 61, 63, 64, 72, 114, 132, 164, 165, 176, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 258

Etnomatemática 15, 32, 95, 96, 97, 98, 103, 104, 114

F

Formação 2, 8, 9, 12, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 47, 52, 53, 57, 70, 71, 79, 80, 86, 87, 91, 104, 151, 152, 179, 189, 196, 197, 198, 199, 202, 204, 205, 206, 261

Formação Continuada 12, 31, 33, 34, 35, 36

Funções 57, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 116, 135, 140, 160, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 174, 176, 190, 208, 217, 224, 233, 255

Functional-Integral 233, 234, 238, 241, 242, 243, 244

G

GeoGebra 69, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 174, 175, 176

Geometria 14, 20, 21, 22, 28, 30, 72, 100, 103, 105, 106, 107, 108, 111, 114, 164, 175

Gestar 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40

H

História da Matemática 13, 14, 19, 32, 199, 200, 207, 208

HIV 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 147

I

Imunoterapia 148, 149, 150, 151, 152, 153

Inovações 35, 163, 165, 170, 171, 172, 173, 174, 176

Interdisciplinar 11, 13, 16, 17, 38, 163, 169

J

Jogos 11, 13, 17, 18, 32, 33, 34, 35, 40, 45, 46, 180, 183, 186

L

Lógica 7, 10, 129, 170, 185, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 255

M

Matemática 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 106, 107, 109, 110, 111, 114, 115, 116, 117, 122, 123, 124, 125, 132, 147, 148, 149, 153, 155, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 186, 189, 190, 191, 192, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 207, 208, 243, 244, 245, 254, 255, 258, 260, 261, 262, 264, 270, 271

Matemática Crítica 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 186

Materiais Manipuláveis 31, 34, 35, 39, 45, 46

Método 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 16, 53, 63, 65, 71, 92, 99, 105, 110, 111, 113, 127, 130, 131, 135, 138, 155, 157, 158, 198, 215, 217, 221, 222, 223, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 254, 256, 258

Modelagem 32, 38, 39, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 81, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 128, 132, 133, 134, 136, 148, 149, 153, 228, 230, 232

Modelo Matemático 39, 52, 80, 81, 83, 84, 89, 94, 132, 148, 149, 151, 152, 153

O

Operações Aritméticas 34, 41, 42

P

Pescado 100, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 124

Porcentagem 115, 116, 117, 120, 121, 122, 123, 124, 137

Projeto 20, 39, 58, 75, 76, 127, 156, 163, 164, 165, 166, 169, 174, 175, 192, 197

R

Racionalidade 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10

Recursos Didáticos 31, 33, 34, 39

Resolução 14, 15, 16, 32, 37, 38, 53, 65, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 97, 171, 179, 206, 217, 218, 220, 221, 224, 225, 228, 230, 231, 232, 266

Reticulado 254, 255

Retração 254, 255, 256, 257, 258

S

Sarampo 62, 63, 64, 65, 67, 68

T

Teatro 180, 181, 182, 183, 184, 186

Tecnologias 79, 116, 160, 161, 162, 175, 176

Teorema de Stokes 199, 206, 207

Terapia 132, 150, 152

Tora 105, 106, 107, 110, 112, 113

V

Vacinação 62, 63, 64, 65, 67

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

 **Atena**
Editora

Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

 **Atena**
Editora

Ano 2020