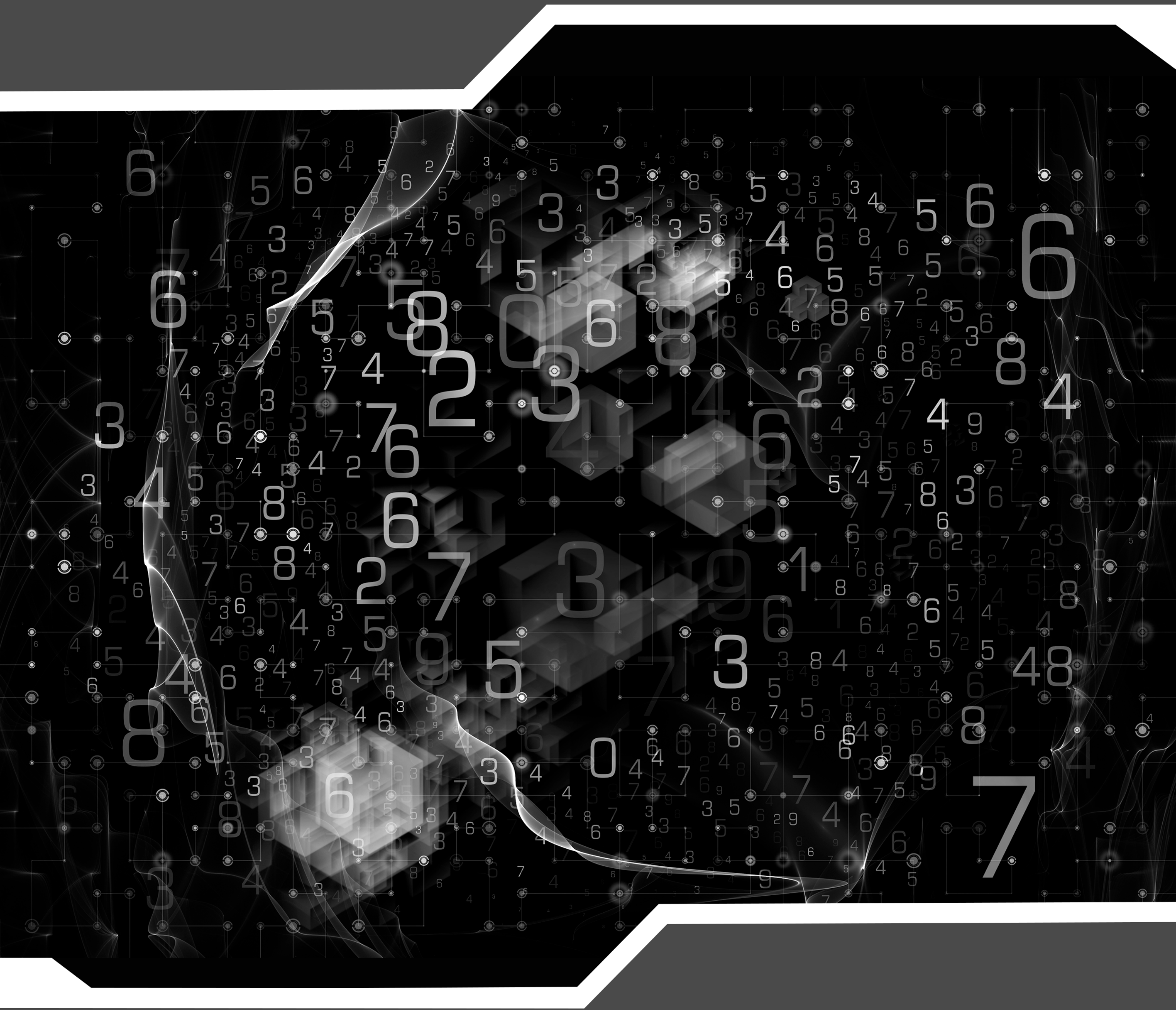
PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

2020 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2020 Os autores
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-71-3
DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compões esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 7

A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 02/01/2020.

Bruno Luiz Silva Rodrighero
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia (IFRO)
Ji-Paraná, RO
http://lattes.cnpq.br/9454531890361792

Daiane Ferreira da Silva Rodrighero
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)
Ji-Paraná, RO
http://lattes.cnpq.br/1013373319584013

RESUMO: Este trabalho visa esclarecer a relevância matemática dos números imaginários e complexos. Por meio de uma análise dos conjuntos de uma forma geral e pela história de seu desenvolvimento, são analisadas as dificuldades históricas encontradas para o estabelecimento definitivo de alguns desses conjuntos, assim como do número zero. Posteriormente, chega-se por consequência ao conjunto dos números complexos que surgem do estudo das raízes de funções polinomiais em que a raiz quadrada de números negativos são as únicas soluções possíveis. Tais números são explicados buscando mostrar sua existência e realidade, a despeito de sua pecha de irreais e irrelevantes. Finalmente, são analisadas algumas das propriedades dos números complexos, sua aplicação no plano complexo e também sua representação gráfica para uma função quadrática sem raízes reais, desenhada com suas raízes complexas.

PALAVRAS-CHAVE: Conjuntos numéricos; Números Complexos; Plano Complexo; Funções Polinomiais.

THE MATHEMATICAL RELEVANCE OF IMAGINARY AND COMPLEX NUMBERS

ABSTRACT: This paper aims to clarify the mathematical relevance of imaginary and complex numbers. Through an analysis of the numerical sets in general and the history of their development, analyzing the historical difficulties found for the definitive establishment of some of these sets, as well as the number zero. Subsequently, the study of the set of complex numbers that arise from the study of the roots of polynomial functions in which the square root of negative numbers is the only possible solution. Such numbers are explained in an attempt to show their existence and reality, despite their unreal and irrelevant streak. Finally, some of the properties of complex numbers, their application in the complex plane, and their graphical

representation for a quadratic function without real roots, designed with their complex roots, are analyzed.
KEYWORDS: Numerical sets; Complex numbers; Complex plane; Polynomial functions.

1 I INTRODUÇÃO

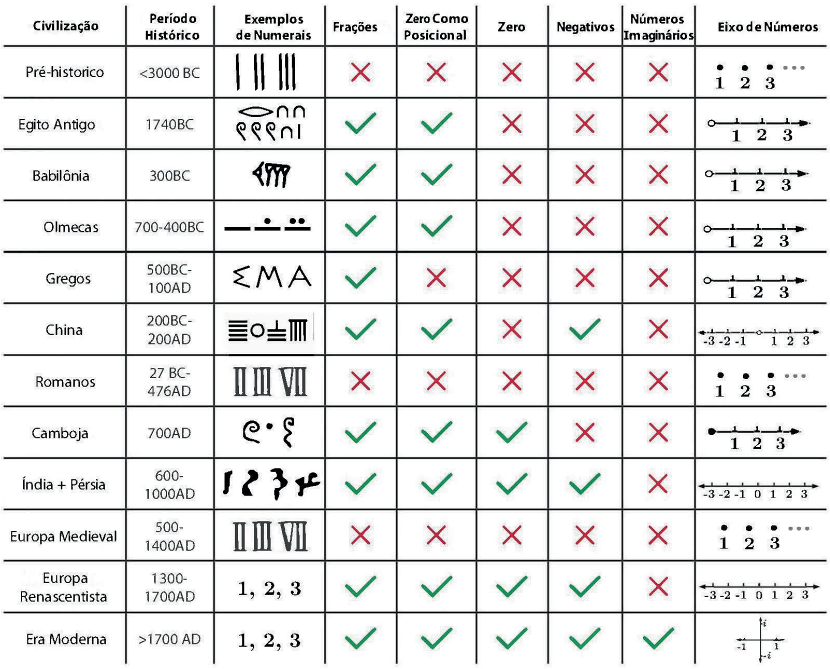
Tendo em vista a melhor compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente dos conjuntos dos números imaginários e complexos, é preciso retroceder e esclarecer os conceitos relativos aos conjuntos existentes mais conhecidos, oferecendo um histórico de seu desenvolvimento e de sua importância na álgebra. Pelo exame das propriedades de tais conjuntos, dos números inteiros, racionais, irracionais, reais etc., e de suas relações algébricas é possível um melhor entendimento do surgimento e da importância do conjunto dos números imaginários e complexos. Mesmo com seu surgimento histórico relacionado ao estudo das funções polinomiais que exigem raízes não existentes no conjunto dos números reais, i.e., a raiz quadrada de números negativos, tais números foram por muito tempo desprezados por não terem uma nomenclatura apropriada e uma exemplificação mais clara. Assim, a clássica representação do conjunto dos números não-complexos por meio de uma linha, em duas dimensões, é suficiente para a compreensão de tais números, porém não para os imaginários e complexos. Tal limitação gráfica é eliminada pelo estabelecimento do plano complexo que permite também a representação gráfica das funções polinomiais e de suas raízes de forma completa. Portanto, partindo desta ampliação necessária para a representações dos conjuntos numéricos por meio do plano complexo que completa a representação gráfica das funções polinomiais, será possível afastar a pecha, infundada, de que os números complexos e imaginários não existem, ou mesmo, que não têm importância ou relevância no estudo da Matemática.

2 I OS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Para assimilar o estudo dos números imaginários e complexos, convém recuar e analisar os conceitos básicos de conjunto numérico, o surgimento histórico dos principais conjuntos e seu desenvolvimento, para então tratar dos imaginários e complexos.

Os conjuntos numéricos são grupos de números com características comuns. Cada grupo tem características específicas, porém há grupos numéricos que contém outros grupos. Cada grupo numérico têm sua história particular, cf. Figura 1.

O mais conhecido e antigo conjunto numérico representa os números naturais não nulos, que surgiu em tempo imemorial da necessidade de contagem dos povos primitivos. Já o aparecimento do zero como número em si levou muitos séculos para se desenvolver por não ter um conceito tangível. O fato de ele não fazer muito sentido lógico, quanto a operações de contagem simples, atrasou seu surgimento. Já o zero como notação posicional, por outro lado, surgiu possivelmente no XVIII século a.C., com a civilização Egípcia. Entretanto, o zero como número em si surgiu possivelmente entre os anos 600 e 700 d.C., por meio das civilizações na Índia, Pérsia e Camboja (KAPLAN, 2008).



Civilização	Período Histórico	Exemplos de Numerais	Frações	Zero Como Posicional	Zero	Negativos	Números Imaginários	Eixo de Números
Pré-historico	<3000 BC	I II III	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Egito Antigo	1740BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Babilônia	300BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Olmecas	700-400BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Gregos	500BC-100AD	ΣMA	✓	✗	✗	✗	✗	1 2 3
China	200BC-200AD		✓	✓	✗	✓	✗	-3 -2 -1 1 2 3
Romanos	27 BC-476AD	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Camboja	700AD		✓	✓	✓	✗	✗	1 2 3
Índia + Pérsia	600-1000AD		✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Europa Medieval	500-1400AD	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Europa Renascentista	1300-1700AD	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Era Moderna	>1700 AD	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✓	i -1 1 -i

Figura 1: Classificação das civilizações antigas até a era moderna quanto aos tipos numéricos existentes e sua possível data de surgimento

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

O conjunto dos números inteiros, excluindo o zero, inclui o conjunto dos números naturais. Ele surgiu posteriormente, encontrando resistência pela introdução do conceito de números negativos. Ao contar produtos, como laranjas, podemos ter o seguinte exemplo representado na Figura 2:

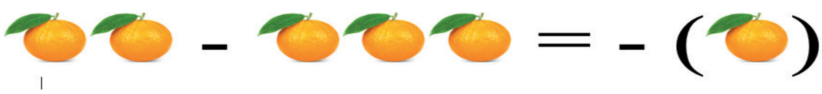


Figura 2: Exemplo de operação que produz o conceito de número inteiro negativo

Fonte: dos autores.

Subtraindo três laranjas de um grupo de duas levaria ao “absurdo” lógico de “uma laranja negativa”. Tais conclusões ambíguas geravam confusão e fizeram com que os números negativos fossem postos à margem por um longo período.

Assim como demonstrado na figura 1, possivelmente a primeira civilização a utilizar números negativos foi a Chinesa, entre os anos 200 a.C a 200 d.C.

Os números racionais, por sua vez, são mais antigos que o conjuntos dos números inteiros negativos. Aquele conjunto também inclui os números inteiros e naturais. Os racionais são os números que se formam pela razão ou fração de dois inteiros, tal que o denominador seja diferente de zero. A divisão de quantidades, i.e., as frações, foram de grande necessidade para o desenvolvimento civilizacional. Os Egípcios, por exemplo, necessitavam dividir quantidade de grãos, pães e cerveja, que foram usados como o único meio de pagamento por séculos para este povo. Assim também a construção civíl não seria possível sem o uso de proporções em suas medidas e cálculos.

Os números irracionais, por outro lado, são números que não podem ser expressos por frações, tais como Sendo assim, por característica própria, este conjuntos está separado do conjunto dos números racionais. O surgimento histórico deste conjunto remete a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, no século V a.C.

Quanto aos números reais, este contém os números racionais e irracionais, os inteiros incluindo o zero e os naturais. Assim, este conjunto contém todos os conjuntos anteriores já descritos. Assim, os conjuntos numéricos podem ser representados graficamente por uma linha horizontal ou vertical, infinita de ambos os lados, em que todos os números anteriormente tratados podem ser localizados individualmente, não existindo *espaços vazios*, cf. Figura 3.

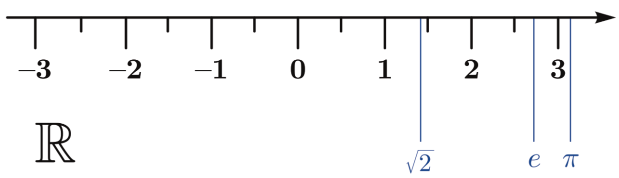


Figura 3: Linha que pode representar o conjunto dos números Reais

Fonte: Disponível em: <http://www.ams.org/tex/type1-fonts.html> . Acessado em 29 de setembro de 2019.

Assim, observando também a figura 4, abaixo, os conjuntos numéricos são agrupamentos que mantêm uma série de propriedades estruturais para cada conjunto.

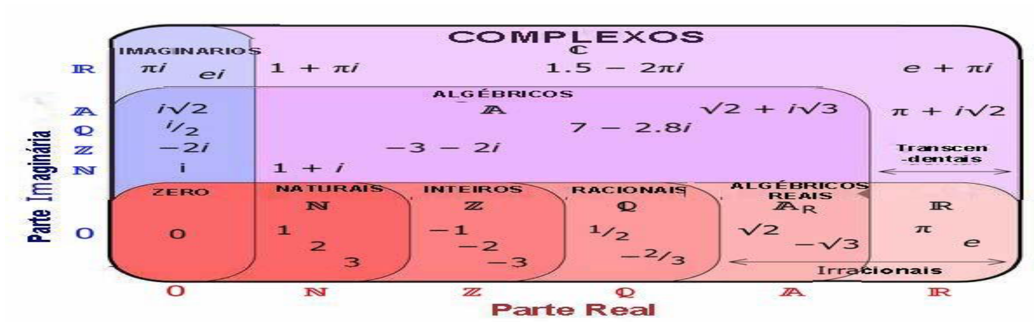


Figura 4: Conjuntos numéricos excluindo os números imaginários e complexos

Fonte: Adaptado de <https://www.quora.com/How-are-imaginary-numbers-useful>. Acessado em 29 de setembro de 2019.

Logo uma questão que pode ser levantada: tais conjuntos numéricos representam todos os números existentes? Existe algum vazio a ser preenchido?

3 I OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS

Os números imaginários são todos que formam raízes quadradas de números negativos. Os complexos são aqueles que contém uma parte real e outra imaginária. Os números imaginários têm forma geral: αi, e os números complexos: α + bi , em que i = √-1 e α, b є R.

Tal como os números inteiros e o zero foram desprezados por longo tempo por ser considerada absurda e inútil a existência de quantidades negativas ou de um número que representa nada, os números imaginários e complexos foram, e por vezes são, considerados aberrações irreais, meros truques da matemática pura, o que não é verdadeiro. A própria nomenclatura de tais conjuntos contribui para tais conclusões incorretas. Como escreveu o grande matemático Carl Friedrich Gauss, (1777-1855):

> O fato de esse assunto [números imaginários] ter sido até agora cercado por misteriosa obscuridade deve ser atribuído em grande parte a uma notação mal adaptada. Se, por exemplo, +1, -1 e a raiz quadrada de -1 tivessem sido denominadas unidades diretas, inversas e laterais, em vez de positivas, negativas e imaginárias (ou mesmo impossíveis), essa obscuridade estaria fora de questão (KASTNER, 2015, p. 43, tradução nossa).[1]

O nome dado ao conjunto dos números imaginários e complexos, portanto, pode ser considerado inadequado. Eles foram originalmente cunhados no século XVII por René Descartes, (1596-1650), em sua obra *La Géométrie,* (DESCARTES, 1637), como termos depreciativos, por serem estes números considerados fictícios ou impossíveis. Leonhard Euler, (1707-1783), foi o criador do símbolo *i* para

1. That this subject [imaginary numbers] has hitherto been surrounded by mysterious obscurity, is to be attributed largely to an ill adapted notation. If, for example, +1, -1, and the square root of -1 had been called direct, inverse and lateral units, instead of positive, negative and imaginary (or even impossible), such an obscurity would have been out of the question (KASTNER, 2015, p. 43).

representar √-1, (GIAQUINTA; MODICA, 2004). Não obstante, foram Gerolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572) os grandes precursores do estudo dos números imaginários e complexos por meio da análise das raízes de funções polinomiais, (BOMBELLI, 1629). Ainda assim, o uso de números imaginários só começou a ser amplamente aceita com a publicação do trabalho de Leonhard Euler e Carl Friedrich Gauss e a descrição dos números complexos como pontos em um plano com a publicação de Caspar Wessel (1745-1818).

Agora analisando e respondendo a questão levantada no ponto anterior, pela perspectiva de que a linha que representou os números reais, na Figura 3, inclui infinitos números, tanto negativos como positivos, inicialmente existe a tentação de responder que todos os números existentes estão, sim, representados ali. Porém, com o surgimento de funções polinomiais que necessariamente não possuíam raízes representáveis pelo conjunto dos números reais, juntamente com o Teorema Fundamental da Álgebra[2], que estabelece que todo polinômio de grau *n* diferente de zero, de variável única, tem exatamente *n* número de raízes, verificou-se que os números reais estavam de fato incompletos e que o *infinito* é um conceito matemático muito mais amplo. Por conseguinte, a raiz quadrada de números negativos, base para os números imaginários e complexos, ainda que intuitivamente contraditória, efetivamente representa números verdadeiros, porém, que não se enquadravam aos limites conceituais matemáticos nos primórdios de seu surgimento.

4 I AS RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E OS NÚMEROS COMPLEXOS

Será proveitoso para a compreensão plena dos números imaginários e complexos uma breve análise das funções polinomiais que propiciaram o surgimento de tais números. Uma das propriedades mais importantes do estudo das funções são as suas raízes, ou seja, os pontos em que a função toca o eixo das abscissas. Para encontrá-las existem fórmulas matemática bem divulgadas, dependendo do grau da função. Por exemplo, para a função quadrática, $\alpha x^2 + bx + c = 0$, com teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, tal\ que\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\ \ ou\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

2. Euler, Leonhard (1751), “Recherches sur les racines imaginaires des équations”, Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, Berlin, 5, pp. 222–288. & GAUSS, Carl Friedrich (1799), Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Helmstedt: C. G. Fleckeisen (tr. New proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree).

E para as funções de terceiro grau, $x_3 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x + \alpha_3$, teremos a seguinte fórmula inicialmente desenvolvida por Carnado:

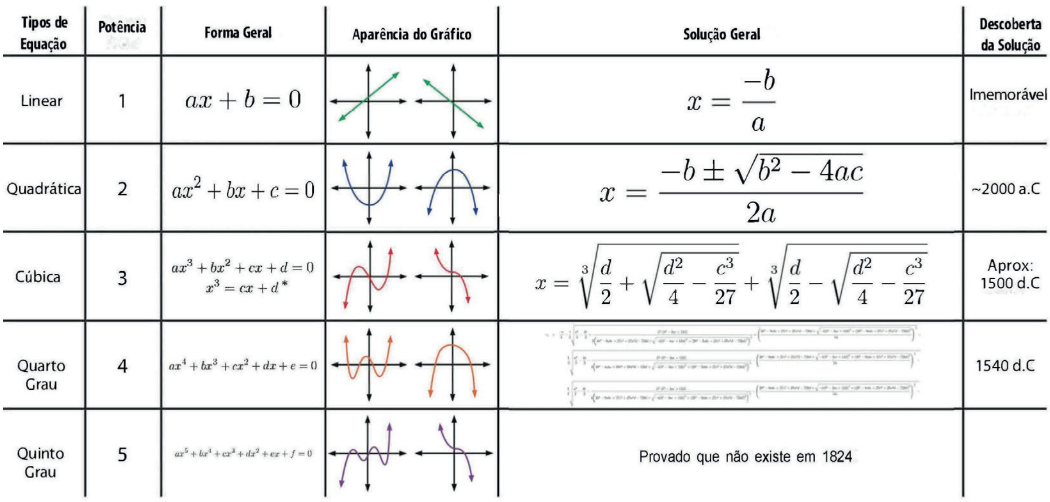
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S - T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S - T) \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$$

Quanto às funções de segundo grau, por serem parábolas, é possível que nunca toquem o eixo das abscissas, não tendo raízes reais. No entanto, as de terceiro grau sempre terão pelo menos uma raiz real, pelo comportamento de seu gráfico, cf. Figura 5. Com isso, Bombelli utilizou da característica destas funções para, utilizando números imaginários e o método de Cardano, conseguir o correto resultado para a única raiz real da função $x^3 = 15x + 4$, $x_1 = 4$, , demonstrando a utilidade e importância dos números imaginários.



Tipos de Equação	Potência	Forma Geral	Aparência do Gráfico	Solução Geral	Descoberta da Solução
Linear	1	$ax + b = 0$		$x = \frac{-b}{a}$	Imemorável
Quadrática	2	$ax^2 + bx + c = 0$		$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	~2000 a.C
Cúbica	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $x^3 = cx + d^*$		$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}$	Aprox: 1500 d.C
Quarto Grau	4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$		[illegible]	1540 d.C
Quinto Grau	5	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$		Provado que não existe em 1824	

Figura 5: As soluções gerais das equações polinomiais, com os dados de suas formas gerais, a aparência de seus gráficos, assim como a possível data de sua descoberta.

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

Nos remetendo novamente ao Teorema Fundamental da Álgebra, ao contrário do que é frequentemente ensinado no Ensino Médio, toda função quadrática tem necessariamente duas raízes, toda função cúbica tem três raízes, etc., sem exceção.

Pelo pouco foco dado ao conteúdo relativo a números imaginários e complexos no Ensino Médio, funções estudadas que contenham raízes com números imaginários ou complexos são tratadas, de imediato, como raízes inexistentes, levando, portanto, a uma contradição. Os alunos, pela definição dada de *raíz de um função*, são levados a se perguntar: Como funções, como por exemplo,$x^2 + 0x + 1$, que nunca interceptam o eixo *x*, podem ter duas raízes? Tal pergunta demonstra que a negligência do estudo dos números complexos e imaginários cria uma lacuna na compreensão das funções polinomiais, assim como suas potenciais aplicações. Sem o conjunto dos números complexos é impossível, de fato, representar ou determinar as soluções para todas as funções polinomiais, criando uma grande vaziez no estudo das funções.

5 I O PLANO COMPLEXO

A solução para a representação de todas as raízes das funções deve-se a criação do plano complexo, que representa os números complexos graficamente, lateralmente à linha dos números reais. Esta nova ferramenta matemática, o plano complexo, tornou possível o estudo completo das funções polinomiais. Como foi citado na página 4 deste trabalho, (KASTNER, 2015), C. F. Gauss relata a incoerência criada pela nomenclatura dos conjuntos imaginários e complexos. Um melhor nome para eles, como proposto por Gauss, seriam: Conjunto dos números laterais, exatamente por causa do Plano Complexo, também conhecido como Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand. Este plano possibilita a representação gráfica dos números complexos, estando estes números localizados ao lado da linha dos números reais, cf. Figura 6.

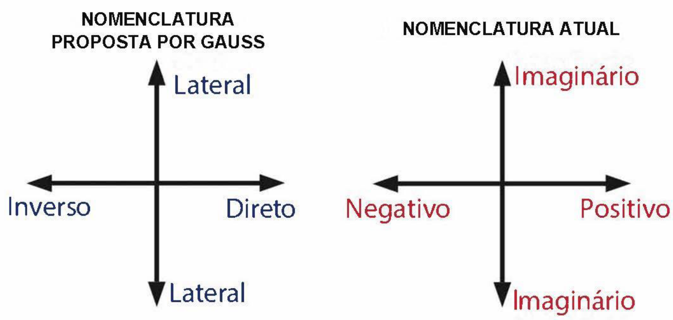


Figura 6: Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand comparado com o atual

Fonte: dos autores.

Deste modo, os conjuntos numéricos ganham uma nova dimensão, completando os conjuntos numéricos e abrindo novas portas para o estudo da álgebra. Neste plano os números imaginários estão localizados exatamente na linha vertical, ou eixo *y*, chamado imaginário, e os números complexos são a relação entre o eixo *x, real,* & *y, imaginário.* Na Figura 7 temos um exemplo de número complexo, com parte real e imaginária.

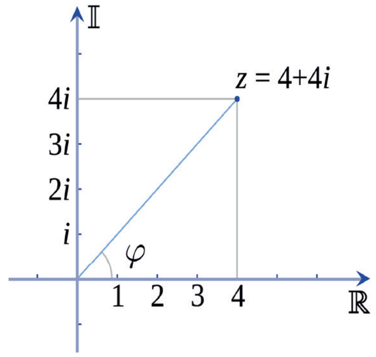


Figura 7: Ilustração de número complexo no plano complexo.

Fonte: Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Imaginarynumber2.PNG>. Acessado em 29 de setembro de 2019.

Já que uma segunda dimensão dos números é demonstrada pelo plano complexo, e toda uma infinitude de novos números surgem dessa nova dimensão, números imaginários e complexos, talvez uma terceira dimensão possa ser imaginada como possível. Existiria algum número que não poderia ser representado nem pela linha dos números reais nem pelo plano complexo? O pensamento lógico para tais novos números seria, aparentemente, a raiz quadrada de um número imaginário negativo, $x = \sqrt{-1}$. Entretanto, avaliando-a com o plano complexo, e com coordenadas polares, chegamos a $\sqrt{-1} = X = 1 < -45°$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Portanto, $\sqrt{-i}$ pode ser encontrada no plano complexo em $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, cf. Figura 8.

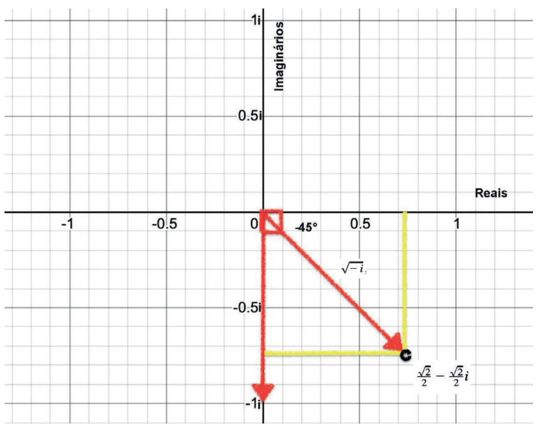


Figura 8: Demonstra a existência do número complexo $\sqrt{-i}$ no plano complexo, tendo por solução $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Fonte: dos autores.

Ou seja, outras dimensões de números podem ser representados facilmente com o uso de planos complexos. Ele permite que se visualize graficamente, como foi dito no ponto anterior, as raízes das funções polinomiais quando estas são imaginárias ou complexas. No entanto, para tal, é necessária a utilização de quatro dimensões pela mescla do plano z(x,y) com o plano w(u,v). Ou seja, para , temos:

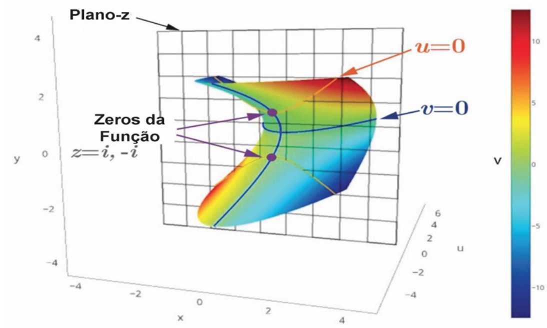


Figura 9: Gráfico da função com suas raízes imaginárias representadas graficamente.

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

Com a ajuda da computação para o desenho de gráficos, a realidade do comportamento das funções polinomiais, como no exemplo da Figura 9, de uma função quadrática, é levado a um nível de profundidade muito maior, abrangendo até mesmo outras dimensões do comportamento destas funções.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pela compreensão do conjuntos numéricos existentes, juntamente com o teorema fundamental da álgebra e sua aplicação nas funções polinomiais com o plano complexo, percebe-se que a nomenclatura dada aos conjuntos dos números complexos e imaginários levam a uma percepção incorreta da realidade de tais números e de sua importância para a matemática como um todo. Assim como os números negativos, o número zero e os números irracionais tiveram resistência para serem aceitos, causando atrasos ao desenvolvimento da Matemática, nos dias atuais também, os números imaginários e complexos ainda têm uma aura de números impossíveis ou irreais, limitando os horizontes da compreensão algébrica e reduzindo drasticamente a representação gráfica de diversas funções polinomiais existentes.

REFERÊNCIAS

BOMBELLI, Rafael. L’Algebra Opera. Giouanni Rofsi, Bologna: 1629.

DESCARTES, René. **Discours de la méthode plus La Dioptrique, Les Météores et la Géométrie**. Jan Maire, 1637, p. 296-413. Disponível em: <https://fr.wikisource.org/wiki/La_G%C3%A9om%C3%A9trie_(%C3%A9d._1637)> Acesso em 29 de setembro de 2019.

EULER, Leonard. On transcending quantities arising from the circle of Introduction to the Analysis of the Infinite, 1748, p. 214.

GAUSS, C. F. New Proof of the Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved into Real Factors of the First or the Second Degree. 1799.

GAUSS, C. F. **Theoria Residuorum Biquadraticorum. Commentatio Segunda**. pp. 93–148, 1799.

GIAQUINTA, Mariano; MODICA, Giuseppe. Mathematical Analysis: Approximation and Discrete Processes (illustrated ed.). Springer Science & Business Media. 2004, 121 p. ISBN 978-0-8176-4337-9.

CARRERA, Josep. **The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss**. 1992. Disponível em: <http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/PUBLICACIONSMATEMATIQUES_1992_36_2B_10.pdf>. Acessado em: Acesso em 29 de setembro de 2019.

KASTNER, Ruth E. Understanding Our Unseen Reality: Solving Quantum Riddles. Imperial College Press: 2015. p. 43.

KAPLAN, R. **O nada que existe:** Uma história natural do zero. 1 ed. Rio de Janeiro. Editora Rocco, 2001, 208 p.

LITTLEWOOD, J. E. **Mathematical Notes (14): Every polynomial has a root**. J. London Math. Soc. 16, 1941, pp. 95–98. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-16.2.95> Acesso em 29 de setembro de 2019.

WESSEL, Caspar. **On the analytic representation of direction, an effort applied in particular to the determination of plane and spherical polygons.** Copenhagen: Royal Danish Academy of Sciences and Letters, 1799, pp. 469–518.

WELCH, Stephen. **Imagine numbers are real.** Workbook. 2016. 96 p. Disponível em: <https://static1.squarespace.com/static/54b90461e4b0ad6fb5e05581/t/5a6e7bd341920260ccd693cf/1517190204747/imaginary_numbers_are_real_rev2_for_screen.pdf>. Acesso em 29 de setembro de 2019.

ÍNDICE REMISSIVO

B

C

D

E

F

G

I

J

M

Atena
Editora
2020