

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo

Edição de Arte: Lorena Prestes

Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa

Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia

Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá

Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima

Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense

Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste

Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador

Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano

Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
 Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
 Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
 Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
 Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
 Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
 Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
 Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
 Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
 Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
 Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
 Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
 Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
 Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
 Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
 Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
 Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
 Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
 Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
 Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
 Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
 Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
 Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
 Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
 Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
 Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
 Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
 Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
 Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
 Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
 Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas
 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado
 Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-86002-71-3
 DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compõem esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR ENVOLVENDO TEMAS RELACIONADOS À SAÚDE	
Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.7132002041	
CAPÍTULO 2	13
O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO	
Wagner Gomes Barroso Abrantes Felipe da Silva Souza	
DOI 10.22533/at.ed.7132002042	
CAPÍTULO 3	26
REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Elisângela Guimarães Firmino Neivaldo Rodrigues dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.7132002043	
CAPÍTULO 4	38
O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Frederico Braidá Rodolfo Eduardo Vertuan Rodrigo Manoel Dias Andrade	
DOI 10.22533/at.ed.7132002044	
CAPÍTULO 5	49
O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: PRINCÍPIOS DA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL	
Júlio César Deckert da Silva Ruy César Pietropaolo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002045	
CAPÍTULO 6	61
ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW	
Adina Veronica Remor Wiliam Francisco de Araujo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002046	
CAPÍTULO 7	75
A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS	
Bruno Luiz Silva Rodrighero Daiane Ferreira da Silva Rodrighero	
DOI 10.22533/at.ed.7132002047	

CAPÍTULO 8	86
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR	
Vitória Fenilli Vidaletti Jahina Fagundes de Assis Hattori Thays Menegotto de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.7132002048	
CAPÍTULO 9	98
MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE	
Santiago del Rio Oliveira André Luiz Salvat Moscato	
DOI 10.22533/at.ed.7132002049	
CAPÍTULO 10	110
MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE	
Samuel Conceição de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.71320020410	
CAPÍTULO 11	120
ESPAÇO E FORMA: A FORMAÇÃO DO PEDAGOGO E A LEGISLAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Luciano Tadeu Corrêa Medeiros	
DOI 10.22533/at.ed.71320020411	
CAPÍTULO 12	133
ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL	
Ana Caroline de Almeida Silva João Vitor Teodoro Douglas Silva Maioli	
DOI 10.22533/at.ed.71320020412	
CAPÍTULO 13	142
O JOGO CORRIDA DE CAVALOS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA COMBINÁTORIA E DA PROBABILIDADE COM ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Patricia de Medeiros Silva Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos	
DOI 10.22533/at.ed.71320020413	
CAPÍTULO 14	153
DISCURSO DE ESTUDANTES DO 7º PERÍODO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA ACERCA DO ERRO DE ALUNOS RESOLVENDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS	
José Ferreira dos Santos Júnior Pedro Lucio Barboza	
DOI 10.22533/at.ed.71320020414	
CAPÍTULO 15	163
A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E O JOGO DE REGRAS MANCALA À LUZ DA TEORIA PIAGETIANA	
Maria Fernanda Maceira Mauricio Sidney Lopes Sanchez Júnior Francismara Neves de Oliveira	

Guilherme Aparecido de Godoi
DOI 10.22533/at.ed.71320020415

CAPÍTULO 16	178
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO PARA O MANEJO DE PLANTAS DANINHAS Elenice Weber Stiegelmeier DOI 10.22533/at.ed.71320020416	
SOBRE O ORGANIZADOR	189
ÍNDICE REMISSIVO	190

MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Data de aceite: 23/03/2020

Samuel Conceição de Oliveira

<http://lattes.cnpq.br/2041303049625571>

UNESP – Universidade Estadual Paulista, FCF –
Faculdade de Ciências Farmacêuticas, PPG-EBB
– Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Biomateriais e Bioprocessos
Araraquara – SP

RESUMO: Neste trabalho, uma equação que considera o atraso no sinal de sondas utilizadas para medir o nível de oxigênio dissolvido (OD) em bioprocessos de produção de antibióticos é desenvolvida e recomendada para o tratamento de dados experimentais de OD visando à estimativa correta do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ($k_L\alpha$), um parâmetro chave no controle da oxigenação do meio fermentativo. Para o desenvolvimento de tal equação, utilizou-se o método da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial que descreve o atraso no sinal de resposta da sonda, o qual é caracterizado por uma constante de *delay* k_d . Simulações da equação proposta e da equação tradicional utilizando valores de $k_L\alpha$ e k_d iguais a 400 h^{-1} e 350 h^{-1} , respectivamente, evidenciaram que o atraso no sinal de resposta da sonda interfere nos níveis medidos de OD, levando a uma estimativa incorreta de

$k_L\alpha$ caso a equação tradicional seja utilizada para tratar dados obtidos em um ensaio típico de determinação deste parâmetro. Embora a equação proposta contenha um parâmetro adicional (k_d), a determinação deste parâmetro não deve acarretar dificuldade em seu uso uma vez que k_d pode ser estimado juntamente com $k_L\alpha$ por um procedimento de regressão não linear ou determinado experimentalmente por um ensaio apropriado.

PALAVRAS-CHAVE: modelagem matemática, bioprocessos, atraso no sinal, oxigênio dissolvido, transformada de Laplace

MATHEMATICAL MODELING OF THE DELAY IN THE SIGNAL OF DISSOLVED OXYGEN PROBES EMPLOYING LAPLACE TRANSFORM

ABSTRACT: In this work, an equation that considers the delay in the signal of probes used to measure the level of dissolved oxygen (DO) in antibiotic production bioprocesses is developed and recommended for the treatment of experimental DO data aiming at the correct estimate of the volumetric coefficient of oxygen transfer ($k_L\alpha$), a key parameter in controlling the oxygenation of the fermentation medium. For

the development of such an equation, the Laplace transform method was used to solve the differential equation that describes the delay in the probe's response signal, which is characterized by a delay constant k_d . Simulations of the proposed equation and the traditional equation using values of $k_L\alpha$ and k_d equal to 400 h^{-1} and 350 h^{-1} , respectively, showed that the delay in the probe's response signal interferes with the measured DO levels, leading to an incorrect estimate of $k_L\alpha$ if the traditional equation is used to treat data obtained in a typical assay to determine this parameter. Although the proposed equation contains an additional parameter (k_d), the determination of this parameter should not cause any difficulty in its use since k_d can be estimated together with k_L by a nonlinear regression procedure or determined experimentally by an appropriate test.

KEYWORDS: mathematical modeling, bioprocesses, signal delay, dissolved oxygen, Laplace transform

1 | INTRODUÇÃO

No desenvolvimento de bioprocessos, além dos objetivos econômicos, busca-se atender às exigências crescentes de confiabilidade e reprodutibilidade dos produtos obtidos, o que vem aumentando a necessidade de melhoria no monitoramento e controle de tais processos, cenário no qual a modelagem matemática e a simulação configuram-se como ferramentas muito úteis.

Entre os produtos obtidos por processos biotecnológicos, destacam-se os antibióticos devido à importância clínica que estes representam, permitindo o tratamento de diversas doenças infecciosas e cancerígenas (MENEZES et al., 2000). A produção industrial de antibióticos é realizada utilizando-se fungos e bactérias em processos que, em sua ampla maioria, são aeróbios estritos, embora haja relatos na literatura de estudos sobre a produção destes bioprodutos em condições anaeróbias por bactérias isoladas do solo (EZAKI et al., 2008, BEHNKEN; HERTWECK, 2012)

Na biossíntese de antibióticos, o oxigênio tem como função atuar comoceptor final de elétrons, participando ao término da cadeia respiratória da reoxidação das moléculas transportadoras de elétrons e gerando moléculas de ATP (trifosfato de adenosina) ricas em energia que é utilizada nas reações anabólicas.

Para que ocorra a síntese de ATP é necessário que os microrganismos oxidem uma matéria orgânica tal como são os açúcares, os quais são muito solúveis em água, podendo-se atingir concentrações da ordem de centenas de gramas por litro. Diferentemente, o oxigênio é muito pouco solúvel em água, como também o são os demais gases, podendo-se atingir, no máximo, concentrações da ordem de miligramas por litro (ppm). Desta forma, os bioprocessos de produção de antibióticos são geralmente conduzidos em reatores convencionais de tanque agitado e aerado, submetidos a altas velocidades de agitação visando favorecer a

dissolução do oxigênio no meio fermentativo, principalmente quando são utilizados fungos filamentosos, os quais aumentam a viscosidade do meio, o que dificulta a transferência de oxigênio da fase gasosa para a fase líquida (CRUZ, 1996).

A produtividade em fermentações antibióticas é fortemente dependente da concentração de oxigênio dissolvido (OD), sendo a concentração crítica (concentração abaixo da qual ocorre limitação do bioprocessamento), por exemplo, em torno de 30% do valor da saturação para a produção de penicilina pelo fungo *Penicillium chrysogenum* (MENEZES et al., 1994). Desta forma, torna-se evidente a necessidade de manter a concentração de OD acima do valor crítico para um determinado microrganismo produtor de antibiótico a fim de não limitar o bioprocessamento em termos de capacidade respiratória dos microrganismos por uma oxigenação insuficiente do meio fermentativo, conforme mostra a Figura 1, na qual está apresentado o comportamento da velocidade específica de respiração microbiana (Q_{O_2}) em função da concentração de oxigênio dissolvido no meio (C).

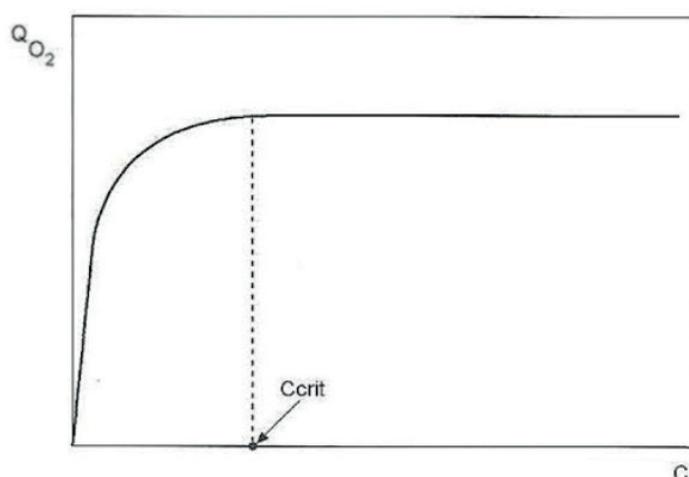


Figura 1 - Comportamento de Q_{O_2} em função de C

De acordo com a Figura 1, Q_{O_2} , para um dado microrganismo, pode ser correlacionada com C segundo uma equação do tipo de Monod, conforme equação a seguir, na qual $Q_{O_2máx}$ é o valor máximo de Q_{O_2} e K_{O_2} é a constante de saturação para o O_2 (SCHMIDELL, 2001):

$$Q_{O_2} = Q_{O_2máx} \frac{C}{K_{O_2} + C}$$

O controle da concentração de OD pode ser realizado manipulando-se o valor do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ($k_L a$), o qual está diretamente relacionado com a agitação e a aeração praticadas no biorreator. Portanto, há a necessidade de se determinar o valor de $k_L a$ para um dado sistema de agitação

e aeração a fim de se fazerem os ajustes necessários neste parâmetro visando atender à demanda de oxigênio durante o bioprocessamento.

Existem alguns métodos de determinação de $k_L a$ estabelecidos na literatura, dentre os quais aqueles que empregam sondas (eletrodos) para a medida da concentração de OD, gerando dados experimentais que, convenientemente tratados por meio de um modelo matemático adequado, fornecem uma estimativa do valor de $k_L a$. Em se utilizando este método, cuidado se deve ter quanto ao atraso na resposta da sonda quando o valor de $k_L a$ a determinar for elevado, pois caso contrário, a determinação de $k_L a$ ficará prejudicada como será demonstrado no presente trabalho. Este atraso no sinal da sonda é caracterizado por uma constante de *delay* (k_d) cujo recíproco fornece uma noção do tempo de atraso no sinal.

Este trabalho visa demonstrar que, dependendo dos valores relativos de $k_L a$ e k_d , o atraso no sinal da sonda interfere na determinação do valor de $k_L a$ caso um modelo matemático apropriado não seja empregado para tratar os dados de medidas de OD com atraso. Para o desenvolvimento de tal modelo, assume-se que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda (C_s) é proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD (C) e aquele medido pela sonda, sendo k_d a constante de proporcionalidade. Introduzindo-se a expressão $C=C(t)$, obtida a partir da integração do balanço de massa de OD em um ensaio típico de determinação de $k_L a$, na equação diferencial que descreve a taxa de variação temporal de C_s , obtém-se uma nova equação diferencial no tempo, cuja solução, obtida por transformada de Laplace, incorpora os dois parâmetros $k_L a$ e k_d , configurando-se como a equação a ser usada quando o atraso no sinal da sonda não for desprezível.

2 | MODELAGEM MATEMÁTICA

O balanço de massa de oxigênio dissolvido durante o bioprocessamento de produção de antibiótico em reator batelada, considerando o suprimento e o consumo de oxigênio no meio é dado pela seguinte equação (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) - Q_{O_2} X \quad (1)$$

onde C é a concentração real de OD, C^* é a concentração de OD na saturação, $k_L a$ é o coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio, Q_{O_2} é a velocidade específica de consumo de oxigênio para respiração microbiana e X é a concentração celular.

No caso do emprego de sondas para a medida da concentração de OD visando à determinação de $k_L a$ para um dado sistema de agitação e aeração, o procedimento consiste em se utilizar meio isento de células ($X=0$), reduzindo-se inicialmente a

zero a concentração de OD pela dispersão de gás nitrogênio no meio. Em seguida, agita-se e aera-se o meio, registrando-se a concentração de OD no decorrer do tempo. Em tais condições, a Equação (1) se reduz à Equação (2) (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) \quad (2)$$

Separando as variáveis na Equação (2), integrando e aplicando a condição inicial $C(0)=0$, obtém-se a Equação (3) :

$$\frac{C}{C^*} = (1 - e^{-k_L a t}) \quad (3)$$

Os valores de C/C^* fornecidos pela Equação (3) correspondem à razão entre o valor real da concentração de OD num dado instante e aquele de saturação, devendo esta razão ser o valor registrado pela sonda caso o atraso no sinal seja desprezível, isto é, a sonda previamente calibrada de 0 a 100 % (saturação) registra a concentração de OD como uma porcentagem daquela de saturação. Entretanto, se o atraso no sinal não puder ser desprezado, uma nova equação deve ser desenvolvida visando à determinação correta do valor de $k_L a$. O atraso no sinal da sonda é decorrente das resistências difusionais ao transporte de oxigênio até a superfície do cátodo, onde é reduzido, gerando um fluxo de elétrons que é proporcional à sua concentração.

Assumindo que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda (C_s) seja proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD (C) e aquele medido pela sonda, pode-se escrever (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d(C - C_s) \quad (4)$$

onde k_d é a constante de atraso da sonda, $C_s(0)=0$ e $C_s(\infty)=C^*$.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Solução da Equação Diferencial representativa do Atraso no sinal da Sonda

Dividindo ambos os membros da Equação (4) por C^* , obtém-se:

$$\frac{d(C_s/C^*)}{dt} = k_d(C/C^* - C_s/C^*) \quad (5)$$

Introduzindo $y = C_s/C^*$ e a Equação (3) na Equação (5), resulta:

$$\frac{dy}{dt} = k_d \left[(1 - e^{-k_L a t}) - y \right] \quad (6)$$

Reescrevendo a Equação (6) em um outro formato, obtém-se a Equação (7):

$$\frac{dy}{dt} + k_d y = k_d (1 - e^{-k_L a t}) \quad (7)$$

A Equação (7) está sujeita à condição inicial $y(0)=0$. Resolvendo esta equação por transformada de Laplace (ZILL, 2014), tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} + k_d y\right] = \mathcal{L}\left[k_d(1 - e^{-k_L a t})\right] \Rightarrow \quad (8)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + k_d \mathcal{L}[y] = k_d \mathcal{L}\left[1 - e^{-k_L a t}\right] \Rightarrow \quad (9)$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_0 + k_d Y(s) = k_d \left\{ \frac{1}{s \left[\left(\frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \Rightarrow \quad (10)$$

$$Y(s) = k_d \left\{ \frac{1}{s \left[\left(\frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{(s + k_d)} \right\} \Rightarrow \quad (11)$$

$$Y(s) = \left\{ \frac{1}{s \left[\left(\frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{k_d} \right) s + 1 \right]} \right\} \quad (12)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace (ZILL, 2014) à Equação (12), obtém-se a solução da Equação (5), conforme desenvolvimento apresentado nas Equações (13) a (17):

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left\{ \frac{1}{s \left[\left(\frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{k_d} \right) s + 1 \right]} \right\} \right\} \Rightarrow \quad (13)$$

$$y(t) = 1 + \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{k_d} \right) - \left(\frac{1}{k_L a} \right)} \right] \left[\left(\frac{1}{k_L a} \right) e^{-k_L a t} - \left(\frac{1}{k_d} \right) e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (14)$$

$$y(t) = I + \left[\frac{k_d k_L a}{k_L a - k_d} \right] \left[\left(\frac{I}{k_L a} \right) e^{-k_L a t} - \left(\frac{I}{k_d} \right) e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (15)$$

$$y(t) = \frac{C_s}{C^*} = I + \left[\frac{I}{k_L a - k_d} \right] \left[k_d e^{-k_L a t} - k_L a e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (16)$$

$$\frac{C_s}{C^*} = I + \left(\frac{k_L a}{k_d - k_L a} \right) e^{-k_d t} - \left(\frac{k_d}{k_d - k_L a} \right) e^{-k_L a t} \quad (17)$$

A Equação (17) é a equação que deve ser empregada para tratar dados experimentais de medidas de OD realizadas com sondas com atraso no sinal de resposta visando à correta determinação do valor de $k_L a$.

3.2 Exemplo Ilustrativo

Como ilustração, as Equações (3) e (17) foram simuladas para valores de $k_L a$ e k_d respectivamente iguais a 400 h^{-1} e 350 h^{-1} , visando comparar a evolução temporal do nível real de OD (C/C^*) e aquele fornecido pela sonda (C_s/C^*). Os resultados mostrados na Figura 2 evidenciam claramente que o atraso no sinal da sonda interfere significativamente nos valores medidos do nível de OD, devendo a Equação (17) ser usada para o tratamento dos dados registrados pela sonda visando a estimativa correta do valor de $k_L a$.

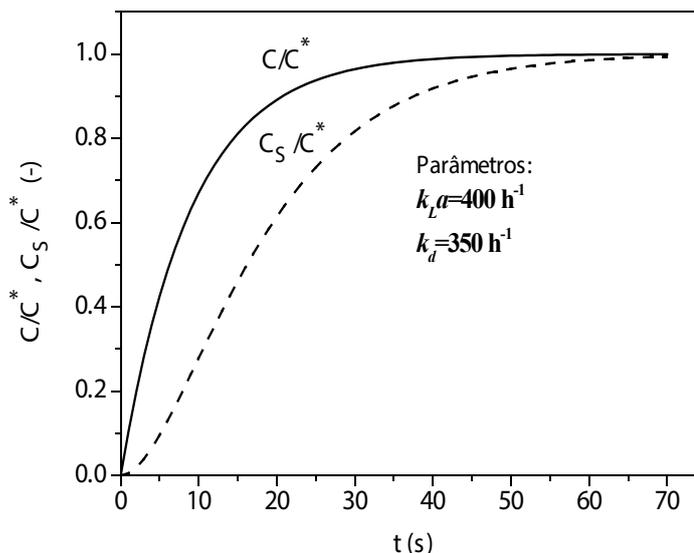


Figura 2 - Evolução temporal do nível de OD real e aquele registrado pela sonda

Para se ter uma noção da magnitude do erro cometido na determinação de $k_L a$ quando dados de medidas de OD com atraso são tratados por uma versão linearizada do modelo tradicional (Equação (3)), uma regressão linear dos pontos

$[-\ln(1-C/C^*)]$ versus t foi realizada (Figura 3), obtendo-se um valor de $k_L a$ (coeficiente angular da reta) igual a 277 h^{-1} , resultado que representa um erro relativo percentual de -30.75% quando comparado ao valor correto de $k_L a$ (400 h^{-1}).

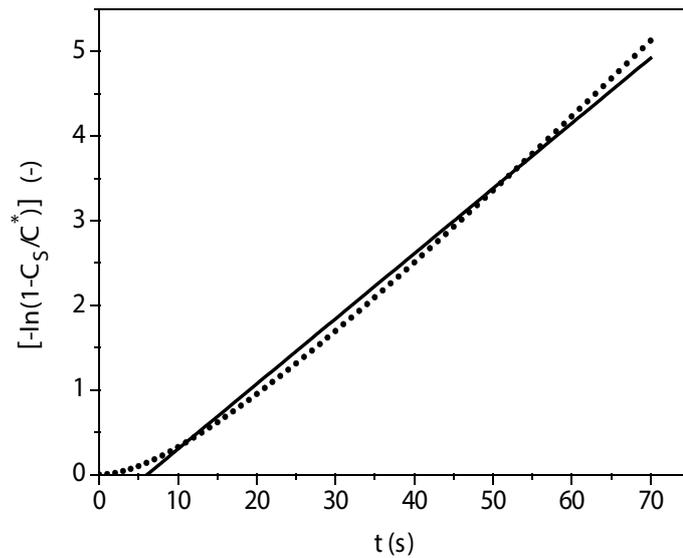


Figura 3 - Determinação de $k_L a$ utilizando-se o modelo tradicional linearizado e as medidas de OD realizadas com atraso pela sonda

A Equação (17), além de conter o parâmetro $k_L a$, contém o parâmetro k_d , o qual também deve ser determinado, não constituindo-se esta determinação numa dificuldade para o uso da Equação (17). Para a determinação de k_d há duas alternativas possíveis. A primeira, consiste em estimar este parâmetro juntamente com $k_L a$ na etapa de estimação de parâmetros por regressão não linear, uma vez que a Equação (17) não é possível de ser linearizada. A outra alternativa seria determinar experimentalmente este parâmetro realizando um ensaio degrau, no qual a sonda estaria inicialmente em equilíbrio com um meio saturado em nitrogênio ($OD = 0\%$), sendo em seguida exposta repentinamente a um meio saturado em oxigênio ($OD = 100\%$). Em tais condições, tem-se desde o instante inicial do degrau que $C=C^*$ na Equação (4), obtendo-se a Equação (18):

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d(C^* - C_s) \quad (18)$$

A integração da Equação (18), sujeita à condição inicial $C_s(0)=0$, resulta na Equação (19):

$$\frac{C_s}{C^*} = (1 - e^{-k_d t}) \quad (19)$$

A partir da Equação (19) pode-se concluir que ao plotar $[-\ln(1-C_s/C^*)]$ em função do tempo t , utilizando-se os dados experimentais obtidos no ensaio descrito, deve-se obter uma reta cujo coeficiente angular corresponde ao valor de k_d .

De acordo com informações fornecidas pelos fabricantes de eletrodos, uma

sonda razoavelmente rápida atinge 90% do valor de C^* em 20 segundos no ensaio degrau, o que permite estimar, pela Equação (19), um valor de k_d de aproximadamente 415 h^{-1} .

Por fim, analisando-se a Equação (17) para os casos em que $k_d \gg k_L a$, verifica-se que $\left(\frac{k_L a}{k_d - k_L a}\right) \rightarrow 0$, $e^{-k_d t} \rightarrow 0$ e $\left(\frac{k_d}{k_d - k_L a}\right) \rightarrow 1$, de modo que a Equação (17) recai na Equação (3), não havendo necessidade de corrigir o sinal da sonda em tais condições. A fim de ilustrar numericamente estes casos, tem-se que uma sonda que apresente um k_d da ordem de 400 h^{-1} , permite estimar, com razoável precisão, valores de $k_L a$ inferiores a 200 h^{-1} . Acima destes valores de $k_L a$, os erros cometidos na determinação deste parâmetro seriam muito elevados, exigindo que a correção aqui proposta fosse efetuada.

4 | CONCLUSÕES

Baseado nos resultados obtidos neste trabalho, as seguintes conclusões podem ser realizadas:

- a transformada de Laplace mostrou-se uma ferramenta muito útil para a resolução da EDO (equação diferencial ordinária) que descreve o atraso no sinal de resposta de sondas empregadas na medição de níveis de OD em bioprocessos de produção de antibióticos, permitindo obter a solução da equação com rapidez, simplicidade e reduzido esforço analítico;
- o atraso no sinal da sonda interfere nas medidas de OD, levando a obtenção de dados experimentais que, se não tratados por uma equação apropriada que considere este atraso, acarretará significativos erros na determinação do valor do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ($k_L a$);
- a equação desenvolvida para o tratamento de dados de medidas de OD com atraso contém dois parâmetros ajustáveis $k_L a$ e k_d , os quais podem ser determinados simultaneamente por regressão não linear usando-se a própria equação e os dados experimentais obtidos em um ensaio típico de determinação de $k_L a$.

REFERÊNCIAS

BEHNKEN, S.; HERTWECK, C. **Anaerobic bacteria as producers of antibiotics**. Applied Microbiology and Biotechnology, v. 96, n. 1, p. 61-67, 2012.

CRUZ, A. J. G. **Modelagem fenomenológica e simulação por redes neuronais do bioprocesso de produção da penicilina-G**. 150f. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – UFSCar, São Carlos, 1996.

EZAKI, M.; MURAMATSU, H.; TAKASE, S.; HASHIMOTO, M. **Naphthalecin, a Novel Antibiotic Produced by the Anaerobic Bacterium, *Sporotalea colonica* sp.** The Journal of Antibiotics. nov., v. 61, n. 4, p. 207–212, 2008.

MENEZES, J. C.; ALVES, S. S.; LEMOS, J. M.; AZEVEDO, S. F. **Mathematical modelling of**

industrial pilot-plant penicillin-G fed-batch fermentations. Journal of Chemical Technology and Biotechnology., v. 61, n. 2, p. 123-138, 1994.

MENEZES, J. C.; ALVES, T. P.; CARDOSO, J. P. **Biotecnologia microbiana: a produção de penicilina.** In: LIMA, N.; MOTA, M. (Eds.) Biotecnologia: fundamentos e aplicações. DIFEL, 2000, cap.12, p.267-282.

SCHMIDELL, W. **Agitação e aeração em biorreatores.** In: SCHMIDELL, W.; LIMA, U. A.; AQUARONE, E.; BORZANI, W. (Coords.) Biotecnologia Industrial: engenharia bioquímica. São Paulo: Edgard Blücher, 2001, v.2, p.277-371.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ÍNDICE REMISSIVO

B

Bioprocessos 110, 111, 118
Blocos de Montar 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47

C

Combinatória 123, 142, 143, 144, 146, 148, 149, 150, 151, 152
Construção do Conhecimento 45, 161, 163, 165
Crescimento Populacional 86, 87, 91, 96, 97

D

Discurso 5, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161

E

Educação Financeira 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36
Estatística 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 42, 55, 57, 86, 122, 123, 189

F

Funções 13, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 43, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 64, 66, 75, 76, 80, 81, 82, 84, 107, 177
Futuros Professores 5, 153, 155, 156, 158, 159, 160

G

Geometria 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 120, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 132

I

Interdisciplinaridade 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 189

J

Jogos 32, 34, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 126, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 159, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177

M

Manejo De Plantas Daninhas 178, 180, 182, 183, 187
Matemática Aplicada à Engenharia 98
Matemática Financeira 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34
Modelagem Matemática 58, 86, 87, 96, 110, 111, 113
Modelos Matemáticos 86, 87, 96, 98, 100

N

Números Complexos 55, 56, 57, 75, 76, 79, 80, 82, 83, 84

O

Otimização 178, 180, 182, 187, 188

P

Pensamento Matemático Avançado 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25

Plano Complexo 57, 75, 76, 82, 83, 84

Probabilidade 4, 11, 42, 55, 122, 123, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 150, 151, 152

Programação não Linear 178, 180, 183, 187

R

Reforma Curricular 49, 50, 51, 54, 55, 60

S

Séries Iniciais 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 176

Solidificação 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108

T

Teorema de Lagrange 61, 62, 65, 66, 67, 70, 74

Teoria de Grupos 61, 62, 63, 65, 74

Transformações Geométricas 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60

 **Atena**
Editora

2 0 2 0