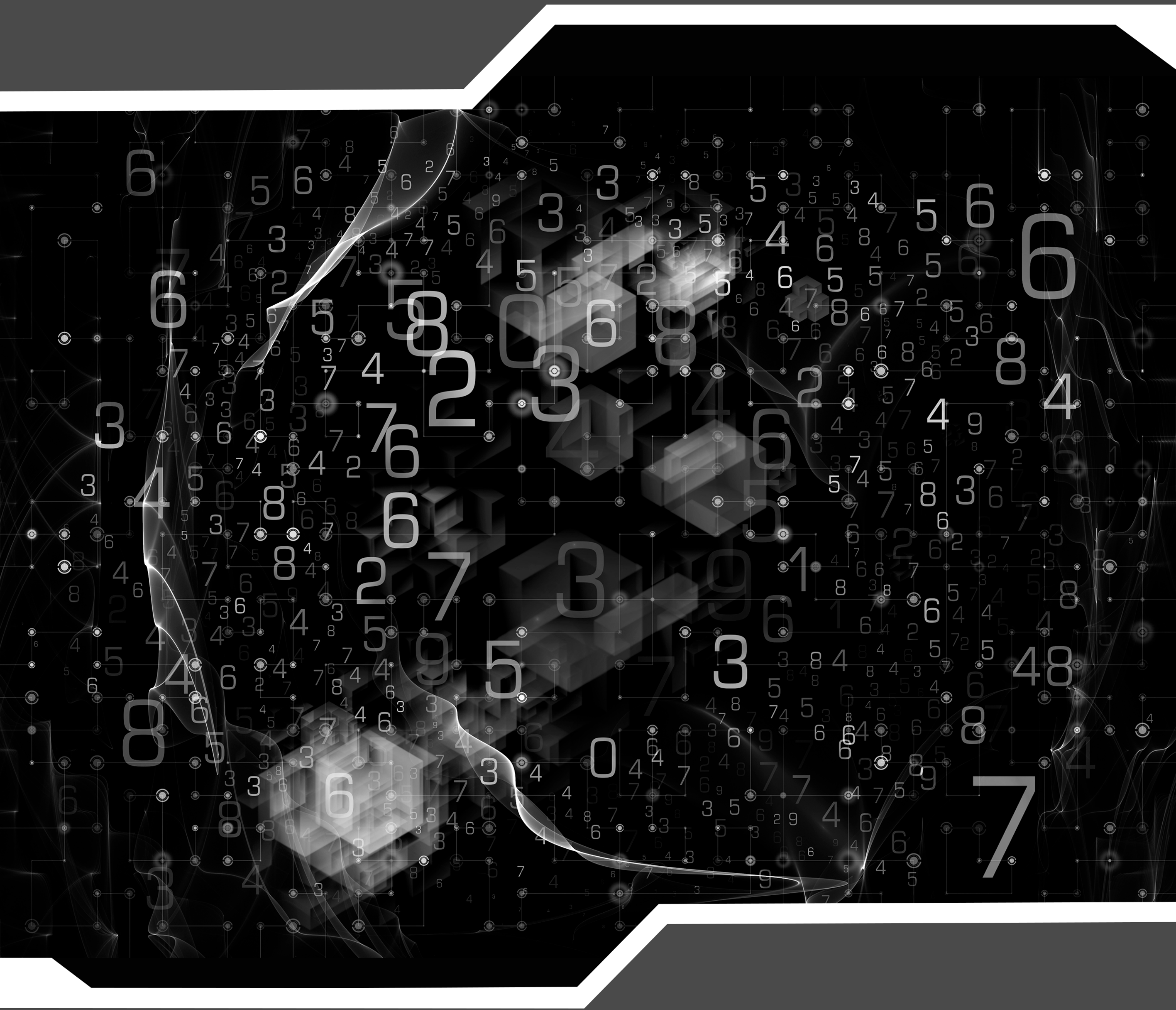
PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

2020 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2020 Os autores
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde
Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federacl do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico
Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Claúdia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-71-3
DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compões esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 6

ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW

Data de aceite: 23/03/2020

Data da submissão: 02/01/2020.

Adina Veronica Remor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo- Paraná
http://lattes.cnpq.br/0248330031742746

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo- Paraná
http://lattes.cnpq.br/7249767497977388

RESUMO: O presente artigo tem como objetivo apresentar o estudo que foi desenvolvido no PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado, na área de Álgebra - Teoria de Grupos, sob orientação do professor Wilian Francisco de Araujo. Após estudar vários tópicos referentes a Teoria de Grupos, que serão apresentados neste trabalho, alguns questionamentos surgiram. Sabemos, pelo Teorema de Lagrange, que a ordem de um subgrupo sempre divide a ordem do grupo. Mas dado um número que divide a ordem do grupo, nem sempre existe um subgrupo com esta ordem. Então, será que é possível determinar em quais casos é possível garantir a existência de subgrupos com uma dada ordem? Assim apresentamos neste trabalho os Teoremas de Sylow, cujos resultados estão próximos de responder o questionamento acima e, além disso, fornecem outras características importantes a respeito do grupo e seus subgrupos.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de grupos; Teorema de Lagrange; Teoremas de Sylow.

SOME DISCUSSIONS ABOUT LAGRANGE'S THEOREM AND SYLOW'S THEOREMS

ABSTRACT: This article aims to present the study that was developed PICME- Scientific Initiation Program and Master's degree, in the area of Algebra- Group Theory, under the orientation of professor Wilian Francisco de Araujo. After the study of various topics about Group Theory, which will be presented in this paper, some questions appeared. We know from Lagrange's Theorem that the order of a subgroup always divides the order of the group. However given a number that divides the group order, there is not always a subgroup with this order. So, is it possible to determine in which cases it is possible to ensure the existence of subgroups with a given order? Thus, we present in this paper the Sylow's Theorems, which results are close to answering the above question, and furthermore they provide other

important characteristics about the group and its subgroups.
KEYWORDS: Group Theory; Lagrange's Theorem; Sylow's Theorems.

1 I INTRODUÇÃO

A Teoria de Grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na linguagem moderna. Podemos encontrar tal teoria presente em inúmeras áreas, como teoria quântica de campos, as estruturas atômicas e, em particular, cristalografia, além da álgebra abstrata, onde esse conceito é fundamental para o estudo das demais estruturas algébricas, como anéis, corpos e espaços vetoriais, que são construídos a partir do conceito de grupo.

A Teoria de Grupos teve origem por meio das ideias do matemático francês Evariste Galois (1811-1832), a partir da tentativa de resolver equações algébricas de grau maior ou igual a 5 por meio de radicais. Mas ao longo do tempo outros matemáticos renomados contribuíram nessa área, como o suíço Leonard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e o britânico Arthur Cayley (1821-1895), que foi o primeiro a introduzir o conceito de grupo como conhecemos hoje. Atualmente a Teoria de Grupos está dividida em diversas subáreas, no qual vários problemas têm sido atacados e solucionados, destacando o nome de muitos outros matemáticos e físicos.

Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos primordiais da Teoria de Grupos, bem como buscaremos investigar a validade da recíproca do Teorema de Lagrange, no qual dado um número que divide a ordem do grupo, é possível garantir a existência de subgrupos com esta ordem. Para tal, demonstraremos os Teoremas de Sylow, que além de responderem parcialmente à questão acima, fornecem outras informações importantes a respeito dos grupos e subgrupos.

2 I METODOLOGIA

O presente trabalho possui cunho bibliográfico, dessa forma foi realizado um estudo utilizando-se principalmente os livros *Álgebra moderna*, cujos autores são Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi, publicado em 2003, e *Elementos de Álgebra* de autoria de Arnaldo Garcia e Yves Iequain, publicado em 2013. Foram estudados vários tópicos presentes nesses livros. Os mais pertinentes para nosso trabalho serão aqui apresentados, mas para quem possui interesse em se aprofundar nesta área ou conhecer um pouco mais sobre a Teoria de Grupos recomenda-se fortemente uma leitura desses materiais.

3 I DESENVOLVIMENTO

Nesta subseção apresenta-se algumas definições e teoremas importantes para o desenvolvimento da Teoria de Grupos. Algumas demonstrações serão ocultadas devido ao objetivo do nosso trabalho. Todas elas podem ser encontradas em Garcia e Iequain (2013) e Domingues e Iezzi (2003).

Definição 3.1: Um sistema matemático constituído de um conjunto G, tal que $G \neq \emptyset$, e uma operação $(x,y) \rightarrow x * y$ sobre G é chamado *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

- Associatividade (Propriedade 1): $(\alpha * b) * c = \alpha * (b * c)$, quaisquer que sejam $a,b,c \in G$.
- Existência do elemento neutro (Propriedade 2): existe um elemento $e \in G$ tal que $\alpha * e = e * \alpha = \alpha$, qualquer que seja $\alpha \in G$.
- Existência do simétrico (Propriedade 3): para todo $\alpha \in G$ existe um elemento $\alpha' \in G$ tal que $\alpha' * \alpha = \alpha * \alpha' = e$.

Podemos perceber que é possível obter subconjuntos de G, que com a operação $*$ definida em G satisfazem as mesmas propriedades elencadas acima. Estes subconjuntos, com a operação $*$ são chamados subgrupos. Assim, podemos escrever a seguinte definição:

Definição 3.2: Seja $(G,*)$ um grupo. Um subconjunto $H \subseteq H, H \neq \emptyset$ é dito *subgrupo* se, com a operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

- Fechado para a operação (Propriedade 0): $h_1 * h_2 \in H, \forall\, h_1, h_2 \in H$.
- Associatividade (Propriedade 1):$(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3), \forall\, h_1,h_2,h_3 \in H$
- Existência do elemento neutro (Propriedade 2): $\exists\, e\, H$ tal que $e * h = h * e = h, \forall\, h \in H$.
- Existência do elemento simétrico (Propriedade 3): Para cada $h \in H$, existe $h' \in H$ de forma que $h * h' = h' * h = e$.

Além disso, alguns conjuntos possuem uma quantidade finita de elementos. Neste caso, são chamados *grupos finitos.* Assim, o número de elementos de G é chamado *ordem* do grupo, eventualmente representada por o(G) ou IGI, e a tábua da operação $*$ (que mostra como todos os elementos se relacionam) se denomina *tábua do grupo*. Para cada elemento α de G também é possível associar uma ordem, que é o inteiro $h > 0$ tal que $\alpha^h = e$ e $\alpha^r \neq e$ sempre que $0 < r < h$. Por fim, se $\forall x,y \in G$ temos $x * y = y * x$, então o grupo é chamado *grupo abeliano.*

A seguir apresentaremos alguns exemplos de grupos e subgrupos.

1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido com a operação + é subgrupo do grupo dos números reais $\mathbb{R}$ munido com esta mesma operação. Para tal, basta verificar que todas as propriedades exigidas pela definição de

subgrupo são satisfeitas.

2. Podemos determinar outro exemplo de grupo, que não é tão trivial como o acima. Assim, seja C um conjunto qualquer e defina o conjunto $Bij(C) = \{f : C \rightarrow C / f$ é uma bijeção$\}$. Provaremos que $Bij(c),\circ)$ é um grupo. Assim, sejam $f,g,h \in Bij(C)$ e x ϵ C. Temos: $((f \circ g) \circ h)\ (x) = (f \circ g)(h(x)) = f\ (g(h(x))) = f(g \circ h)(x) = f \circ (g \circ h))\ (x)$. Logo a propriedade associativa é válida. Como sabemos, a função identidade Id é bijetora, assim $Id \in Bij(C)$. Além disso, $\forall f \in Bij(C)$ tem-se $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$, ou seja, *Id* é o elemento neutro de ($Bij\ (C)$, $\circ$). E como toda função bijetora possui inversa, que também é bijetora, basta tomar $f^{-1} \in Bij(C)$ tal que $\forall f \in Bij(C)$, tem-se $f \circ f^{-1} = f^{-1}\ f = Id$, logo f^{-1} é o elemento simétrico de f com relação a operação $\circ$. Assim ($Bij(C)$, $\circ$) é grupo.

Agora, tome C = {1,2,3,...,n} em que n ≥ 1. Neste caso, o conjunto das permutações de C será representado por S_n. Observe que para cada permutação dos elementos de C, se está definindo uma função bijetora que associa os elementos 1,2, ..., n a permutação que foi realizada. Assim, temos que (S_n $\circ$) é um grupo, cuja ordem é n!

Por exemplo, vamos considerar n = 3, ou seja, tomaremos o grupo das permutações S_3. Os elementos desse grupo são as permutações: *Id*, que é a identidade; (12), que leva o elemento 1 em 2 e o elemento 2 em 1 e mantém o elemento 3 fixo; (13) que leva o elemento 1 em 3 e vice-versa, fixando o elemento 2; (23) que leva o elemento 2 em 3 e vice-versa, fixando o elemento 1; (123) que leva 1 em 2, 2 em 3 e 3 em 1 e por fim a permutação (132) que leva 1 em 3,3 em 2 e 2 em 1. Estas são todas as possíveis permutações dos elementos 1, 2 e 3. Assim, obtemos que (S_3 = {Id,(12), (13), (23), (123), (132)}, $\circ$) é grupo. Através de composições entre essas permutações, que são funções bijetoras, podemos calcular a ordem de cada elemento, o seu elemento simétrico, o resultado de cada possível operação, etc.

A partir desta notação definida para grupo de permutações, cada permutação $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3... \alpha_r)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ são inteiros distintos e $\sigma \in S_n$ é uma permutação tal que $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$, $\sigma(\alpha_2) = \sigma^2(\alpha_1) = \alpha_3$, ..., $\sigma\ (\alpha_{r-1}) = \sigma^{r-1}(\alpha_1) = \alpha_r$, $\sigma(\alpha_r) = \sigma^r(\alpha_1) = \alpha_1$ e $\sigma(x) = x$ para todo $x \in C$- $\{\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_r\}$ se diz que σ é um *r-ciclo.* Se r = 2 então σ é chamado de *transposição.* Assim, as permutações (12), (13) e (23) ϵ S_3 são transposições. Dessa forma, podemos elencar uma proposição muito importante apresentada por Domingues e Iezzi (2003):

Proposição 3.3: Toda permutação $\sigma \in S_n$, exceção feita à permutação *Id*, pode ser escrita univocamente (salvo a ordem dos fatores) como um produto de transposições distintas.

A demonstração desse resultado não será feita neste trabalho, mas pode ser encontrada em Domingues e Iezzi (2003), p. 202.

Este resultado acima é muito importante para conhecermos um novo grupo: o grupo A_n.

Definição 3.4: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada *par* ou *ímpar* conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. O conjunto das permutações pares do S_n é indicado por A_n.

Proposição 3.5: Para todo n > 1 o conjunto A_n é subgrupo do S_n de ordem $\frac{n!}{2}$

A demonstração pode ser encontrada em Domingues e Iezzi (2003), p. 206.

Classes laterais e Teorema de Lagrange

Nesta seção enunciaremos um conhecido teorema da Teoria de Grupos Finitos, muito importante para o nosso trabalho e ponto inicial das discussões que serão realizadas posteriormente. Mas antes de enunciá-lo, introduziremos o conceito de classes laterais, que é necessário para o Teorema de Lagrange.

Proposição 3.1.1: Seja $(G, *)$ um grupo e *H* um subgrupo de G. A relação ~ definida sobre G por "$y \sim x$ se e somente se $\exists\, h \in H$ tal que $y = x * h$" é uma relação de equivalência.

Mostraremos que ~ define uma relação de equivalência, ou seja, ~ satisfaz as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica.

- Reflexiva: Observe que por H ser subgrupo de G, $\exists\, e \in H$ tal que $x = x * e$. Dessa forma $x \sim x$.

- Transitiva: Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $\exists h_1 \in H$ e $\exists h_2 \in H$ tal que $x = y * h_1$ e $y = z * h_2$. Logo $y = x * h^{-1}_1$. Portanto $z * h_2 = x * h^{-1}_1 \Rightarrow z * h_2 * h_1 = x \Rightarrow x = z * (h_2 * h_1) \Rightarrow x \sim z$, já que $h_2 * h_1 \in H$.

- Simétrica: Observe que se $x \sim y$ então $\exists\, h \in H$ tal que $x = y * h$. Assim $y = x * h^{-1}$. Portanto $y \sim x$.

Logo "$y \sim x$ se e somente se $\exists h \in H$ tal que $y = x * h$" é uma relação de equivalência.

Por definição, a classe de equivalência de x é o conjunto $\{y \in G \mid y \sim x\} = \{x * h \mid h \in H\}$, que é denotada por xH e chamada de *classe lateral à esquerda de H em G,* que contém x, já que a relação definida é de equivalência. Da mesma forma podemos definir as classes laterais à direita de H em G, basta tomar a relação de equivalência "$y \sim x$ se e somente se $\exists h \in H$ tal que $y = h * x$". Assim $Hx = \{ h * x \mid h \in H\}$. Observe que em particular tem-se $H = eH = He$.

Definição 3.1.2: O conjunto das classes laterais de H em G será denotado por $\frac{G}{H}$. Assim $\frac{G}{H} = \{\alpha H \mid \alpha \in G\}$

Como a relação de equivalência cima determina uma partição de G, temos $\alpha_i H = \alpha_i H$ ou $\alpha ij \cap \alpha ijH = \emptyset$ sempre que $i \neq i$ e assim, se G é finito, vamos tomar $\frac{G}{H}$ o conjunto de todas as classes laterais distintas. O número de elementos de $\frac{G}{H}$ é chamado de *índice* de H em G e é denotado por (G:H). Além disso,$G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H$

$\cup \ldots \cup a_n H$.

Podemos observar certas relações entre as classes laterais, como a seguinte:

Proposição 3.1.3: Todas as classes laterais de H em G têm a mesma cardinalidade, que é igual a cardinalidade de H.

Demonstração: Domingues e Iezzi (2003), p. 189.

O resultado acima é importante para a demonstração do Teorema de Lagrange, que será enunciada agora:

Teorema 3.1.4 (Teorema de Lagrange): Seja *H* um subgrupo de um grupo finito *G*. Então $\circ(G) = \circ(H) \cdot (G: H)$ e portanto $\circ(H) \mid \circ(G)$.

Demonstração: Seja n o número de classes laterais à esquerda distintas de H em G. Assim, sabemos que n = (G:H) Considere o conjunto $\frac{G}{H} = \{\alpha_1 H, \alpha_2 H, \ldots, \alpha_n H\}$. Como a relação de equivalência determina uma partição de G, sabemos que $G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H \cup \ldots \cup \alpha_n H$ e $\alpha_i H \cap a_j H = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ (já que todas as classes são distintas). Mas, devido a proposição anterior, sabemos que todas as classes laterais possuem a mesma cardinalidade, que é igual a de H. Logo $G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H \cup \ldots \cup \alpha_n H$ então $\circ(G) = \circ(\alpha 1H) + \circ(\alpha_2 H) + \cdots + \circ(\alpha_n H)$ o que implica que $\circ(G) = \circ(H) + \circ(H) \ldots + \circ(H)$. Como o número de classes distintas é n, obtemos $\circ(G) = \circ(H) \cdot n$. Mas $n = (G:H)$; logo $\circ(G) = \circ(H) \cdot (G:H)$ e, portanto. $\circ(H) \mid \circ(G)$.

Vamos mostrar um exemplo. Considere o grupo $(S_3, \circ)$ apresentado anteriormente. Sabemos que $S_3 = \{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, portanto $\circ(S_3) = 6$ Ao calcular os subgrupos de S_3, encontramos os seguintes exemplos:

- Há um subgrupo de ordem 1, que é $(\{Id\} \circ)$
- Há três subgrupos de ordem 2, que são $(\{Id, (12)\}, \circ)$, $(\{Id, (13)\}, \circ)$ e $(\{Id, (23)\}, \circ)$
- Há apenas um subgrupo de ordem 3 que é $(\{Id, (123), (132)\}, \circ)$.
- Há um subgrupo de ordem 6 que é o próprio grupo $(S_3, \circ)$.

Esses são todos os subgrupos do grupo $(S_3, \circ)$ Em todos os casos, temos que a ordem do subgrupo divide a ordem do grupo.

Por fim, apresentaremos a seguinte definição, que também será importante para as discussões a seguir.

Definição 3.1.5: Um subgrupo N de um grupo G é chamado subgrupo *normal* se $\forall g \in G$ se verifica a igualdade $gN = Ng$. Ou seja, a classe lateral à esquerda de g em N é igual a classe lateral à direita de g em $N, \forall g \in G$.

A notação utilizada para subgrupo normal é $N \lhd G$ A fim de simplificar a notação também denotaremos $x * y = xy$. A partir de agora também ocultaremos a operação dos subgrupos relacionados ao $(S_3, \circ)$, visto que sempre será composição de funções.

3 I ESTUDO DE CASO

Após estudar o Teorema de Lagrange, surgiu o seguinte questionamento: será que a recíproca do Teorema de Lagrange é válida? Ou seja, será que sempre que um número dividir a ordem de um grupo G é possível garantir que exista ao menos um subgrupo com esta ordem? Assim, analisando alguns exemplos chegamos à conclusão que a resposta é não, ou seja, nem sempre existem subgrupos para um número que divide a ordem de um grupo . Dessa forma, apresentaremos um contraexemplo.

Considere o grupo . Sabemos que a ordem deste grupo é $\frac{4!}{2} = 12$. Assim, os divisores de 12 são 1,2,3,4,6 e 12, logo se a recíproca do Teorema de Lagrange fosse válida, obteríamos ao menos um subgrupo para cada divisor acima. Em busca de determinar todos os subgrupos, construímos a tábua do grupo A_4

$\circ$	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
I	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(13)	(12)(13)	(13)(12)	I	(23)(24)	(14)(23)	(12)(34)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(24)	(24)(23)	(14)(12)	(13)(14)
(13)(12)	(13)(12)	I	(12)(13)	(13)(24)	(13)(14)	(24)(23)	(14)(23)	(12)(34)	(14)(12)	(14)(13)	(23)(24)	(12)(14)
(14)(12)	(14)(12)	(14)(13)	(14)(23)	(12)(14)	I	(13)(24)	(23)(24)	(13)(12)	(12)(34)	(13)(14)	(12)(13)	(24)(23)
(12)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(24)(23)	I	(14)(12)	(12)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(14)	(23)(24)	(14)(13)	(13)(12)
(14)(13)	(14)(13)	(14)(23)	(14)(12)	(12)(34)	(24)(23)	(13)(14)	I	(13)(24)	(12)(13)	(13)(12)	(12)(14)	(23)(24)
(13)(14)	(13)(14)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(12)	(13)(24)	I	(14)(13)	(12)(14)	(14)(23)	(14)(12)	(24)(23)	(12)(13)
(24)(23)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(24)	(14)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(12)	(23)(24)	I	(12)(13)	(13)(14)	(14)(12)
(23)(24)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(14)	(14)(23)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(24)	I	(24)(23)	(12)(14)	(13)(12)	(14)(13)
(12)(34)	(12)(34)	(13)(14)	(23)(24)	(24)(23)	(14)(13)	(12)(14)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(12)	I	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(14)	(13)(12)	(23)(24)	(14)(12)	(12)(13)	(14)(13)	(14)(23)	I	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(14)(12)	(14)(13)	(12)(13)	(23)(24)	(13)(12)	(24)(23)	(13)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(12)(34)	I

Figura 1: Tábua do grupo A_4

Fonte: Os autores.

Mas ao construir a tábua, obtivemos os seguintes subgrupos:

$$\{Id\}$$

$$\{Id, (13)(24)\}$$

$$\{Id, (12)(34)\}$$

$$\{Id, (14)(23)\}$$

$$\{Id, (12)(13), (13)(12)\}$$

$$\{Id, (12)(14), (14)(12)\}$$

$$\{Id, (13)(14), (14)(13)\}$$

$$\{Id, (23)(24), (24)(23)\}$$

$$\{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$A_4$$

Observe que A_4 não possui subgrupo de ordem 6 , embora 6 I 12.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após perceber que a recíproca do Teorema de Lagrange não é válida, podemos nos questionar: Será possível determinar em quais casos de fato ela é válida? Se sim, como?

Assim, estudamos os Teoremas de Sylow, que respondem parcialmente o questionamento acima. Mas antes de enunciá-los, precisamos de algumas definições que serão utilizadas na demonstração desses teoremas. Todas as definições e teoremas desta seção podem ser encontrados em Garcia e Iequain (2013).

Definição 5.1: Seja G um grupo. O centro de G, denotado por Z(G), é o subconjunto Z(G) = x є G I xg = gx, ∀ g є G). Sabemos que Z(G) é um subgrupo de G.

Definição 5.2: Seja G um grupo e C um conjunto. A aplicação p: G → P(C) é dita uma representação de G no grupo das permutações de C se p é um homomorfismo de grupos.

Definição 5.3: Seja G um grupo e C um conjunto. Seja p:G →(C) uma representação de G e seja x є C.

- A *órbita* de x é o conjunto D(x) = {p(g)(x) I g є G}.
- O *estabilizador* de x é o conjunto de elementos de G que deixam o elemento x fixo, isto é, E(x) = {g є G I p(g)(x) = x}. O estabilizador E(x) é subgrupo de G.

Teorema 5.4: Seja p: G → P(C) uma representação do grupo G no grupo de permutações do conjunto C. Seja x є C. Então a aplicação ψ é uma bijeção:

$$\begin{aligned} \psi: \quad D(x) &\rightarrow \{Classes\ laterais\ \grave{a}\ esquerda\ de\ E(x)\ em\ G\} \\ \rho(g)(x) &\mapsto gE(x) \end{aligned}$$

Em particular, no caso de G ser finito, temos #(D(x)) = (G:E(x)) e que #(D(x)) divide ∘(G).

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 255.

Agora, considere um grupo G. Seja

$$\begin{aligned} I: \quad G &\rightarrow P(G) \\ g &\mapsto I_g:\ G \rightarrow G \\ &\qquad\qquad x \mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Seja x є G. A órbita D(x) = {Ig(x) I g є G} = {gxg^{-1} I g є G} de um elemento x є G nesta representação por conjugação se chama *classe de conjugação de x*, e se denota Cl (x). Os elementos de Cl (x) se chamam *conjugados* de x є G.

Observe que temos Cl(x) = {x} se e somente gxg^{-1} = x, ∀ g є G. Assim x є Z(G). O estabilizador E(x) = {g є G I Ig(x) = x} = {g є G I gxg^{-1} = x} = {g є G I g comuta com x} de um elemento x ϵ G nesta representação por conjugação se chama o centralizador de x, e se denota por Z(x).

Dessa forma, o teorema anterior nos dá o(Cl(x)) = #{Conjugados de x em G}= (G:Z(x)).

Naturalmente, o conjunto G é igual a união disjunta das classes de conjugação. Em cada classe escolhemos um representante x_α Então temos $o(G) = \sum_\alpha o(Cl(x_\alpha))$, logo

$$o(G) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) \qquad (1)$$

Essa igualdade se chama *a equação das classes de conjugação.* Por fim, seja G um grupo e C = {subgrupos de G}. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} I: \quad G &\to P(C) \\ g &\mapsto I_g : C \to C \\ &\qquad\quad H \mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

A órbita D(H) = {I_g(H) I gHg^{-1} I g ϵ G} de um subgrupo H se chama a classe de conjugação de H. Os elementos de D(H) se chamam os *subgrupos conjugados de H*. Observe que D(H) = {H} se e somente se H ◁ G.

O estabilizador E(H) = {g ϵ G I I_g(H) = (H)} = {g ϵ G I gHg^{-1} = H} se chama o *normalizador* de H em G e é denotado por N_g(H). Observe que N_g(H) é o maior subgrupo de G no qual H é normal e também N_g(H) se e somente se H ◁ G. Aqui temos #{conjugados de H em G} = (G:N_g(H)).

Estes conceitos introduzidos acima serão importantes para as demonstrações dos teoremas de Sylow. Mas antes de enunciar o primeiro Teorema de Sylow, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.5 (Cauchy): Seja G um grupo finito abeliano. Seja p um número primo que divide o(G). Então existe x ϵ G de ordem p.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 258.

Agora, apresentaremos o Primeiro Teorema de Sylow.

Teorema 5.6 (Primeiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$, com (p,b) = 1. Então, para cada n, 0 ≤ n ≤ m existe um subgrupo H de G tal que o(H) = p^n.

Demonstração: A prova também será feita por indução sobre o(G). Se o(G) = 1 o resultado é válido. Se o(G)>1 então vamos supor que para todos os grupos de ordem menor que o(G) o teorema é válido. Assim, vamos mostrar que para o(G) o teorema também vale.

Agora, seja n um inteiro positivo tal que $p^n \mid o(G)$. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

- Caso 1: Se existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, pela hipótese de indução sabemos que existe um subgrupo K de H de ordem p^n mas como H é subgrupo de G, concluímos que K é subgrupo de G e portanto o teorema está sendo válido.
- Caso 2: Se não existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, vamos considerar a Equação (1) determinada anteriormente:

$$o(G) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} (G : Z(x_\alpha))$$

Para cada $x_\alpha \notin Z(G)$, temos $Z(x_\alpha) \subsetneq G$, assim como supomos que não existe um subgrupo H de G tal que p^n divida $o(H)$, concluímos que $p^n \nmid o(Z(x\alpha))$ e consequentemente $p \mid (G:Z(x\alpha))$. Como $p \mid o(G)$ obtemos que $p \mid o(Z(G))$ Como Z(G) é grupo abeliano, sabemos pelo Lema de Cauchy que existe ao menos um elemento $x \in Z(G)$ tal que $x^p = e$. Como $x \in Z(G)$, x comuta com todos os elementos de G e dessa forma sabemos que $\langle x \rangle$ é um subgrupo normal de G. Assim, podemos considerar o grupo quociente $\frac{G}{\langle x \rangle}$. Sabemos que $o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right) < o(G)$ e pelo Teorema de Lagrange $p^{n-1} \mid o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right)$, já que $o(\langle x \rangle) = p$ e $p^n \mid o(G)$. Logo pela hipótese de indução sabemos que $\frac{G}{\langle x \rangle}$ possui um subgrupo K' tal que $o(K') = p^{n-1}$. Agora, considere o homomorfismo canônico $\phi: G \to \frac{G}{\langle x \rangle}$ e tome $K = \emptyset^{-1}(K')$. Então K é um subgrupo de G e $o(K) = o(\ker \emptyset) \cdot o(K') = o(\langle x \rangle) \cdot o(K') = p \cdot p^{n-1} = p^n$.

O resultado acima nos fornece a resposta parcial que estávamos procurando. Assim, sempre que for dada a ordem de um grupo, saberemos em quais casos é possível determinar a existência de ao menos um subgrupo com esta ordem: basta que a ordem do subgrupo dada seja uma potência de um primo p que divide a ordem de G. Quando ela for a maior potência que divide a ordem de G, os subgrupos com esta ordem recebem um nome especial:

Definição 5.7: Sejam G um grupo finito, p um número primo e p^m a maior potência de p que divide $o(G)$. Os subgrupos de G que têm ordem p^m são chamados de p-*subgrupos de Sylow.*

Observe que se p é um número primo que não divide $o(G)$., então {e} é o único p-subgrupo de Sylow.

Outra definição importante para os próximos resultados é:

Definição 5.8: Seja p um número primo. Um grupo G no qual todo elemento tem sua ordem igual a uma potência de p é chamado p-grupo.

Assim, os próximos Teoremas de Sylow vão além do questionamento que possuíamos e nos fornecem outras informações muito interessantes que merecem ser estudadas. Dessa forma, vamos enunciar primeiramente um lema que será necessário e depois os demais Teoremas de Sylow:

Lema 5.9: Sejam G um grupo finito e p um número primo. Sejam S um p-subgrupo de Sylow de G e P um p-subgrupo qualquer de G. Então $P\cap N_G(S) = P \cap S$.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 262.

Teorema 5.10 (Segundo Teorema de Sylow): Sejam G um grupo, p um número primo e n_p o número de p-subgrupos de de Sylow de G. Então:

a. Todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si. Em particular, um p-subgrupo de Sylow S de G é normal em G se e somente se S é o único p-subgrupo de Sylow de G. Neste caso S é um subgrupo característico de G.

b. Se P é um p-subgrupo de G, existe um p-subgrupo de Sylow S de G tal que $P \subseteq$ .s

c. Se S é um p-subgrupo de Sylow, temos $n_p = (G: N_G(S))$

Demonstração: Seja S um p-subgrupo de Sylow qualquer de G. Considere a representação por conjugação $p{:}G \rightarrow P(D)$, onde D representa o conjunto dos subgrupos de G Por definição, C = {conjugados de S} = $\{gSg^{-1} \mid g \in G\}$ é a órbita de S nesta representação. Assim, pelas equações já estudadas anteriormente temos $\circ(C) = (G: N_G(S))$

Itens a) e b): Precisamos mostrar que se P é um p-subgrupo qualquer de G, então P está contido em um conjugado de S em G. Assim, considere a representação

$$\begin{aligned} I: \quad P &\rightarrow P(C) \\ a &\mapsto I_a: C \rightarrow C \\ gSg^{-1} &\mapsto agSg^{-1}a^{-1} \end{aligned}$$

Vamos tomar todas as órbitas distintas $D_1, D_2, \ldots D_k$ desta representação e para cada órbita D_i vamos escolher um representante $S_i = g_iSg^{-1}_i$ em . Como C é a órbita de S na representação anterior, obtemos que $\circ(G) = \sum_{i=1}^{k} o(D_i)$ .Além disso, pelo Teorema 5.4 temos $\circ(D_i) = (P{:}E(S_i)) = (P{:}P \cap N_G(S_i))$ e pelo Lema 5.9, temos $(P{:}\ P \cap N_G(S_i)) = (P{:}\ P \cap S_i)$. Portanto, obtemos (C) = $\circ \sum_{i=1}^{k}(P{:}P \cap S_i)$ Das duas expressões obtidas para $\circ(C)$ temos que $(G{:}\ N_G(S)) = \sum_{i=1}^{k}(P{:}P \cap S_i)$

Cada parcela $(P : P \cap S_i)$ é igual a 1 ou a um múltiplo de p, pois P é um p-grupo. Como S é um p-subgrupo de Sylow, sabemos que (G:S) não contém fator p , logo p não divide (G: $N_G(S)$), já que $\circ(S)$ I $\circ(N_G(S))$. Consequentemente, existe i tal que p não divide (P: P ∩ S_i), assim (P: P ∩ S_i) = 1 e portanto P $\subseteq$ .S_i.

Item c): Pelo item a), temos {p-subgrupos de Sylow} = {conjugados de S}. Dessa forma concluímos que n_p = (G: $N_G(S)$).

Após obter as informações acima, temos condições de determinar algumas características do inteiro (G: $N_G(S)$). Elas não vão caracterizá-lo, mas serão suficientes para localizá-lo em um conjunto pequeno de divisores da $\circ$(G).

Teorema 5.11 (Terceiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m b$, com (p,b) Seja n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Então

- n_p divide b;
- $n_p \equiv 1\ (mod\ p)$.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 264.

Observe que os Teoremas de Sylow são muito importantes para garantir a existência de determinados subgrupos, bem como fornecer outras informações importantes a respeito dos elementos e até mesmo do grupo. Assim, apresentaremos algumas discussões a respeito dos Teoremas de Sylow utilizando exemplos.

Dessa forma, considere o grupo A_4. Nós já calculamos quais são seus subgrupos para cada uma das seguintes ordens: sabemos que há um subgrupo de ordem $1 = 2^0 = 3^0$ (que é {e}); subgrupos de ordem $2 = 2^1$, um subgrupo de ordem $4 = 2^2$ e subgrupos de ordem $3 = 3^1$. A existência de tais subgrupos está garantida pelo Primeiro Teorema de Sylow.

Observe também que, ao calcularmos, por exemplo, o normalizador do subgrupo H = (Id, (12)(13),(13)(12)} obtemos o próprio H. Como pelo Segundo Teorema de Sylow, n_p = (G: $N_G(S)$) , então n3 = (A_4: N_{A4} (H)), o que implica que $n_3 = (A_4 : H) = \frac{12}{3} = 4$ E, de fato há 4 3-subgrupos de Sylow. Da mesma forma, ao calcularmos $N_{A4}(K)$, onde K = {Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}, obtemos $N_{A4}(K)$, assim n2 = (G:$N_G(K)$) implica que n2 = (A_4:A_4) = 1, e de fato, há apenas um subgrupo de ordem $4 = 2^2$, que é o 2-subgrupo de Sylow de A_4 e pelo fato de ser único, é normal em A_4.

Também podemos ver outras aplicações dos Teoremas de Sylow ainda neste exemplo. Considere novamente H, que é um 3-subgrupo de Sylow. Sabemos que todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si, assim, basta tomar g= (12(14) por exemplo, e conseguiremos gerar o 3-subgrupo de Sylow J, onde J = gHg^{-1} = {Id, (13)(14),(14)(13)}. Podemos ver também que todos os 2-grupos do estão contidos em K que é o 2-subgrupo de Sylow.

Observe que todas essas informações facilitam a compreensão dos Teoremas de Sylow. Mas neste caso, nós já conhecíamos a estrutura do grupo dado, como todos os elementos se relacionam, os subgrupos que ele possui, etc.

Porém, nem sempre teremos tais informações. Neste caso, os Teoremas de Sylow são ferramentas que nos auxiliam a compreender melhor a estrutura do grupo. Por exemplo, considere um grupo G de ordem $56 = 2^3 \cdot 7$. Podemos mostrar que G possui um subgrupo normal de ordem 7 ou um subgrupo normal de ordem 8.

Para isso, vamos calcular n_7. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, $n_7 \mid 2^3 = 8$ logo $n_7 = 1,2,4$ ou 8. Mas $n_7 \equiv 1 \mathrm{mod}(7)$, logo concluímos que $n_7 = 1$ ou $n_7 = 8$. No primeiro caso, já temos o desejado, visto que se há apenas um 7-subgrupo de Sylow, ele será normal em G. Agora analisaremos o caso $n_7 = 8$. Assim, teremos 8 subgrupos distintos de ordem 7. Ao retirar o elemento neutro de cada subgrupo, restam $8 \cdot 6 = 48$ elementos de ordem 7, pois 7 é primo, assim tais subgrupos são cíclicos e os elementos são geradores. Como haviam inicialmente 56 elementos neste grupo, restam $56 - 48 = 8$ elementos. Sabemos pelo Primeiro Teorema de Sylow, que existe ao menos um subgrupo de ordem $2^3 = 8$ neste grupo. Como restaram exatamente 8 elementos, concluímos que G possui exatamente um subgrupo de ordem 8, o 2-subgrupo de Sylow, que será normal em G.

Agora, considere este outro exemplo. Seja G um grupo de ordem $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Através dos Teoremas de Sylow, podemos mostrar que G possui exatamente um subgrupo de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 19. Assim, vamos iniciar calculando n_5. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_5 divide $2^2 \cdot 19 = 76$, logo $n_5 = 1,2,4,19,38$ ou 76. Mas $n_5 \equiv 1(\mathrm{mod}5)$, logo concluímos que $n_5 = 1$ou $n_5 = 76$. Da mesma forma, vamos calcular n_{19} . Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_{19} divide $2^2 \cdot 5 = 20$, logo $n_{19} = 1,2,4,5,10$ ou 20. Mas $n^{19} \equiv 1\ (\mathrm{mod}19)$, assim $n_{19} = 1$ ou $n_{19} = 20$. Queremos mostrar que $n_5 = 1$ e $n_{19} = 1$.

Pelo Primeiro Teorema de Sylow, a existência de ao menos um subgrupo de cada ordem que divide a ordem do grupo está garantida. Assim, sejam H um subgrupo de G tal que $\circ(H) = 5$ e K um subgrupo de G tal que $(K) = 19$. Podemos concluir que ou $n_5 = 1$ ou $n_{19} = 1$ visto que se $n_5 = 76$, o grupo G possuiria $74 \cdot 4 = 304$ elementos de ordem 5, e se $n_{19} = 20$, G possuiria $20 \cdot 18 = 360$ elementos de ordem 19, totalizando $304 + 360 = 664$ elementos em G. Absurdo. Portanto, ou H ou K são normais em G e assim podemos considerar o subgrupo HK. Como H tem ordem 5, ele é cíclico, e da mesma forma, como K tem ordem 19, K também é cíclico. Logo $H \cap K = \{e\}$, e assim $\circ(HK) = \frac{o(H)\cdot o(K)}{o(H\cap K)} \Rightarrow o(HK) = \frac{5\cdot 19}{1} = 95.$

Agora, aplicaremos o Terceiro Teorema de Sylow no grupo HK. Como $\circ(HK) = 5 \cdot 19$, sabemos que $n_5 \mid 19$, logo $n_5 = 1$ ou $n_5 = 19$. Mas $n_5 \equiv 1(\mathrm{mod}5)$, logo concluímos que $n_5 = 1$. Da mesma forma, $n_{19} \mid 5$, assim $n_{19} = 1$ ou $n_{19} = 5$. Mas $n_{19} \equiv 1\ (\mathrm{mod}19)$ logo concluímos que $n_{19} = 1$. Assim, HK contém apenas um subgrupo de ordem 5, que necessariamente é H, e apenas um subgrupo de ordem 19 que necessariamente é K. Logo H é normal em HK, e assim HK $\subseteq$ $N_G(H)$ Dessa forma o(HK) o(NG(H)) , o que implica pelo Teorema de Lagrange que $(G{:}N_G(H)) \leq (G{:}HK)$ Como sabemos que (G: HK) = $\frac{o(G)}{o(HK)} = \frac{380}{95} = 4$ concluímos que $(G{:}\ N_G(H)) \leq 4$. Mas pelo Segundo Teorema de Sylow,$(G{:}N_G(H)) = n_p$, logo $n_5 = (G{:}\ N_G(H)) \leq 4$. Como inicialmente havíamos obtido que $n_5 = 1$ ou $n_5 = 76$, concluímos que $n_5 = 1$ Da mesma forma, como K é normal em HK, sabemos que NK $\subseteq$ $N_G(K)$, logo o(HK) $\leq$ o $(N_G(K))$ e assim $(G{:}\ N_G(K)) \leq (G{:}HK)$. Mas, como n_{19} = (G:NG(K)), concluímos que n_19≤4, logo como havíamos obtido que $n_{19} = 1$, ou $n_{19} = 20$, concluímos que n_{19} só pode ser 1. Assim G possui exatamente um subgrupo normal de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 19.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar os estudos acima, bem como construir a tábua e verificar que de fato o grupo A_4 não possui subgrupo de ordem 6, mas possui subgrupos próprios de ordem 2,3 e 4, podemos perceber as aplicações dos Teoremas de Sylow, visto que eles garantem a existência de determinados subgrupos (os p-subgrupos). Assim, podemos concluir que os Teoremas de Sylow são muito importantes para a Teoria de Grupos Finitos, pois além de garantir a existência de tais subgrupos, podem, a partir desses subgrupos, determinar outras características importantes sobre o grupo, como normalidade, ordem dos elementos, quantidade de subgrupos, entre outras.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

GARCIA, A.; IEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

ÍNDICE REMISSIVO

B

C

D

E

F

G

I

J

M

N

O

P

R

S

T

Atena Editora
2020