

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo

Edição de Arte: Lorena Prestes

Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa

Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia

Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá

Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima

Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice

Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense

Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste

Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador

Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano

Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
 Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
 Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
 Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
 Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
 Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
 Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
 Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
 Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
 Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
 Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
 Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
 Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
 Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
 Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
 Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
 Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
 Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
 Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
 Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
 Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
 Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
 Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
 Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
 Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
 Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
 Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
 Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
 Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
 Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
 Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas
 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado
 Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-86002-71-3
 DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compõem esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR ENVOLVENDO TEMAS RELACIONADOS À SAÚDE	
Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.7132002041	
CAPÍTULO 2	13
O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO	
Wagner Gomes Barroso Abrantes Felipe da Silva Souza	
DOI 10.22533/at.ed.7132002042	
CAPÍTULO 3	26
REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Elisângela Guimarães Firmino Neivaldo Rodrigues dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.7132002043	
CAPÍTULO 4	38
O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Frederico Braidá Rodolfo Eduardo Vertuan Rodrigo Manoel Dias Andrade	
DOI 10.22533/at.ed.7132002044	
CAPÍTULO 5	49
O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: PRINCÍPIOS DA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL	
Júlio César Deckert da Silva Ruy César Pietropaolo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002045	
CAPÍTULO 6	61
ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW	
Adina Veronica Remor Wiliam Francisco de Araujo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002046	
CAPÍTULO 7	75
A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS	
Bruno Luiz Silva Rodrighero Daiane Ferreira da Silva Rodrighero	
DOI 10.22533/at.ed.7132002047	

CAPÍTULO 8	86
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR	
Vitória Fenilli Vidaletti Jahina Fagundes de Assis Hattori Thays Menegotto de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.7132002048	
CAPÍTULO 9	98
MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE	
Santiago del Rio Oliveira André Luiz Salvat Moscato	
DOI 10.22533/at.ed.7132002049	
CAPÍTULO 10	110
MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE	
Samuel Conceição de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.71320020410	
CAPÍTULO 11	120
ESPAÇO E FORMA: A FORMAÇÃO DO PEDAGOGO E A LEGISLAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Luciano Tadeu Corrêa Medeiros	
DOI 10.22533/at.ed.71320020411	
CAPÍTULO 12	133
ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL	
Ana Caroline de Almeida Silva João Vitor Teodoro Douglas Silva Maioli	
DOI 10.22533/at.ed.71320020412	
CAPÍTULO 13	142
O JOGO CORRIDA DE CAVALOS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA COMBINÁTORIA E DA PROBABILIDADE COM ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Patricia de Medeiros Silva Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos	
DOI 10.22533/at.ed.71320020413	
CAPÍTULO 14	153
DISCURSO DE ESTUDANTES DO 7º PERÍODO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA ACERCA DO ERRO DE ALUNOS RESOLVENDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS	
José Ferreira dos Santos Júnior Pedro Lucio Barboza	
DOI 10.22533/at.ed.71320020414	
CAPÍTULO 15	163
A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E O JOGO DE REGRAS MANCALA À LUZ DA TEORIA PIAGETIANA	
Maria Fernanda Maceira Mauricio Sidney Lopes Sanchez Júnior Francismara Neves de Oliveira	

Guilherme Aparecido de Godoi
DOI 10.22533/at.ed.71320020415

CAPÍTULO 16	178
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO PARA O MANEJO DE PLANTAS DANINHAS Elenice Weber Stiegelmeier DOI 10.22533/at.ed.71320020416	
SOBRE O ORGANIZADOR	189
ÍNDICE REMISSIVO	190

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 23/03/2020

Wagner Gomes Barroso Abrantes

UFRR-EAgra

Boa Vista/RR

<http://lattes.cnpq.br/5843918062848558>

Felipe da Silva Souza

Colégio Pedro II

Rio de Janeiro/RJ

<http://lattes.cnpq.br/5213597672875380>

RESUMO: Essa pesquisa tem como objetivo evidenciar indícios do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em questões da matemática elementar. Foram propostas quatro questões sobre funções a doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para o processo seletivo de ingresso em um curso de graduação na área de exatas. Utilizando a teoria apresentada por Tommy Dreyfus, é possível verificar que alguns alunos conseguiram realizar todos os processos do PMA. Outros tiveram certas dificuldades. O principal obstáculo encontrado por alguns alunos foi no processo de sintetização.

PALAVRAS-CHAVE: Pensamento Matemático Avançado; Funções; Abstração; Representação.

ADVANCED MATHEMATICAL THINKING FROM ISSUES ON ELEMENTARY SCHOOL FUNCTIONS

ABSTRACT: This research aims to show evidence of Advanced Mathematical Thinking (AMT) in matters of elementary mathematics. Four job questions were proposed to twelve high school students who are preparing for the selection process for entering an undergraduate degree in the exact field. Using the theory presented by Tommy Dreyfus, it is possible to verify that some students were able to perform all the processes of AMT. Others had certain difficulties. The main obstacle encountered by some students was in the synthesis process.

KEYWORDS: Advanced Mathematical Thinking; Functions; Abstraction; Representation.

1 | INTRODUÇÃO

A pesquisa sobre o pensamento matemático avançado se consolidou na década de 80, durante o encontro anual do *International Group for Psychology of Mathematics Education*, a partir da constituição do grupo *Advanced Mathematical Thinking Group*. A proposta desse grupo seria

o aprofundamento das questões relativas ao ensino e ao aprendizado da matemática por alunos adultos (PINTO, 2002).

Alguns pesquisadores se destacaram na busca de explicações relacionadas ao pensamento matemático avançado, dentre eles estão Dreyfus (2002), Tall (2002), Grey et al. (1999) e Resnick (1987).

As pesquisas decorrentes mostram que o Pensamento Matemático Avançado traz ingredientes adquiridos na educação básica e que todo o processo para que o aluno consiga alcançar o estágio avançado do pensamento matemático pode ser estimulado antes mesmo dele ingressar no ensino superior.

Para Dreyfus (2002), não há uma nítida distinção entre muitos dos processos dos pensamentos matemáticos elementar e avançado, embora a matemática avançada seja mais focada na abstração da definição e dedução. O pesquisador acredita que é possível pensar sobre tópicos da matemática elementar de modo avançado, assim como também é possível pensar sobre tópicos da matemática avançada de modo elementar, pois a diferença entre eles está apenas na complexidade e no tratamento de cada tópico.

Professores da educação básica podem buscar desenvolver uma maior capacidade de abstração do aluno, mesmo utilizando objetos considerados da matemática elementar, de maneira a minimizar o impacto sofrido no momento do ingresso nos cursos de graduação.

Nasser (2013) afirma que a abstração em matemática é uma habilidade que nem sempre é dominada pelos alunos ingressantes no Ensino Superior, e seu desenvolvimento deve ser estimulado pelos professores das disciplinas básicas.

Esse processo de estímulo trará ao aluno um novo conhecimento, que poderá se somar ou entrar em conflito com aquele conhecimento que o aluno já possuía. Moreira e David (2016) destacam que é um processo de contradição dialética que se estabelece entre o conhecimento “novo” e “antigo”. Os autores acrescentam que o conhecimento anterior do aluno pode servir de obstáculo para o avanço no aprendizado, por outro lado, é indiscutível que os processos de abstração e generalização se desenvolvem essencialmente com esses conhecimentos.

Nesse sentido, a presente pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio, que estão se preparando para realizar seleção de ingresso em cursos de graduação na área de exatas, cujo objetivo é analisar o pensamento matemático avançado desses alunos sob as orientações teóricas de Tommy Dreyfus, a partir de tópicos da matemática elementar.

2 | PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

O pensamento matemático avançado, para Dreyfus (2002), está relacionado à interação entre diversos processos mentais, tais como representação, transformação, visualização, generalização, entre outros. Dois processos ganham destaque: a representação e a abstração.

Dreyfus (2002) explica que os processos envolvidos na representação se subdividem em três outros processos: a representação, a mudança entre representações e a modelação.

1) A representação, por sua vez, divide-se em representação simbólica e representação mental.

1.a) A representação simbólica é responsável por explicitar, através de símbolos, o conhecimento implícito do aluno.

1.b) A representação mental corresponde a um esquema interno que o aluno utiliza com o intuito de interagir com o mundo exterior.

2) A mudança entre representações sugere a capacidade do aluno de transitar entre as diversas representações do objeto em estudo, conforme a conveniência para a solução do problema. Sendo assim, destaca-se a relevância de conhecer as diversas representações de um objeto, a fim de flexibilizar o uso do objeto na solução de um dado problema.

3) A modelação corresponde a encontrar uma representação matemática para um objeto que não é matemático.

Já os processos envolvidos na abstração são divididos em dois pré-requisitos, somados à representação, segundo Dreyfus (2002): a generalização e a sintetização.

1) Generalizar é tomar um caso particular, verificar semelhanças com outros casos e expandir validades.

2) Sintetizar é combinar objetos matemáticos distintos com o intuito de solucionar um problema.

Nessa perspectiva, dentre os processos relacionados ao pensamento matemático avançado, o mais importante é a abstração. Dreyfus (2002) afirma que, ao conseguir desenvolver a habilidade de fazer conscientemente abstrações a partir de situações matemáticas, o aluno alcança o nível avançado do pensamento matemático. Dessa forma, os professores da educação básica devem estar engajados em contribuir com o desenvolvimento dessa capacidade de abstração do aluno, sendo o objetivo principal daqueles que visam à educação matemática avançada.

3 | ASPECTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa, de cunho qualitativo, foi feita com doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para realizar seleção para ingressarem em cursos de graduação na área de exatas. Essa investigação visa fazer uma análise, a partir de temas da matemática elementar, sobre o estágio de abstração desses alunos e, conseqüentemente, o quão avançado está o nível do pensamento matemático desses alunos, segundo o olhar de Tommy Dreyfus (2002).

A intervenção consiste em quatro questões discursivas entregues simultaneamente aos alunos, sem quaisquer restrições quanto a consultas, discussões entre discentes ou métodos de resolução. O tempo estimado para realização das atividades foi de uma hora e quarenta minutos, sendo uma média de vinte e cinco minutos por questão. As quatro questões abordam o tema de Funções, nas suas diferentes representações. As três primeiras questões envolvem temas contextualizados de Função Afim, enquanto a última questão envolve temas gerais de Função.

A primeira questão divulga dados no seu enunciado e, ao mesmo tempo, por meio do gráfico. Cabe ao aluno interpretar o enunciado e o gráfico para traçar sua estratégia para a solução do problema.

Abaixo, está apresentada a primeira questão da atividade:

Questão 1: O gráfico abaixo mostra a posição do CARRO 1, em função do tempo, a partir da cidade A até a cidade B, que distam 600 Km uma da outra. Um segundo carro, o CARRO 2, saiu da cidade C, situada entre as cidades A e B e distante 150 Km de A, no mesmo instante em que o CARRO 1 iniciou o seu deslocamento. Considerando que o CARRO 2 também está indo para a cidade B, determine a velocidade média adotada por ele para chegar na cidade B no mesmo instante que o CARRO 1.

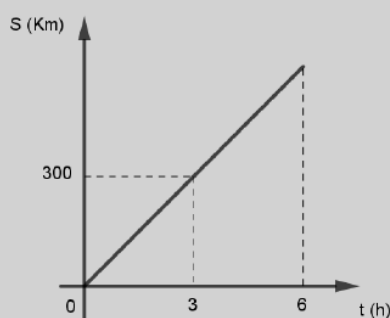


Figura 1 – Primeira questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

Já a segunda questão traz poucos dados no seu enunciado. Os principais dados estão expostos no gráfico. Dessa forma, o aluno deve conseguir extrair os dados do gráfico para solucionar o problema. Cabe ressaltar que a interpretação do enunciado é sempre de grande importância no Pensamento Matemático.

O enunciado da segunda questão está apresentado a seguir:

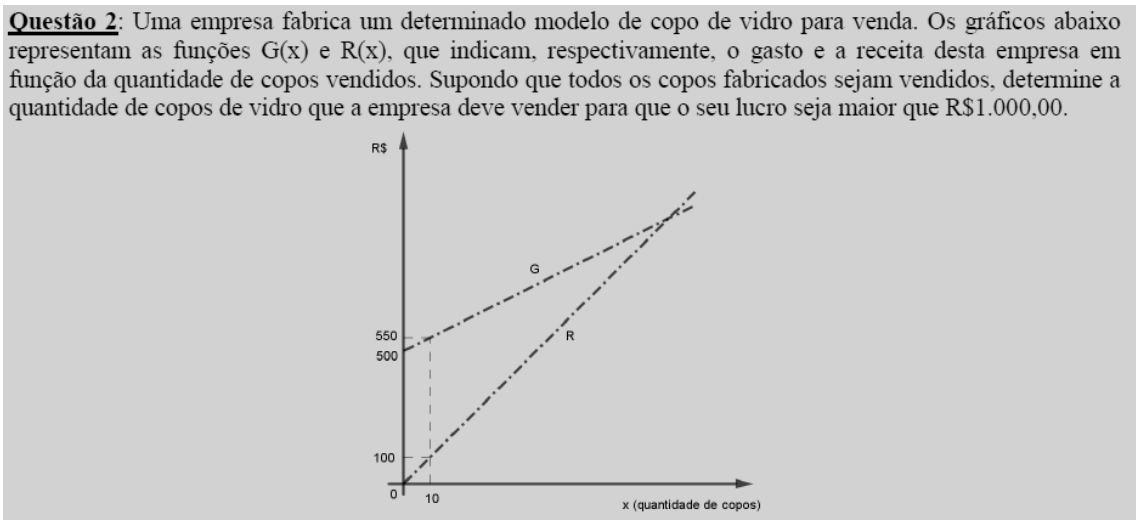


Figura 2 – Segunda questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

A terceira questão traz uma proposta diferente da anterior. Aqui, o aluno não tem o artifício do gráfico para extrair os dados. Ele conta apenas com a interpretação do enunciado para traçar sua estratégia de solução do problema.

Abaixo, segue o enunciado da terceira questão:

Questão 3: Duas lojas oferecem planos para aluguel de máquinas de café expresso. O plano da loja A consiste em uma taxa de adesão de R\$1.150,00 mais uma taxa mensal de R\$320,00. Já o plano da loja B consiste em uma taxa de adesão de R\$500,00 mais uma taxa mensal de R\$450,00. Se uma empresa irá adquirir um plano com pagamento da taxa de adesão e da primeira taxa mensal em abril, a partir de que mês o plano A passa a ser mais favorável?

Figura 3 – Terceira questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

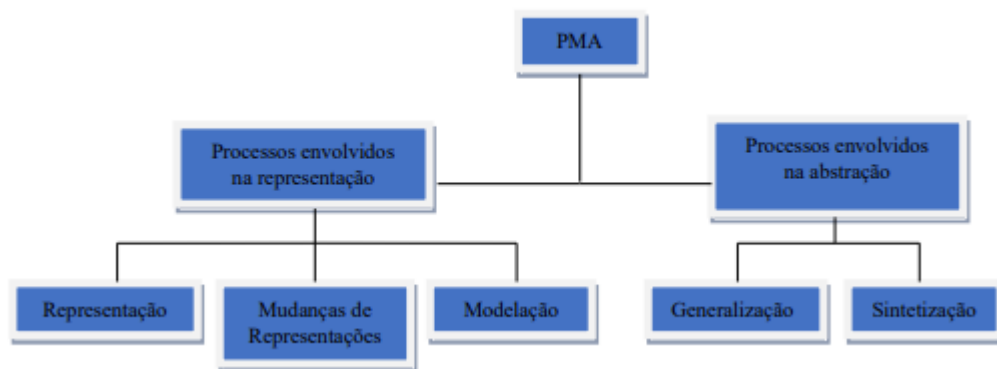
Já a quarta questão é estritamente algébrica. Não há contextualização. O aluno deverá se valer de todos os objetos que compõem uma função para poder solucionar a questão.

O enunciado da quarta questão segue abaixo:

Questão 4: Sejam as funções $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3-x}}$ e $g(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}}$. É possível afirmar que $f(x) = g(x)$? Justifique.

Figura 4 – Quarta questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

A análise de dados será feita à luz do olhar de Tommy Dreyfus (2002) sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA), conforme o fluxograma a seguir, elaborado de forma resumida para facilitar a compreensão.



4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A partir dos dados coletados, foi observado que todos os alunos acertaram a primeira questão. De acordo com os processos do PMA envolvidos na representação, é possível fazer a seguinte análise:

I – Representação: Todos os alunos utilizaram a simbologia matemática de forma a contribuir para a solução do exercício;

II – Mudanças de Representações: Todos os alunos conseguiram transitar entre as representações algébrica e gráfica, tendo também interpretado corretamente o enunciado que estava em linguagem natural.

III – Modelação: Apenas cinco alunos descreveram as posições dos carros como função polinomial do 1º grau, tendo como incógnita o tempo t .

Fazendo uma análise conforme os processos do PMA envolvidos na abstração, é possível destacar:

I – Generalização: De acordo com os dados apresentados sobre o deslocamento de ambos os carros em pontos específicos, todos os alunos foram capazes de identificar que se tratava de objetos em Movimento Uniforme. Porém, apenas cinco conseguiram associar o Movimento Uniforme à Função Afim.

II – Sintetização: Todos os alunos foram capazes de utilizar diferentes conceitos para a resolução do problema. Sete alunos utilizaram as fórmulas de física como ferramenta para solucionar a questão, três utilizaram o conceito de taxa de variação média, análise de gráfico e as informações do enunciado para construção das funções e dois utilizaram os pontos do gráfico e as informações do enunciado para construção das funções.

Abaixo, segue um exemplo da solução de um aluno:

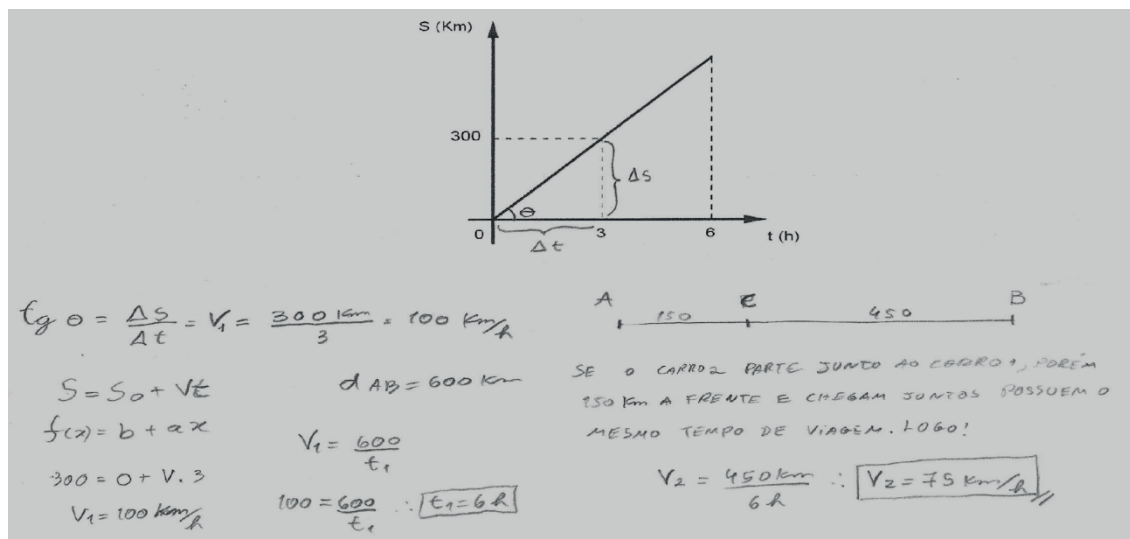


Figura 5 – Solução da questão 1

Na solução apresentada na Figura 5, o aluno transita entre as representações algébrica e gráfica, utiliza o conceito de taxa de variação média para determinar a velocidade média do carro 1, fazendo a prova real por meio da representação algébrica da função afim. O aluno demonstra algebricamente que depois de 6 horas o carro 1 percorre os 600km e utiliza o conceito de taxa de variação média para encontrar a velocidade do carro 2.

A segunda questão apresentou um número de erros significativo. Foram cinco soluções erradas e sete corretas. A maioria dos erros foi devido a não visualização da inequação como ferramenta para resolver a questão. Vamos fazer uma análise sobre os processos do Pensamento Matemático Avançado na representação observados questão:

I – Representação: De uma maneira geral, os alunos conseguiram interpretar as representações gráficas como funções afins, utilizando esta simbologia como forma de iniciar a solução.

II – Mudanças na representação: Os alunos conseguiram transitar entre as representações gráfica e algébrica para possibilitar o desenvolvimento da questão.

III – Modelação: Os alunos conseguiram escrever algebricamente as funções Gasto e Receita. Diferente da questão anterior, nenhum aluno utilizou o conceito de taxa de variação média para determinar os coeficientes angulares das funções. A determinação das funções foi feita a partir das coordenadas dos pontos dados nos gráficos.

Vejamos agora a análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração observados na segunda questão:

I – Generalização: Os alunos conseguiram, a partir das características dadas, generalizar as características da função afim para as funções Gasto e Receita.

II – Sintetização: Todos os alunos utilizaram as propriedades das funções afins nesta questão. Porém, apenas sete alunos conseguiram utilizar corretamente o conceito de inequação como ferramenta para solucionar a questão e cinco usaram de maneira incorreta essa ferramenta, não conseguindo assim chegar à resposta devida.

Abaixo, há duas soluções que serão apresentadas, sendo uma correta e outra incorreta.

$G(x) = ax + b \quad \therefore G(x) = 5x + 500$
 $G(0) = b = 500$
 $G(10) = 10a + 500 = 550$
 $a = 5$

$R(x) = cx + d \quad \therefore R(x) = 10x$
 $R(0) = d = 0$
 $R(10) = 10c = 200 \quad \therefore c = 10$

$R: \text{A empresa deve vender mais de 300 copos.}$

$R(x) > G(x) + 1000$
 $10x > 5x + 1500$
 $5x > 1500$
 $x > 300$

Figura 6 – 1ª Solução da questão 2

Na figura 6, o aluno utiliza as coordenadas dos pontos apresentados no gráfico para construir algebricamente as funções Gasto e Receita. Ao interpretar corretamente que o lucro é a diferença entre a Receita e o Gasto, o aluno lança mão da inequação para chegar ao resultado pedido.

Na solução apresentada na Figura 7 é possível observar que o aluno consegue fazer a mudança de representação das funções Gasto e Receita: da gráfica para a algébrica. O aluno identifica a necessidade de utilização da inequação como ferramenta para a solução da questão, mas não a emprega de maneira correta, obtendo então uma resposta incorreta.

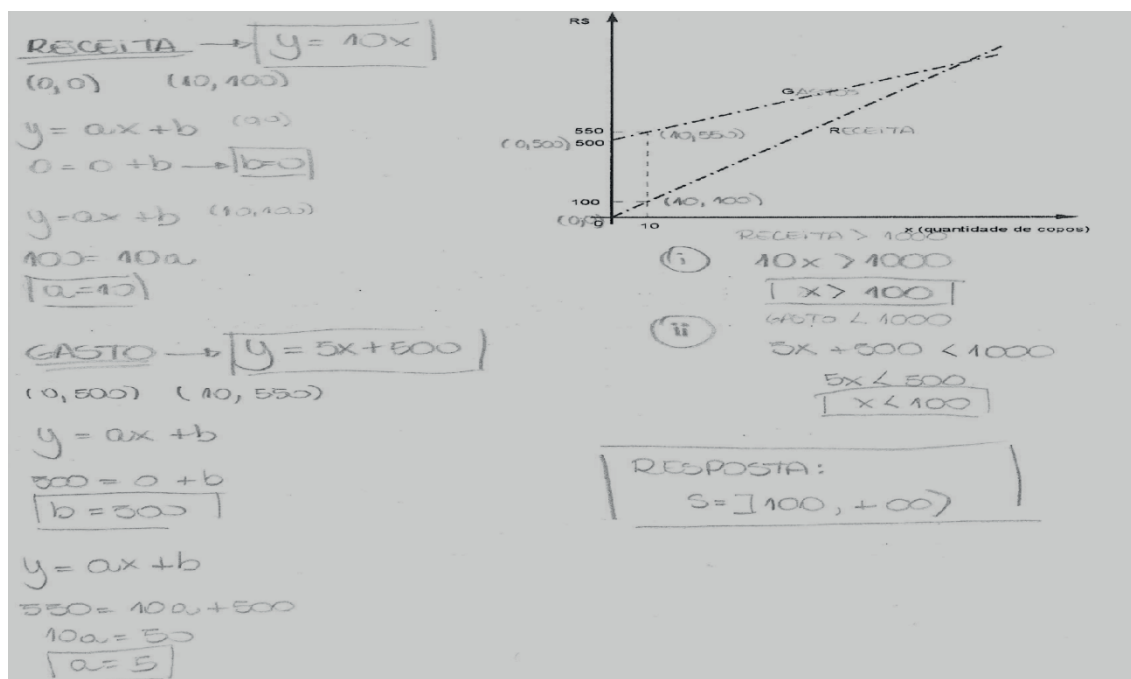


Figura 7 – 2ª Solução da questão 2

A terceira questão apresentou dez acertos e dois erros. Três alunos não resolveram a questão utilizando o conceito de função afim. Esses alunos calcularam o quantitativo pago em cada plano mês a mês e fizeram a comparação. Vamos analisar o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado na representação observados nessa questão.

I – Representação: Todos os alunos utilizaram a simbologia matemática para solucionar a questão.

II – Mudança na representação: Nove alunos converteram os dados da linguagem natural para a representação algébrica. Três alunos transitaram entre a representação de linguagem natural e a representação aritmética.

III – Modelação: Apenas nove alunos conseguiram escrever os valores pagos em cada plano como função do mês.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração, é possível fazer a seguinte análise:

I – Generalização: A partir dos dados divulgados no enunciado, nove alunos conseguiram generalizar as propriedades da função afim para os planos de ambas as empresas. Observou-se que três alunos podem ter apresentado dificuldade de generalização do valor pago em cada plano por terem optado por uma solução aritmética em detrimento da algébrica. Cabe ressaltar que esses alunos não apresentaram dificuldades conceituais sobre Função Afim nas questões anteriores.

II – Sintetização: Nove alunos utilizaram os conceitos de função afim e de inequação para resolver a questão, enquanto três alunos utilizaram operações básicas de aritmética como ferramenta para solução. Dentre aqueles que

utilizaram os conceitos de inequação, dois não atingiram a resposta correta por inconsistência no intervalo ao qual pertence a incógnita x .

Abaixo, segue um exemplo de solução da terceira questão:

$$\begin{array}{l} \frac{A}{1150 + 320x} < \frac{B}{500 + 450x} \\ 1150 + 320x < 500 + 450x \\ 650 < 130x \\ \boxed{5 < x} \\ \text{a partir de } 5^\circ \text{ mês.} \end{array}$$

Figura 8 – Solução da questão 3

Note que o aluno representa corretamente como funções afins os valores pagos em cada plano por mês e utiliza a inequação como ferramenta para resolução do exercício. Porém, $x > 5$, logo a resposta seria “a partir do 6º mês”.

Na quarta questão, cinco alunos conseguiram desenvolver a solução corretamente. Sete não chegaram à resposta correta, sendo que um deixou em branco, cinco tiveram problemas para encontrar os domínios de alguma das funções e um aluno fez atribuindo valor à incógnita e concluindo a igualdade.

A seguir, será feita a análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na representação:

I – Representação: Com exceção do aluno que deixou a questão em branco e do aluno que atribuiu valor à incógnita, os demais conseguiram expressar algebricamente as condições dos domínios das funções $f(x)$ e $g(x)$.

II – Mudanças de representação: Os cinco alunos que acertaram a questão transitaram entre a representação algébrica das inequações e as representações na reta real. Dentre os alunos que erraram a questão, apenas dois utilizaram desse artifício.

III – Modelação: Entendemos que esse processo não se aplica a essa questão, tendo em vista que ela é puramente algébrica.

Agora, vamos fazer uma análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração que foram observados nessa questão:

I – Generalização: Os cinco alunos que acertaram integralmente essa questão e os cinco que tiveram problemas para encontrar os domínios das funções conseguiram generalizar a condição de igualdade para todas as funções, isto é, a lei de formação, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem devem ser todos iguais. O aluno que atribuiu valor generalizou de maneira incorreta, sem o formalismo matemático.

II – Sintetização: Os cinco alunos que acertaram a questão utilizaram os conceitos de inequação e conjuntos para resolver a questão. Os cinco alunos que tiveram problemas para a construção dos domínios das funções tiveram problemas exatamente na operação entre conjuntos, obtendo assim o domínio incorreto.

A seguir, seguem duas soluções da quarta questão:

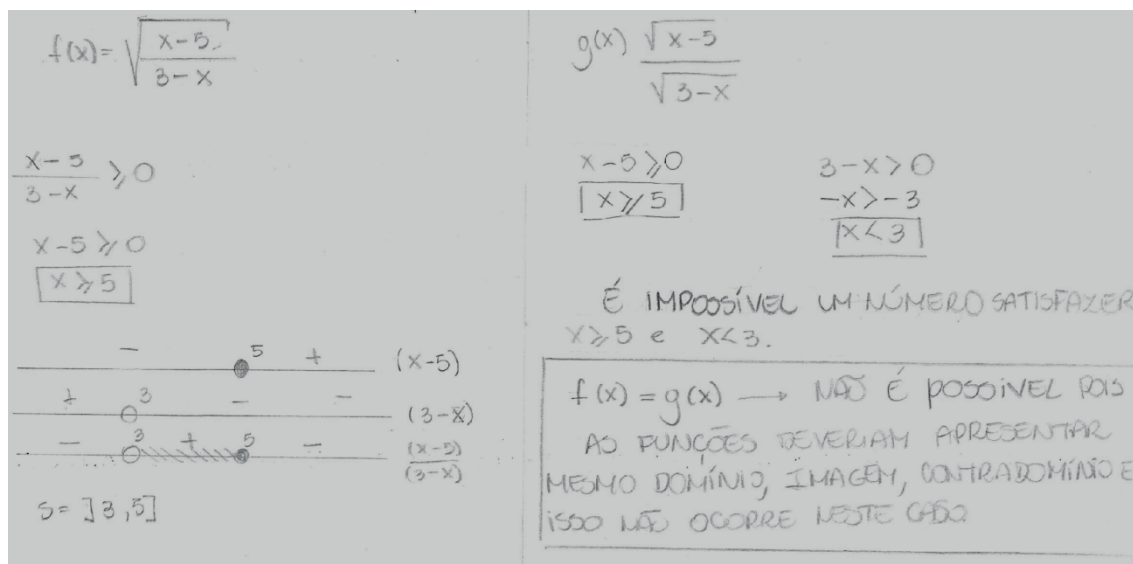


Figura 9 – 1ª Solução da questão 4

Na Figura 9, é possível observar que o aluno utiliza a inequação para o cálculo de ambos os domínios, sendo que no caso da função $f(x)$ o aluno faz a conversão para a representação geométrica com intuito de melhor analisar a questão. No caso da função $g(x)$, o aluno entende que é necessário fazer a interseção dos conjuntos obtidos para determinar seu domínio. Como a interseção é vazia, não há número real que satisfaça o valor de x .

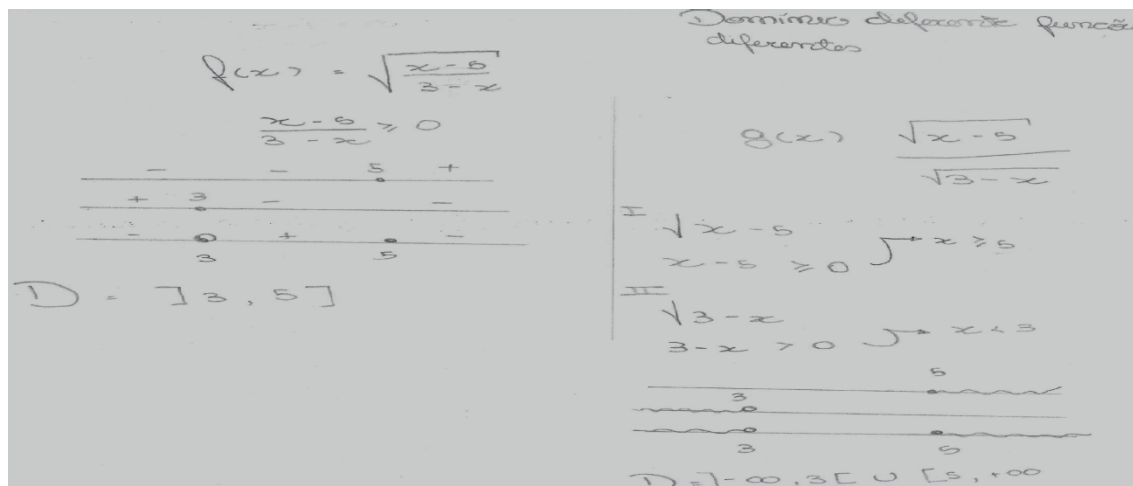


Figura 10 – 2ª Solução da questão 4

Já na segunda solução apresentada, o aluno comete um erro ao fazer a análise dos conjuntos obtidos para determinar o domínio de $g(x)$. Ao invés de fazer a operação de interseção entre os conjuntos, o aluno faz a união entre eles, determinando dessa forma o domínio errado para a função $g(x)$.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi evidenciar que há indícios do Pensamento Matemático Avançado, mesmo se tratando da Matemática Elementar, sem salientar o caráter comparativo entre os alunos. Foram propostas quatro questões de temas elementares de funções para doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para o processo seletivo de ingresso em curso de graduação na área de exatas.

Todos os alunos acertaram a primeira atividade, mas sete não fizeram a generalização do movimento uniforme como uma função afim. Esses alunos utilizaram fórmulas prontas da física nas suas soluções. Sendo assim, não foi possível identificar de generalização ou se, o fato deles utilizarem os conhecimentos aprendidos na disciplina de física, foi uma questão de estratégia.

A segunda questão apresentou cinco soluções incorretas devido às inconsistências nas inequações utilizadas como ferramenta para solucionar o problema. Isso demonstra a deficiência na capacidade de sintetização do aluno.

A terceira questão apresentou apenas duas soluções erradas em virtude de inconsistências nas inequações e, assim como na questão anterior, evidencia uma deficiência na capacidade de sintetização do aluno. Houve também o fato de que três alunos optaram pela solução aritmética em detrimento da algébrica. Não foi possível identificar se isso se deve a dificuldades de generalização ou se foi uma estratégia de solução.

A quarta questão apresentou seis soluções incorretas e uma em branco. Dentre as seis incorretas, em uma o aluno tentou generalizar por substituição de valores, mas a falta do formalismo ocasionou uma inconsistência matemática. As cinco soluções restantes trouxeram problemas na operação entre conjuntos, o que evidencia deficiência na capacidade de sintetização do aluno.

Sendo assim, foi possível evidenciar que em todas as questões houve alunos que conseguiram realizar os processos do PMA. A abstração foi o principal problema comprovadamente apresentado por alguns alunos, sendo mais evidente no processo de sintetização. A necessidade de utilização de diversos objetos matemáticos na mesma questão pode se tornar um grande obstáculo para os alunos do Ensino Médio. Em alguns casos, não foi possível identificar se houve deficiência na capacidade de generalização dos alunos. Foi possível notar que aqueles alunos que tiveram problemas de abstração, tiveram também problemas na modelação.

REFERÊNCIAS

- DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking process**. In: TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 25-41.
- GREY, E. et al. **Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics**. Educational Studies in Mathematics, v. 38, n. 1-3, p. 111-133. 1999.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.
- NASSER, L. **O papel da abstração no pensamento matemático avançado**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v.1, p. 891-897, 2013.
- PINTO, M.M.F. **Educação matemática no ensino superior**. Educação em Revista, Belo Horizonte, n.36, dez, 2002.
- RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington, National Academy Press, 1987.
- TALL, D. **The psychology of advanced mathematical thinking**. In: TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

ÍNDICE REMISSIVO

B

Bioprocessos 110, 111, 118
Blocos de Montar 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47

C

Combinatória 123, 142, 143, 144, 146, 148, 149, 150, 151, 152
Construção do Conhecimento 45, 161, 163, 165
Crescimento Populacional 86, 87, 91, 96, 97

D

Discurso 5, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161

E

Educação Financeira 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36
Estatística 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 42, 55, 57, 86, 122, 123, 189

F

Funções 13, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 43, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 64, 66, 75, 76, 80, 81, 82, 84, 107, 177
Futuros Professores 5, 153, 155, 156, 158, 159, 160

G

Geometria 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 120, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 132

I

Interdisciplinaridade 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 189

J

Jogos 32, 34, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 126, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 159, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177

M

Manejo De Plantas Daninhas 178, 180, 182, 183, 187
Matemática Aplicada à Engenharia 98
Matemática Financeira 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34
Modelagem Matemática 58, 86, 87, 96, 110, 111, 113
Modelos Matemáticos 86, 87, 96, 98, 100

N

Números Complexos 55, 56, 57, 75, 76, 79, 80, 82, 83, 84

O

Otimização 178, 180, 182, 187, 188

P

Pensamento Matemático Avançado 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25

Plano Complexo 57, 75, 76, 82, 83, 84

Probabilidade 4, 11, 42, 55, 122, 123, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 150, 151, 152

Programação não Linear 178, 180, 183, 187

R

Reforma Curricular 49, 50, 51, 54, 55, 60

S

Séries Iniciais 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 176

Solidificação 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108

T

Teorema de Lagrange 61, 62, 65, 66, 67, 70, 74

Teoria de Grupos 61, 62, 63, 65, 74

Transformações Geométricas 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60

 **Atena**
Editora

2 0 2 0