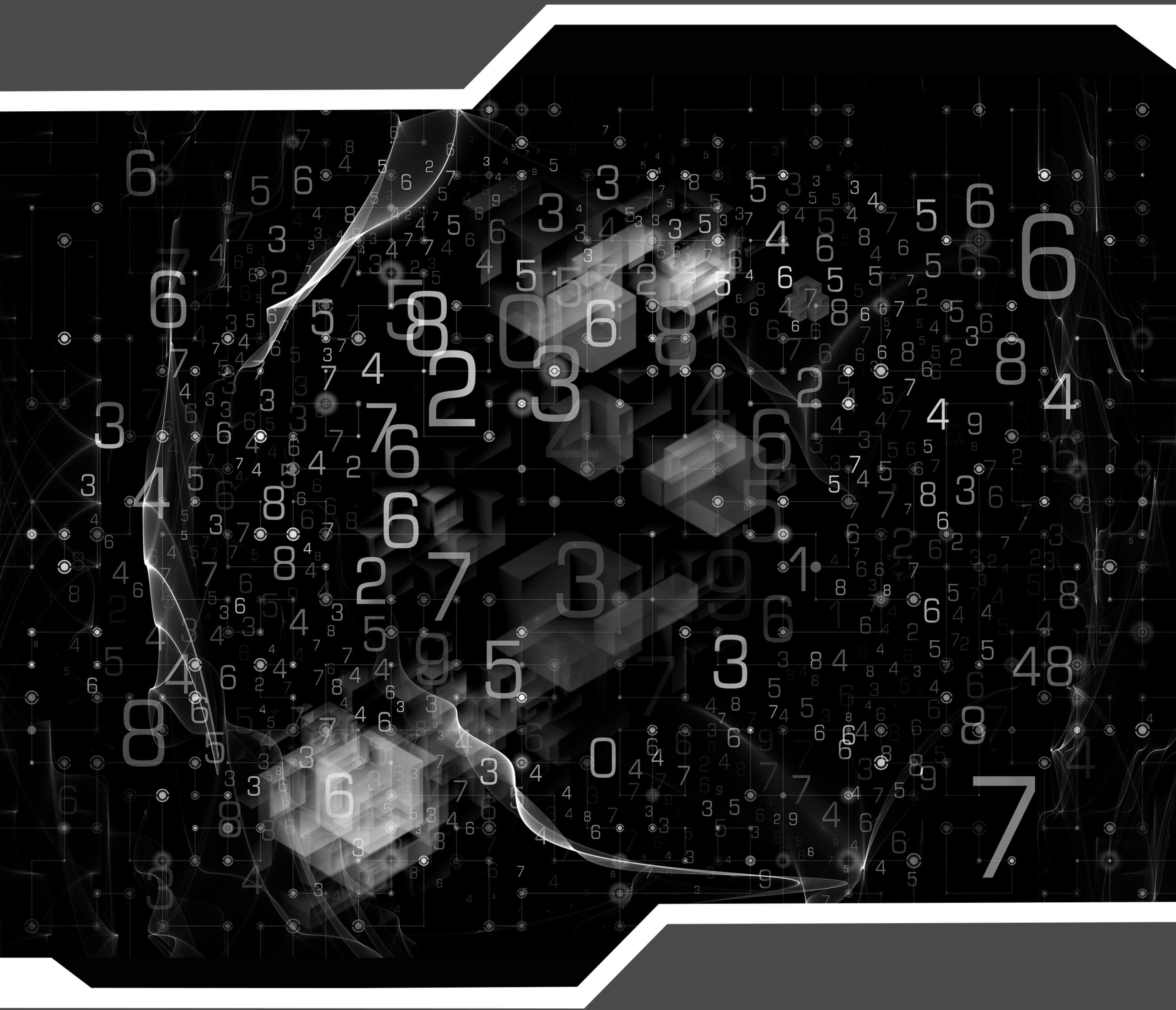
PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

2020 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-71-3
DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compões esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 12

ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 17/01/2020

Ana Caroline de Almeida Silva
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/3657350923435278

João Vitor Teodoro
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Campus Universitário de Iturama
Iturama – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9933198615339867

Douglas Silva Maioli
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
Campinas – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/4477954531441251

RESUMO: Este texto apresenta uma simulação computacional e uma modelagem, por meio de probabilidade condicional, das probabilidades de uma generalização do problema de Monty Hall, que envolve um jogo tradicional de escolha e abertura de portas e premiação do participante com o objeto escondido por estas, considerando que haja mais portas no palco, generalizando a situação original de apenas três, objetivando verificar se nesta situação é mais vantajoso trocar ou manter a porta escolhida inicialmente. Foi possível concluir que sempre é viável efetuar a troca, de forma a maximizar a probabilidade de obter a melhor premiação.

PALAVRAS-CHAVE: Monty Hall, Probabilidade, Jogo, Simulação.

OPENING DOORS: A GENERALIZATION OF THE MONTY HALL PROBLEM

ABSTRACT: This text presents a computational simulation and a conditional probability modeling of the probabilities of a generalization of the Monty Hall problem, which involves a traditional game of choice and opening of doors and prize of the participant with the object hidden by them, considering that there are more doors on the stage, generalizing the original situation of only three, aiming to verify if in this situation it is more advantageous to change or maintain the door initially chosen. It was possible to conclude that it is always feasible to make the exchange, in order to maximize the probability of obtaining the best award.

KEYWORDS: Monty Hall, Probability, Game, Simulation.

1 I INTRODUÇÃO

O problema de Monty Hall, também

conhecido como o problema das três portas, surgiu a partir de um jogo do programa televisivo americano *Let's Make a Deal* (Vamos Fazer um Acordo) apresentado por Monty Hall. No palco se encontrava três portas, de modo que, atrás de uma delas havia um carro e em cada uma das demais, um bode. E o jogo se desenvolve da seguinte maneira:

- Primeiramente o participante escolhe uma das três portas.
- Logo após, o apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas pelo participante, revelando um bode.
- Então, o convidado pode optar em permanecer com a porta selecionada inicialmente ou trocar pela outra porta que ainda permanece fechada, sendo contemplado com o prêmio correspondente à porta de sua escolha.

O problema está em determinar se a melhor opção é mudar de porta ou, se em ambas as alternativas, o jogador tem a mesma probabilidade de ganhar o carro, já que restaram duas portas.

Assim que o problema foi lançado, houve várias tentativas de resolvê-lo, causando calorosas discussões entre matemáticos famosos sobre a solução correta. O problema foi enviado a Marilyn vos Savant, famosa por entrar no Guinness Book por ter o maior QI registrado. Ela afirmou que era vantajoso trocar de porta, porém, 92% dos norte-americanos, quase mil PhDs e o renomado matemático Paul Erdös achavam que ela estava errada (MLODINOW, 2009).

Intuitivamente, pode-se pensar que após o apresentador abrir uma porta que contém um bode, o participante tem um novo dilema de escolha que envolve duas portas e um prêmio desejado, tendo 50% de chance de ganhar este prêmio, ou seja, a mesma chance de ganhar trocando ou mantendo a porta inicial e, ainda, com alguma vantagem, já que a probabilidade de escolher a porta correta inicialmente era de 33,33% e passou a ser 50%. No entanto, esta resposta está incorreta.

2 I EXPLORANDO O JOGO TRADICIONAL COM TRÊS PORTAS

Diferente do que muita gente acredita, o melhor é trocar de porta, uma vez que a escolha da porta que será aberta pelo apresentador não é feita aleatoriamente, ela depende da primeira escolha do participante. O apresentador nunca abrirá uma porta premiada! Ao abrir uma porta não premiada ele não gera um novo jogo, mas dá informações adicionais ao participante sobre a localização do prêmio. Mudar de porta também depende da porta escolhida inicialmente, aumentando as chances de ganhar. Mostraremos que, após aberta uma porta pelo apresentador, a probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta passa de 33,33% para 66,67%.

Como há uma porta com carro e duas com cabra, então, inicialmente a probabilidade de escolher a porta com o carro é de 1⁄3 e a de escolher uma porta com cabra é de 2⁄3, entretanto, após uma das portas com uma cabra ser descartada pelo apresentador, devemos utilizar probabilidade condicional, ou seja, calcular a probabilidade do jogador ganhar o carro, dado que determinada porta foi descartada, para tal, é apresentado o diagrama da figura 1.

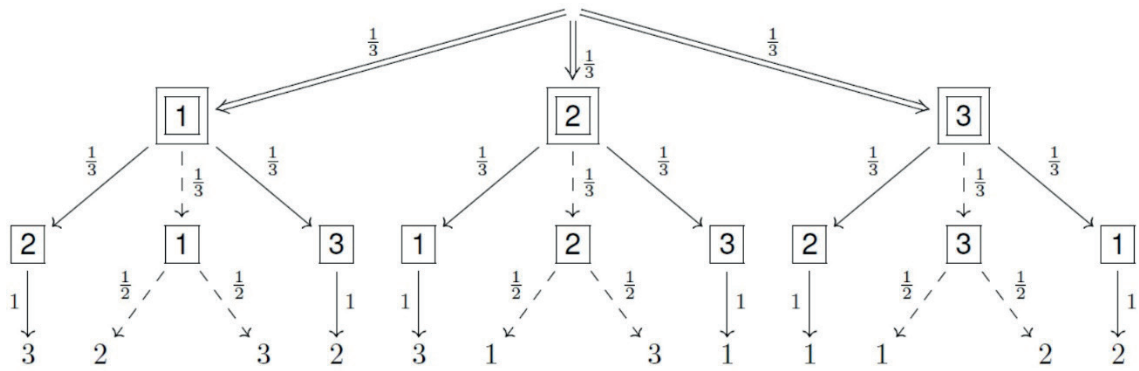


Figura 1. Diagrama de árvore para o caso de três portas no jogo das portas.

Sejam os números em caixa dupla as portas com o carro, os números em caixa simples as portas escolhidas pelo jogador, e os números não envoltos por caixa as portas abertas pelo apresentador. Além disso, cada caminho representa um possível evento, de forma que, aqueles demarcados por setas tracejadas representam os casos em que a porta escolhida inicialmente pelo jogador é a premiada, aqueles demarcados por setas simples representam os casos cuja porta escolhida inicialmente pelo jogador não é a premiada e as setas duplas determinam os casos possíveis para porta premiada. Os valores em meio às setas, determinam a probabilidade correspondente ao evento desta seta. Sendo assim, o cálculo da probabilidade de eventos sucessivos é dado pelo produto das probabilidades das setas associadas. Deste modo, para calcular a probabilidade de o jogador ganhar o carro sem trocar a porta escolhida desde o início, multiplicamos as probabilidades de cada caminho demarcado por setas pontilhadas e depois somamos esses resultados:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

De forma similar, calculemos a probabilidade de o jogador ganhar o carro se trocar de porta, ou seja, nos casos onde as setas são simples:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1=\frac{2}{3}$$

O cálculo das probabilidades associadas ao problema de Monty Hall também pode ser realizado utilizando o teorema de Bayes, que se utiliza das probabilidades condicionadas.

A partir desta ideia surgiram inúmeras variações do problema. Um problema similar, porém, mais complexo, pode ser obtido considerando que haja mais portas no palco. Neste cenário ainda continua sendo mais vantajoso trocar de porta?

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante à necessidade de uma análise prévia desta situação, utilizou-se simulação computacional para obter valores aproximados para as probabilidades. Para tal, empregando o software estatístico R, foi implementado um algoritmo que simula 1 milhão de ensaios para cada número de portas dentre 3, 4, 5, 10, 50, 100 e 1000. Representamos pelo gráfico da figura 2 a comparação das frequências relativas de vitória do competidor quando troca e quando permanece na porta escolhida a priori, estabelecendo relação com a concepção frequentista de probabilidade (DANTAS, 2008):

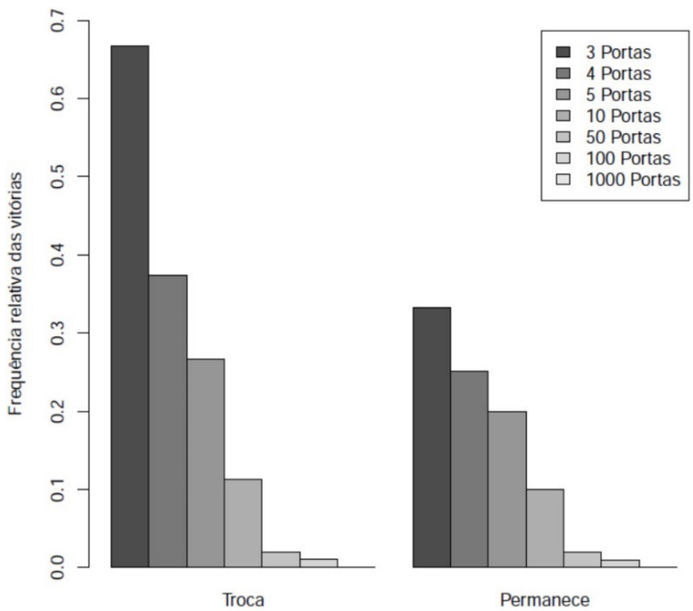


Figura 2. Gráfico de frequência relativa da simulaçãodo jogo para 3, 4, 5, 10, 50, 100 e 1000 portas.

Portanto, por meio da avaliação gráfica, é possível concluir que, para estes casos, com o número maior de portas, é viável trocar. Mas, apenas com a simulação não é possível obter os valores exatos das probabilidades, o que impossibilita estudar os resultados para uma quantidade qualquer de portas, principalmente maiores que 1000. Assim, elaboramos, por meio de uma análise sistemática, expressões que determinam as probabilidades conforme o número de portas.

Utilizando um diagrama de árvore para o caso geral de n portas, com $n \geq 3$ (o jogo não faz sentido quando há menos que três portas), podemos determinar uma expressão matemática para calcular a probabilidade de ganhar trocando ou não de portas.

Para facilitar o estudo sistemático do problema é conveniente dividi-lo em dois casos que dependem da escolha inicial do participante, sendo o primeiro quando ele escolhe inicialmente a porta premiada e o segundo quando escolhe inicialmente uma porta não premiada.

É importante salientar que o interesse do jogador é sempre ganhar, por isto, deve-se supor as condições necessárias para que esse desejo se concretize, portanto, nos dois casos que apresentaremos iremos calcular a probabilidade de o participante ganhar. Sem perda de generalidade, consideraremos o caso em que a porta número 1 seja premiada. Os casos em que outras portas são premiadas são equivalentes, e são contabilizados ao considerar o número total de portas existentes no jogo, multiplicando-o às probabilidades. Os valores nas setas determinam a probabilidade correspondente ao evento da mesma, e em ambos os casos o cálculo da probabilidade de eventos sucessivos é dado pelo produto das probabilidades das setas associadas.

3.1 Caso 1: Participante escolhe inicialmente a porta premiada

É evidente que, ao escolher inicialmente a porta premiada, o participante ganha se, e somente se, mantém a porta escolhida até o fim. Portanto, este caso determina a probabilidade de ganhar dado que o participante mantém a porta escolhida inicialmente como consta no diagrama da figura 3.

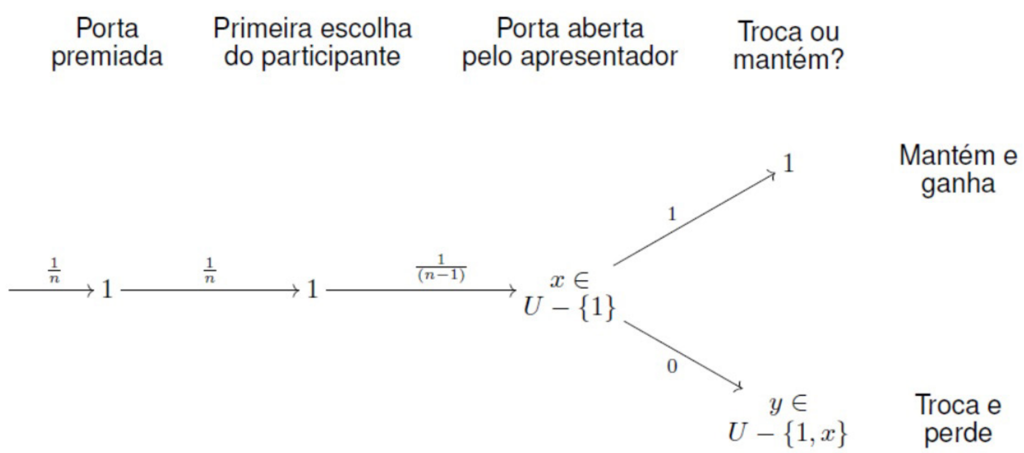


Figura 3. Diagrama de árvore para o caso em que o participante escolhe inicialmente uma porta premiada no jogo das portas.

Em que, U é o conjunto das portas dispostas no palco.

O participante pode escolher apenas um elemento no conjunto universo de portas U, e para satisfazer este primeiro caso, sua escolha deve ser o único elemento premiado do conjunto de portas. O apresentador pode escolher um elemento qualquer do conjunto de portas, não premiada, e para que o jogador ganhe, é necessário que ele mantenha a porta. Sendo assim, diante a probabilidade a ser calculada (P(GIM)), a probabilidade de ele trocar de porta, é nula, pois a priori já é certo que ele mantém. Observe que manter e perder ou trocar e ganhar não são cenários possíveis, mesmo sem a informação a priori.

Pode-se determinar P(GIM) como o produto das probabilidades das ocorrências associadas ao evento em que ele mantém e ganha, multiplicado pelo número de portas que pode ser a premiada (n) e pelo número de portas que o apresentador pode abrir (n-1):

$$P(G|M) = n(n-1)\left[\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}1\right] = \frac{1}{n}$$

3.2 Caso 2: Participante escolhe inicialmente uma porta não premiada

Indiscutivelmente, nessas condições, o jogador ganha somente se trocar de porta. Logo, este caso define a probabilidade de ganhar dado que o participante troca de porta (PGIT)) como mostra o diagrama apresentado na figura 4:

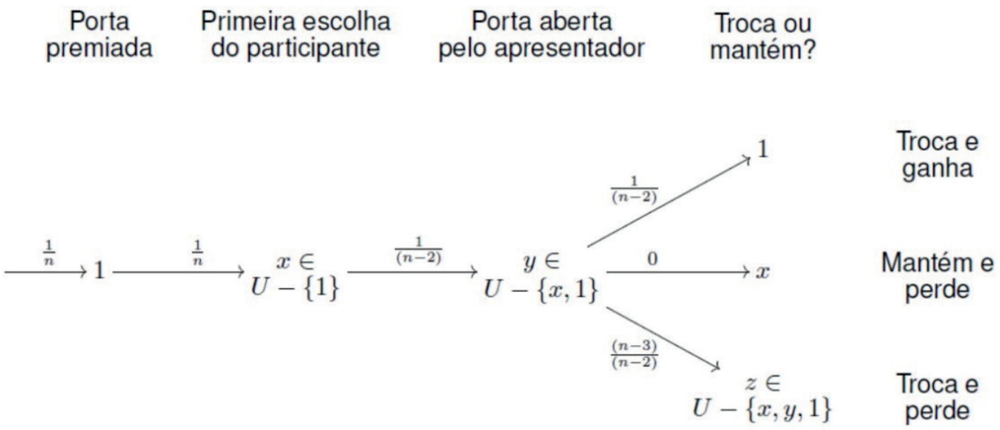


Figura 4. Diagrama de árvore para o caso em que o participante escolhe inicialmente uma porta não premiada no jogo das portas.

Em que, U é o conjunto das n portas dispostas no palco.

Neste caso, o participante pode escolher um elemento qualquer do conjunto de portas não premiadas, então o apresentador pode escolher um elemento qualquer do conjunto universo exceto a porta premiada e a escolhida pelo jogador. Para que o jogador ganhe nesta situação, é necessário que ele troque de porta. Porém, ao trocar, ele pode fazer uma boa ou uma má escolha, trocando pela porta premiada e ganhando ou trocando por uma outra porta sem o prêmio (ou porta com o bode) e perdendo. Assim, a probabilidade de ele ganhar dado que troca fica dividida entre dois casos, um de sucesso e um de fracasso, enquanto que, diante a probabilidade a ser calculada (P(GIT)), manter a escolha inicial não pode ocorrer, dado a informação a priori que ele troca. Observemos que, manter e ganhar é um cenário impossível, mesmo sem a informação a priori.

Para determinar (P(G|T) faz-se o produto entre o número de portas que podem estar premiadas (η), o número de portas não premiadas cujo participante pode escolher (η -1), o número de portas que o apresentador pode abrir (n -2) e o produto das probabilidades das ocorrências associadas ao evento em que ele troca e ganha:

$$P(G|T) = n(n-1)(n-2)\left[\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n-2}\frac{1}{n-2}\right] = \frac{n-1}{n(n-2)}$$

Os valores de probabilidade calculados por meio da expressão probabilística foram confrontados com os valores obtidos na simulação (Figura 2) e, assim, pôde-se verificar a sua validade, conforme apresentado na tabela 1.

Número de portas (n)	Probabilidade de Ganhar	
	Trocando $\left(\frac{n-1}{n(n-2)}\right)$	Mantendo $\left(\frac{1}{n}\right)$
3	0,66	0,33
4	0,37	0,25
5	0,26	0,2
10	0,1125	0,1
50	0,0204	0,02
100	0,0101	0,01
1000	0,001002	0,001

Tabela 1. Probabilidade de ganhar trocando ou mantendo a porta, por número de portas.

Após resolver apenas o problema original pode-se conjecturar que as probabilidades de ganhar trocando e mantendo são sempre complementares, quando na verdade não são, fato evidenciado na tabela 1. O jogo com três portas é um caso especial do problema, em que no Caso 2, onde o participante escolhe inicialmente uma porta não premiada ao trocar de porta ele tem apenas uma opção de escolha que é a porta premiada, enquanto nos outros casos é possível trocar e perder.

É possível perceber, através do estudo de limites das expressões obtidas que, conforme o número de portas aumenta, as probabilidades de vencer tendem a zero.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n(n-2)} = 0$$

Já que esta probabilidade de ganhar, trocando ou não, fica reduzida conforme se aumenta o número de portas no jogo, pois, se considerarmos $n_1 < n_2$ teremos $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_1}$ e $\frac{n_2-1}{n_2(n_2-2)} < \frac{n_1-1}{n_1(n_1-2)}$. . Este fato também pode ser observado no gráfico (figura 2), pois ele decresce.

Note que $\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$ é sempre verdade para todo n ≥ 3 com n natural.

Com efeito, pois

$$-1 > -2$$

$$n - 1 > n - 2$$

$$n(n-1) > n(n-2)$$

$$\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$$

Em que, na última passagem, houve a multiplicação por $\frac{1}{n^2(n-1)}$.

Além disso, a diferença entre a probabilidade de ganhar trocando e a de ganhar mantendo a porta diminui quando n cresce, pois $\frac{n_2-1}{n_2(n_2-2)} - \frac{1}{n_2} < \frac{n_1-1}{n_1(n_1-2)} - \frac{1}{n_1}$ se $n_1 < n_2$.

De qualquer forma, trocar de porta sempre fornece maior chance de ganhar.

É possível determinar também, a probabilidade de ganhar (P(G)), utilizando o Teorema de Probabilidade Total:

$$P(G) = P(T)P(G|T) + P(M)P(G|M)$$

Em que, P(T) é a probabilidade de o jogador trocar a porta e P (M) é a probabilidade de o jogador manter a porta escolhida inicialmente.

De modo que P (T) = 1 - P(M), ou seja, as probabilidades de o jogador trocar e de manter são complementares.

Podemos supor, por exemplo, que o jogador decide aleatoriamente entre trocar e manter, com mesmo peso, ou seja, $P(T) = P(M) = \frac{1}{2}$, então P(G) = $\frac{1}{2}P(G|T) + \frac{1}{2}P(G|M)$, assim, dados P(G|T) e P(G|M) já calculados, temos:

$$P(G) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n(n-2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{2n-3}{2n(n-2)}$$

Perder é o complementar de ganhar, assim, P(P) = 1 - P(G)

Para $n = 3,\ P(G) = P(P) = \frac{1}{2}$, ou seja, no caso em que o jogador não sabe que manter é mais vantajoso e decide aleatoriamente se troca ou não, tem mesma probabilidade de ganhar ou perder.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo aumentando o número de portas, ainda é vantajoso para o participante trocar de porta, uma vez que a probabilidade de ele ganhar trocando é sempre maior que a probabilidade de ele ganhar mantendo a porta escolhida inicialmente. Trocar de porta não garante a vitória, mas é a melhor estratégia. Outros estudos podem ser realizados variando o número de portas abertas pelo apresentador, o número de portas que o competidor pode escolher e o número de portas premiadas.

REFERÊNCIAS

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade:** Um Curso Introdutório. Vol. 10. 3 ed. São Paulo: Edusp, 2008.

MLODINOW, L. **The drunkard's walk**: How randomness rules our lives. 1 ed. London: Penguin Books, 2009.

ÍNDICE REMISSIVO

B

C

D

E

F

G

I

J

M

Atena
Editora
2020