

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo

Edição de Arte: Lorena Prestes

Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie di Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
 Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
 Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
 Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
 Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
 Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
 Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
 Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
 Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
 Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
 Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
 Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
 Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
 Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
 Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
 Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
 Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
 Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
 Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
 Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
 Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
 Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
 Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
 Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
 Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
 Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
 Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
 Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
 Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
 Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
 Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas
 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado
 Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
 Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
 Modo de acesso: World Wide Web
 Inclui bibliografia
 ISBN 978-65-86002-71-3
 DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e
 soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compõem esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR ENVOLVENDO TEMAS RELACIONADOS À SAÚDE	
Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.7132002041	
CAPÍTULO 2	13
O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO	
Wagner Gomes Barroso Abrantes Felipe da Silva Souza	
DOI 10.22533/at.ed.7132002042	
CAPÍTULO 3	26
REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Elisângela Guimarães Firmino Neivaldo Rodrigues dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.7132002043	
CAPÍTULO 4	38
O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Frederico Braidá Rodolfo Eduardo Vertuan Rodrigo Manoel Dias Andrade	
DOI 10.22533/at.ed.7132002044	
CAPÍTULO 5	49
O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: PRINCÍPIOS DA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL	
Júlio César Deckert da Silva Ruy César Pietropaolo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002045	
CAPÍTULO 6	61
ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW	
Adina Veronica Remor Wiliam Francisco de Araujo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002046	
CAPÍTULO 7	75
A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS	
Bruno Luiz Silva Rodrighero Daiane Ferreira da Silva Rodrighero	
DOI 10.22533/at.ed.7132002047	

CAPÍTULO 8	86
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR	
Vitória Fenilli Vidaletti Jahina Fagundes de Assis Hattori Thays Menegotto de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.7132002048	
CAPÍTULO 9	98
MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE	
Santiago del Rio Oliveira André Luiz Salvat Moscato	
DOI 10.22533/at.ed.7132002049	
CAPÍTULO 10	110
MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE	
Samuel Conceição de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.71320020410	
CAPÍTULO 11	120
ESPAÇO E FORMA: A FORMAÇÃO DO PEDAGOGO E A LEGISLAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Luciano Tadeu Corrêa Medeiros	
DOI 10.22533/at.ed.71320020411	
CAPÍTULO 12	133
ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL	
Ana Caroline de Almeida Silva João Vitor Teodoro Douglas Silva Maioli	
DOI 10.22533/at.ed.71320020412	
CAPÍTULO 13	142
O JOGO CORRIDA DE CAVALOS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA COMBINÁTORIA E DA PROBABILIDADE COM ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Patricia de Medeiros Silva Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos	
DOI 10.22533/at.ed.71320020413	
CAPÍTULO 14	153
DISCURSO DE ESTUDANTES DO 7º PERÍODO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA ACERCA DO ERRO DE ALUNOS RESOLVENDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS	
José Ferreira dos Santos Júnior Pedro Lucio Barboza	
DOI 10.22533/at.ed.71320020414	
CAPÍTULO 15	163
A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E O JOGO DE REGRAS MANCALA À LUZ DA TEORIA PIAGETIANA	
Maria Fernanda Maceira Mauricio Sidney Lopes Sanchez Júnior Francismara Neves de Oliveira	

Guilherme Aparecido de Godoi
DOI 10.22533/at.ed.71320020415

CAPÍTULO 16	178
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO PARA O MANEJO DE PLANTAS DANINHAS Elenice Weber Stiegelmeier DOI 10.22533/at.ed.71320020416	
SOBRE O ORGANIZADOR	189
ÍNDICE REMISSIVO	190

MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 07/01/2020

Santiago del Rio Oliveira

Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho;
Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru – São
Paulo

<http://lattes.cnpq.br/6469406277752689>

André Luiz Salvat Moscato

Instituto Federal do Paraná, Jacarezinho – Paraná

<http://lattes.cnpq.br/1744149363927228>

RESUMO: Processos de solidificação são de grande importância na indústria, em especial no segmento metalúrgico. Modelos matemáticos podem ser construídos e testados com o intuito de se obterem informações mais detalhadas de um processo de solidificação, como por exemplo, tempo de solidificação, posição da frente de solidificação e a distribuição de temperaturas no meio. Essas informações podem ser utilizadas, por exemplo, para aperfeiçoar um processo de solidificação. O objetivo desse trabalho é modelar matematicamente um processo de solidificação de plástico em molde utilizando um modelo transiente e unidimensional de transferência de calor por condução térmica. Efeitos de convecção térmica são ignorados.

São obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Foi realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Aplicada à Engenharia. Solidificação. Condução Térmica.

MATHEMATICAL MODEL OF A MOLD PLASTIC SOLIDIFICATION PROCESS

ABSTRACT: Solidification processes are of great importance in the industry, especially in the metallurgical segment. Mathematical models can be constructed and tested in order to obtain more detailed information from a solidification process, such as solidification time, solidification front position and distribution of temperatures in the middle. This information can be used, for example, to improve a solidification process. The objective of this work is to mathematically model a process of plastic solidification in mold using a transient and one-dimensional model of heat transfer by thermal conduction. Thermal convection effects are ignored. Analytical results are obtained for the distribution of temperatures in the liquid and solid phases and also a

nonlinear algebraic equation for determining the position of the solidification front. A numerical case study was conducted to verify the behavior of the resulting equations.

KEYWORDS: Mathematics Applied to Engineering. Solidification. Thermal Conduction.

1 | LISTA DE VARIÁVEIS

Grandezas

A	Área [m^2]
c	Calor específico/latente [$kJ/(kg.K)$]
h	Entalpia específica [kJ/kg]
k	Condutividade térmica [$W/(m.K)$]
\dot{Q}	Taxa de transferência de calor [kW]
t	Tempo [s]
T	Temperatura [K]
U	Velocidade [m/s]
x	Distância [m]

Símbolos gregos

$\acute{\alpha}$	Difusividade térmica [m^2/s]
ϵ	Excesso de temperaturas [adimensional]
h	Variável de similaridade [adimensional]
\tilde{n}	Massa específica [kg/m^3]

Subscritos

C	Referente ao molde
<i>condução</i>	Referente à condução
<i>convecção</i>	Referente à convecção
<i>entra</i>	Referente à entrada
F	Referente ao ponto de fusão
i	Referente ao plástico fundido no material
L	Referente ao líquido
p	Referente à pressão
S	Referente ao sólido
SL	Referente à solidificação
<i>sai</i>	Referente à saída

2 | INTRODUÇÃO

Solidificação ocorre em diversas aplicações ambientais, de engenharia,

médicas, dentre outras. No nosso ambiente, solidificação ocorre em lagos, estuários e no mar durante o inverno em locais com climas frios. O gelo formado subsequentemente derrete na primavera ou no verão. Com relação a aplicações de engenharia, solidificação ocorre em dispositivos de armazenamento de energia, trocadores de calor, processos de soldagem, processos de fundição e revestimento, remoção de material utilizando feixes de laser com alta potência, dentre outros. Aplicações médicas envolvendo solidificação são exemplificadas pelo congelamento de tecidos em crio cirurgias e a preservação de órgãos humanos e de animais em laboratório.

Na literatura existem inúmeros trabalhos envolvendo solidificação, desde aqueles que envolvem modelos matemáticos até aqueles que envolvem procedimentos experimentais. Merecem destaque os trabalhos de Alexiades e Solomon (1993), Gupta (2003) e de Mohs e Kulacki (2015). No primeiro e segundo trabalhos são apresentadas diversas soluções analíticas e exemplos de cálculo enquanto no terceiro trabalho são apresentados diversos aparatos experimentais envolvendo solidificação. Atualmente, solidificação é um dos tópicos contemporâneos em transferência de calor e massa, envolvendo um grande número de pesquisas, com ênfase em trabalhos numéricos e validação com soluções analíticas clássicas e procedimentos experimentais.

Nesse trabalho será analisada condução de calor unidimensional na presença de solidificação, com efeitos de convecção na fase líquida sendo ignorados. Será assumido que a transição de fase ocorre em uma única temperatura e que as duas fases são separadas por uma interface delgada. Esse é o caso, por exemplo, de solidificação de substâncias puras ou ligas eutéticas.

Serão obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Será realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

3 | MODELO MATEMÁTICO

Inicialmente é dado enfoque a uma característica que surge na análise de problemas de solidificação, a chamada frente de solidificação. A Figura. 1 mostra essa frente separando a região sólida da região líquida. As linhas horizontais tracejadas na Figura 1 representam um volume de controle infinitamente fino em torno dessa frente.

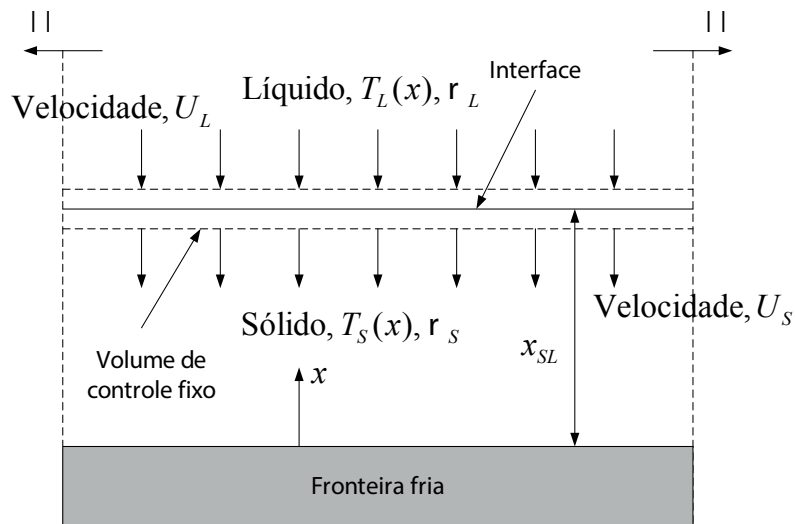


Figura 1: Solidificação a partir de uma fronteira fria.

É assumido que a solidificação ocorre no líquido devido a presença de uma fronteira fria, conforme a Figura 1. Conforme a solidificação avança, a interface desloca-se para cima (na direção x positiva) em um meio estacionário. Em geral, é mais fácil modelar a transferência de calor no processo de solidificação se, ao invés disso, assumirmos que a interface e o volume de controle em seu entorno são estacionários e assim o meio desloca-se para baixo (na direção x negativa) através da interface. Dessa forma, líquido com massa específica ρ_L e velocidade U_L entra pela face superior do volume de controle e sólido com massa específica ρ_S e velocidade U_S sai pela face inferior do volume de controle. A conservação da massa na interface requer que:

$$\rho_L U_L A = \rho_S U_S A \quad (1)$$

onde A é a área de cada lado do volume de controle. Um balanço de energia no volume de controle fornece:

$$\dot{Q}_{entra, condução} + \dot{Q}_{entra, convecção} - \dot{Q}_{sai, condução} - \dot{Q}_{sai, convecção} = 0 \quad (2)$$

onde $\dot{Q}_{entra, condução}$ é a energia (calor) transferido para o interior do volume de controle por condução, $\dot{Q}_{entra, convecção}$ é a energia transferida para o interior do volume de controle por convecção (visto que o meio se move através do volume de controle) e $\dot{Q}_{sai, condução}$ e $\dot{Q}_{sai, convecção}$ são as quantias análogas saindo do volume de controle. As taxas de energia por condução são escritas utilizando a lei de Fourier da condução, atentando para o fato que ambas estão na direção x negativa:

$$\dot{Q}_{entra, condução} = k_L A \left(\frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} \quad (3)$$

$$\dot{Q}_{sai, condução} = k_S A \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} \quad (4)$$

Além disso, a taxa de energia convectada para dentro e para fora do volume de controle podem ser escritas como:

$$\dot{Q}_{entra, convecção} = \rho_L U_L A h_L \quad (5)$$

$$\dot{Q}_{sai, convecção} = \rho_S U_S A h_S \quad (6)$$

onde h_L e h_S são as entalpias específicas das fases líquida e sólida nas fronteiras do volume de controle. Substituindo as Equações 3 a 6 na Equação 2 e rearranjando obtém-se:

$$k_L A \left(\frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_S A \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_L U_L A h_L - \rho_S U_S A h_S = 0 \quad (7)$$

O calor latente de solidificação pode ser escrito como:

$$h_{SL} = h_L - h_S \quad (8)$$

Substituindo as Equações 1 e 8 na Equação 7 e rearranjando obtém-se:

$$k_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_S \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_S U_S h_{SL} = 0 \quad (9)$$

A velocidade da interface pode ser escrita como:

$$U_S = \frac{dx_{SL}}{dt} \quad (10)$$

Substituindo a Equação 10 na Equação 9 obtém-se:

$$k_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_S \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_S h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (11)$$

A Equação 11 é um resultado direto de um balanço de energia na frente de solidificação e fornece uma condição de acoplamento necessária para a solução

da distribuição de temperaturas no meio. O problema que será analisado pode ser descrito da seguinte forma: imediatamente após o vazamento de plástico fundido com temperatura T_i em um molde retangular conforme a Figura 2, a parede inferior do molde é resfriada a uma temperatura T_C , bem abaixo da temperatura de fusão do material plástico, T_F . Como resultado, acontece solidificação primeiro próximo da parede inferior. Com o passar do tempo a frente de mudança de fase desloca-se para cima. Por simplicidade, pode-se assumir que tanto a solidificação quanto o fenômeno da transferência de calor por condução são unidirecionais (na direção x positiva da Figura 2). Além disso, é assumido que o molde é alto o suficiente de forma que mesmo para um longo período de tempo a parede superior do molde não afeta o processo de solidificação. Quer-se então obter a distribuição unidimensional de temperaturas no molde em função do tempo e a posição da interface sólido-líquido.

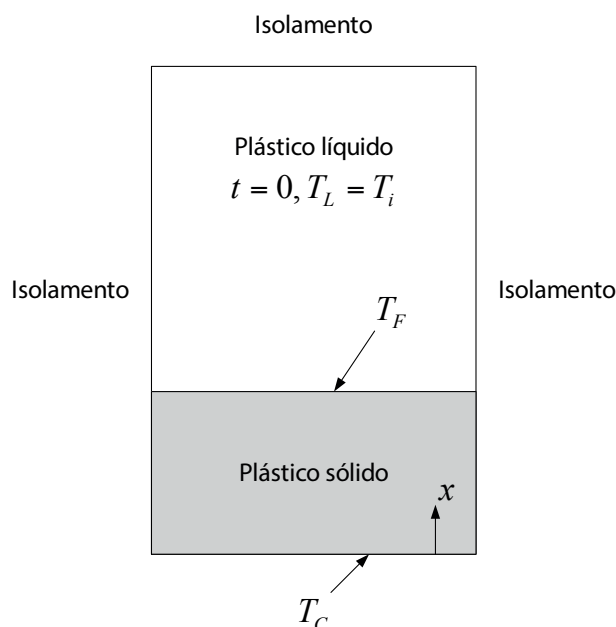


Figura 2 – Solidificação de plástico em molde.

Existem duas regiões distintas no sistema da Figura 2: a região sólida (S) e a região líquida (L). A equação de condução de calor para essas duas regiões, considerando condução transiente unidimensional com propriedades constantes é escrita como:

$$\frac{1}{\alpha_S} \frac{\partial T_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \quad 0 < x < x_{SL} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \quad x_{SL} < x < \infty \quad (13)$$

Para completar o modelo matemático são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno, escritas como:

$$t = 0: \quad T_S = T_i \quad (14)$$

$$t = 0: \quad T_F = T_i \quad (15)$$

$$x = 0: \quad T_S = T_C \quad (16)$$

$$x = x_{SL}: \quad T_S = T_L = T_F \quad (17)$$

$$x = x_{SL}: \quad k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} - k_S \frac{\partial T_S}{\partial x} + \rho_S h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (18)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad T_L \rightarrow T_i \quad (19)$$

Define-se inicialmente uma variável chamada excesso de temperaturas $\Theta(x,t) = T(x,t) - T_i$ de tal forma que as Equações 14 a 19 são reescritas como:

$$\frac{1}{\alpha_S} \frac{\partial \theta_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial x^2} \quad 0 < x < x_{SL} \quad (20)$$

$$\frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \quad x_{SL} < x < \infty \quad (21)$$

$$t = 0: \quad \theta_S = 0 \quad (22)$$

$$t = 0: \quad \theta_F = 0 \quad (23)$$

$$x = 0: \quad \theta_S = T_C - T_i = \theta_{SC} \quad (24)$$

$$x = x_{SL}: \quad \theta_S = \theta_L = \theta_F \quad (25)$$

$$x = x_{SL}: \quad k_L \frac{\partial \theta_L}{\partial x} - k_S \frac{\partial \theta_S}{\partial x} + \rho_S h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (26)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad \theta_L \rightarrow 0 \quad (27)$$

Para resolver o modelo matemático composto pelas Equações 20 a 27 pode-se utilizar a técnica da similaridade definindo uma variável de similaridade na seguinte forma:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \quad (28)$$

Reescrevendo as derivadas das Equações 20, 21 e 26 em termos da variável de similaridade obtém-se:

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial x} = \frac{d\theta_S}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_S}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d\theta_S}{d\eta} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_S}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d\theta_S}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d^2 \theta_S}{d\eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = \frac{1}{4\alpha_S t} \frac{d^2 \theta_S}{d\eta^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial t} = \frac{d\theta_S}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_S}{d\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta_S}{d\eta} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d\theta_L}{d\eta} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d\theta_L}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}} \frac{d^2 \theta_L}{d\eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = \frac{1}{4\alpha_S t} \frac{d^2 \theta_L}{d\eta^2} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta_L}{d\eta} \quad (34)$$

$$\frac{dx_{SL}}{dt} = \frac{d}{dt} (2\eta_{SL} \sqrt{\alpha_S t}) = \eta_{SL} \sqrt{\frac{\alpha_S}{t}} \quad (35)$$

Substituindo as Equações 29 a 35 nas Equações 20 a 27 e rearranjando obtém-se o modelo matemático escrito em termos da variável de similaridade, ou seja:

$$\frac{d^2\theta_S}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_S}{d\eta} = 0 \quad 0 < \eta < \eta_{SL} \quad (36)$$

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_S} \frac{d^2\theta_L}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_L}{d\eta} = 0 \quad \eta_{SL} < \eta < \infty \quad (37)$$

$$t = 0: \quad \theta_S = 0 \quad (38)$$

$$t = 0: \quad \theta_F = 0 \quad (39)$$

$$\eta = 0: \quad \theta_S = T_C - T_i = \theta_{SC} \quad (40)$$

$$\eta = \eta_{SL}: \quad \theta_S = \theta_L = \theta_F \quad (41)$$

$$\eta = \eta_{SL}: \quad k_L \frac{d\theta_L}{d\eta} - k_S \frac{d\theta_S}{d\eta} + 2\alpha_S \rho_S h_{SL} \eta_{SL} = 0 \quad (42)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \theta_L \rightarrow 0 \quad (43)$$

Na formulação anterior $\Theta_S = T_S - T_i$, $\Theta_L = T_L - T_i$ e $\Theta_F = T_F - T_i$. Introduzindo $P = d\theta_S/d\eta$ e $Q = d\theta_L$ respectivamente nas Equações 36 e 37, separando as variáveis, integrando em η e voltando nas variáveis θ_S e θ_L obtém-se:

$$\frac{d\theta_S}{d\eta} = A e^{-\eta^2} \quad (44)$$

$$\frac{d\theta_L}{d\eta} = B e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} \quad (45)$$

onde A e B são constantes de integração. Integrando a Equação (44) em η de $\eta = 0$ a η e integrando a Equação (45) em η de $\eta = \eta_{SL}$ a η obtém-se:

$$\theta_S(\eta) - \theta_S(0) = A \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \quad (46)$$

$$\theta_L(\eta) - \theta_L(\eta_{SL}) = B \int_{\eta_{SL}}^\eta e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} d\eta \quad (47)$$

Utilizando as condições de contorno nas Equações 46 e 47 obtêm-se expressões para A e B:

$$A = \frac{\theta_F - \theta_{SC}}{\int_0^{\eta_{SL}} e^{-\eta^2} d\eta} \quad (48)$$

$$B = \frac{-\theta_F}{\int_{\eta_{SL}}^{\infty} e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} d\eta} \quad (49)$$

Substituindo as Equações 48 e 49 nas Equações 46 e 47, utilizando $\Theta_S = T_S - T_i$, $\Theta_L = T_L - T_i$ e $\Theta_F = T_F - T_i$ e utilizando as definições matemáticas das funções erro e erro complementar obtêm-se:

$$\frac{T_S(\eta) - T_C}{T_F - T_C} = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\eta_{SL})} \quad (50)$$

$$\frac{T_L(\eta) - T_i}{T_F - T_i} = \frac{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\eta)}{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\eta_{SL})} \quad (51)$$

Deve ser notado que o valor de η_{SL} ainda é desconhecido. Para determiná-lo, pode-se utilizar a Equação 42 avaliada em η_{SL} substituindo os resultados das Equações 50 e 51 para avaliar as derivadas parciais, obtendo-se:

$$\frac{T_F - T_i}{T_F - T_C} \frac{k_L}{k_S} \sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}} \frac{e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta_{SL}^2}}{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\eta_{SL})} + \frac{e^{-\eta_{SL}^2}}{\text{erf}(\eta_{SL})} - \text{Ste}_S \sqrt{\pi} \eta_{SL} = 0 \quad (52)$$

$$\text{Ste}_S = \frac{h_{SL}}{c_{pS}(T_F - T_C)} \quad (53)$$

Ste_S é o número de Stefan da fase sólida. A Equação 52 é uma equação algébrica não linear para η_{SL} . Para um conjunto de parâmetros (temperaturas iniciais e propriedades das duas fases) a Equação 52 pode ser resolvida numericamente para η_{SL} . Com η_{SL} conhecido, as Equações 50 e 51 são utilizadas para calcular a temperatura em qualquer ponto do meio para qualquer instante de tempo.

4 | RESULTADOS

Os resultados são obtidos a partir de um conjunto de parâmetros fornecidos e a utilização das Equações 50 a 53. Inicialmente calcula-se o número de Stefan da

fase sólida pela Equação 53. Na sequência calcula-se η_{SL} pela Equação 52, que é uma equação transcendental a ser resolvida numericamente. Após isso pode-se então calcular a temperatura em qualquer posição η utilizando as Equações 50 ou 51. Uma característica importante da formulação anterior é que ela pode ser utilizada também para um processo de fusão, bastando fornecer parâmetros físicos adequados. O meio utilizado para exemplificar as equações resultantes é um poliuretano, inicialmente a $T_i = 85$ °C. Suas propriedades termo físicas podem ser vistas na Tabela 1:

PROPRIEDADE	VALOR
Massa específica	$\rho = 1460 \text{ kg/m}^3$
Temperatura de solidificação	$T_F = 32$ °C
Calor latente de solidificação	$h_{SL} = 251,21 \text{ kJ/kg}$
Calor específico da fase líquida	$c_{pL} = 3,31 \text{ kJ/(kg.K)}$
Calor específico da fase sólida	$c_{pS} = 1,76 \text{ kJ/(kg.K)}$
Condutividade térmica da fase líquida	$k_L = 0,59 \text{ W(m.K)}$
Condutividade térmica da fase sólida	$k_S = 2,16 \text{ W(m.K)}$
Difusividade térmica da fase líquida	$\alpha_L = 1,22 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
Difusividade térmica da fase sólida	$\alpha_S = 8,4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

Tabela 1: Propriedades termo físicas do poliuretano.

Expõe-se o poliuretano a uma temperatura $T_C = 10$ °C. Com os dados da Tabela 1 obtém-se $Ste_S = 0,049$ e $\eta_{SL} = 0,52$ Com esses valores pode-se calcular a temperatura das fases líquida e sólida em qualquer posição e qualquer instante de tempo pelas Equações 50 e 51.

5 | CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentado pode ser utilizado como uma estimativa inicial de parâmetros pertinentes à processos de solidificação/fusão tais como posição da interface sólido-líquido (frente de solidificação/fusão) e a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida. Esses parâmetros podem ser utilizados como uma primeira aproximação para aperfeiçoar processos que envolvem mudança da fase. Deve ser enfatizado que o modelo desenvolvido não inclui efeitos

de convecção térmica na fase líquida, levando em consideração somente efeitos de condução térmica. Modelos mais complexos, envolvendo convecção térmica na fase líquida podem ser encontrados na literatura. Entretanto, tais modelos dificilmente possuem uma solução analítica fechada, sendo necessária uma abordagem numérica. O modelo apresentado foi desenvolvido convenientemente em coordenadas retangulares. Entretanto, os conceitos apresentados aqui podem ser facilmente transponíveis para problemas que devem ser modelados em coordenadas cilíndricas e esféricas.

6REFERÊNCIAS

ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. **Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes**. 1. Ed. New York: Taylor & Francis, 1993.

GUPTA, S. C. **The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis**. 1. Ed. Amsterdam: Elsevier, 2003.

MOHS, W. F.; KULACKI, F. A. **Heat and Mass Transfer in the Melting of Frost**. 1. ed. New York: Springer, 2015.

ÍNDICE REMISSIVO

B

Bioprocessos 110, 111, 118
Blocos de Montar 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47

C

Combinatória 123, 142, 143, 144, 146, 148, 149, 150, 151, 152
Construção do Conhecimento 45, 161, 163, 165
Crescimento Populacional 86, 87, 91, 96, 97

D

Discurso 5, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161

E

Educação Financeira 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36
Estatística 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 42, 55, 57, 86, 122, 123, 189

F

Funções 13, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 43, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 64, 66, 75, 76, 80, 81, 82, 84, 107, 177
Futuros Professores 5, 153, 155, 156, 158, 159, 160

G

Geometria 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 120, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 132

I

Interdisciplinaridade 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 189

J

Jogos 32, 34, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 126, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 159, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177

M

Manejo De Plantas Daninhas 178, 180, 182, 183, 187
Matemática Aplicada à Engenharia 98
Matemática Financeira 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34
Modelagem Matemática 58, 86, 87, 96, 110, 111, 113
Modelos Matemáticos 86, 87, 96, 98, 100

N

Números Complexos 55, 56, 57, 75, 76, 79, 80, 82, 83, 84

O

Otimização 178, 180, 182, 187, 188

P

Pensamento Matemático Avançado 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25

Plano Complexo 57, 75, 76, 82, 83, 84

Probabilidade 4, 11, 42, 55, 122, 123, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 150, 151, 152

Programação não Linear 178, 180, 183, 187

R

Reforma Curricular 49, 50, 51, 54, 55, 60

S

Séries Iniciais 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 176

Solidificação 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108

T

Teorema de Lagrange 61, 62, 65, 66, 67, 70, 74

Teoria de Grupos 61, 62, 63, 65, 74

Transformações Geométricas 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60

 **Atena**
Editora

2 0 2 0