PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-71-3
DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Atena
Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compões esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 02/01/2020

Vitória Fenilli Vidaletti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/7257268287275091

Jahina Fagundes de Assis Hattori
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/3879634832607156

Thays Menegotto de Freitas
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/2016803922322022

RESUMO: Neste trabalho será realizado um estudo sobre o crescimento populacional da cidade de Tupãssi/PR ao longo do tempo, por meio da Modelagem Matemática. Serão utilizados o Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst, já existentes na literatura. O trabalho se iniciou com o estudo dos modelos que serão usados, e posteriormente a coleta de dados no site oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em seguida foram realizadas as simulações computacionais e uma comparação com os dados empíricos. Para a validação dos resultados utilizou-se do erro relativo e por meio dele pode-se concluir que o modelo que mais se adequa ao crescimento em questão é o modelo de Verhulst.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos Matemáticos; Crescimento Populacional; Malthus; Verhulst.

MATHEMATICAL MODELING APPLIED TO THE POPULATION GROWTH OF TUPÃSSI/PR CITY

ABSTRACT: This work will be carried out a study on the population growth of the city of Tupãssi/PR over time, by means of mathematical modeling. Will be used the model of Malthus and the model of the Verhulst, already existing in the literature. The work began with the study of models that will be used, and subsequently the data collection on the official website of the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). Then the computational simulations were performed and a comparison with the empirical data. For the validation of the results used the relative error and through him we can conclude that the model that best fits the growth in question is the model of the Verhulst.

KEYWORDS: Mathematical Models; Population Growth; Malthus; Verhulst.

1 I INTRODUÇÃO

A qualidade de vida tem sido uma preocupação constante nas sociedades mais contemporâneas, e um dos fatores preponderantes é o crescimento populacional. De acordo com Oliveira (2014), a compreensão dos fenômenos naturais e as leis que o delimitam tem sido causas persistentes na sociedade, buscando favorecer a qualidade de vida do ser humano em seu meio social. Por isso, é de grande importância averiguar alternativas, as quais retratam melhorias no desenvolvimento populacional e social. Visto que a população é um elemento político essencial que caracteriza uma comunidade e que, consequentemente, tornam-se necessários compreender a fim de tornar possível o planejamento econômico, social, cultural ou político.

Uma das alternativas para a previsão de situações que podem fazer parte do nosso cotidiano é a Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002), "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Isto é, a Matemática e a realidade são conjuntos disjuntos que podem ser levadas à interação por meio da Modelagem. Assim, utiliza-se a modelagem como suporte para aplicações das definições, teoremas e propriedades, resultando em modelos matemáticos que contribuem para a estimativa de vários aspectos de nosso cotidiano e mais especificamente para esse trabalho o de crescimento populacional. Para tanto, serão empregados esses modelos matemáticos de Malthus e de Vehuslt para estimar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelo de Malthus

De acordo com Henriques (2007), Thomas Robert Malthus, responsável pela criação do modelo malthusiano, nasceu dia 14 de Fevereiro de 1766 em Rookery, falecendo dia 23 de Dezembro de 1834 em Bath. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados por ele. Ao criar este modelo, em 1798, Malthus tinha em mente a preocupação com a alta taxa de natalidade que estava acontecendo, provocando assim um aumento significativo da população, o que consequentemente provocaria fome e miséria. Umas das soluções que ele propõe para esse problema é a redução da taxa de natalidade por parte dos governantes de cada país. Considerando essas informações, o modelo de Malthus assume que a taxa de variação da população é diretamente proporcional ao tamanho da população em um determinado instante de tempo. Para Malthus o modelo poderia ser utilizado pelos governadores para ter uma ideia do comportamento da população por um período de até 20 anos.

Vale ressaltar que, segundo Sodré (2007), o modelo de Malthus não é apropriado para descrever populações humanas, mas este tipo de modelo é utilizado em muitas outras situações, por ser um modelo do tipo exponencial.

Porém, segundo Pugens et al. (2012), este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que causa a morte de parte da população.

Para o uso dessa modelagem devem-se considerar alguns aspectos, como por exemplo,

- Não existem fatores inibidores;
- A quantidade de indivíduos reprodutores sempre se mantém constante durante o crescimento da população;
- A taxa de natalidade e de mortalidade é sempre constante.

Considerando os aspectos apresentados, seja P(t) a quantidade de indivíduos no instante t, $n > 0$ o coeficiente de natalidade, e $m > 0$ o coeficiente de mortalidade. O modelo pressupõe que as taxas de natalidade de mortalidade são proporcionais à população em determinado instante e é descrito pela equação de diferenças,

$$P(t+1) - P(t) = nP(t), \tag{1}$$

no caso de um crescimento, e pela equação,

$$P(t+1) - P(t) = -mP(t), \tag{2}$$

no caso de um decrescimento. Unificando as equações (1) e (2),

$$P(t+1) - P(t) = (n-m)P(t), \tag{3}$$

De acordo com o que foi descrito, tem-se que a taxa α de crescimento da população P (t) é sempre constante, e é obtida por meio da diferença entre a taxa de natalidade n e a taxa de mortalidade m, isto é,

$$\alpha = n - m$$

Tem-se,

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t) \tag{4}$$

Resolvendo o modelo,

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t) \tag{5}$$

assim,

$$P(t+1) = P(t)(\alpha+1) \tag{6}$$

com condição inicial $P(0) = P_0$.

Por indução tem-se,

$$\begin{cases} P(1) = (1+\alpha)P(0); \\ P(2) = (1+\alpha)P(1) = (1+\alpha)(1+\alpha)P(0) = (1+\alpha)^2P(0); \\ \vdots \\ P(t) = (1+\alpha)P(t-1) = \cdots = (1+\alpha)^tP(0) \end{cases} \tag{7}$$

Usando a condição inicial,

$$P_{0+1} = P_0(\alpha+1) \Longrightarrow P_1 = P_0(\alpha+1) \tag{8}$$

generalizando,

$$P_t = P_0(\alpha+1)^t \tag{9}$$

ou ainda,

$$P(t) = P_0e^{\ln(\alpha+1)t} \tag{10}$$

Portanto, conhecendo a população em t = 0 e o valor de t no instante desejado, isto é $P(0) = P_0$ e $P(t) = P_t$ é possível calcular a taxa demográfica no instante, fazendo,

$$\frac{P_t}{P_0} = (\alpha+1)^t \Longrightarrow \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} = \alpha+1 \Longrightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{11}$$

Modelo de Verhulst

De acordo com Tavoni (2013), Pierre François Verhulst foi um matemático belga que em 1838 introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando que a variação de crescimento depende da própria população em cada instante e satisfaz algumas propriedades.

Segundo Sodré (2007), a adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \tag{12}$$

podendo ser reescrito como,

$$\beta = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \quad (13)$$

sendo, r = n - m , com r > 0, n taxa de natalidade, m taxa de mortalidade e P_{oo} o valor de limite da população, isto é, o valor que P estabiliza.

Os valores de n e m devem ser obtidos realizando uma média das taxas de natalidade e mortalidade dos anos anteriores. O valor de P_{oo}, pode ser determinado através da comparação entre a linearização do Modelo de Verhust e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que o β(P) tende a zero quando o P tende a P_{oo} . Substituindo (13) em (12) e considerando que P(0) = P_0, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \Longrightarrow rP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) = \frac{dP}{dt} \\ P(0) = P_0, \quad r > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Deve-se observar que e, são ambas soluções para a equação diferencial obtida anteriormente. Agora, para encontrar as outras soluções, considerando e tem-se,

$$\frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = rdt \quad (15)$$

integrando ambos os membros da equação (15) obtém-se (16),

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = \int rdt \quad (16)$$

utilizando o método de frações parciais se adquire,

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = ln\left|\frac{P}{1-\frac{P}{P_\infty}}\right| \quad (17)$$

e

$$\int rdt = rt + c \quad (18)$$

portanto, a equação integral (16) fica na forma,

$$ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + c \quad (19)$$

usando a condição inicial ,P(0) = P_0

$$ln\left|\frac{P(0)}{1-\frac{P(0)}{P_\infty}}\right| = r.0 + c \quad (20)$$

$$c = ln\left|\frac{P_0}{1-\frac{P_0}{P_\infty}}\right| = ln\left|\frac{P_0}{\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty}}\right| = ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right| \quad (21)$$

logo,

$$ln\left|\frac{\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}}{\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}}\right| = rt \tag{22}$$

aplicando as propriedades de logarítmo e isolando P(t) obtém-se,

$$P(t) = \frac{P_0P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \tag{23}$$

considerando , pode-se isolar o valor de ,

$$r = \frac{-1}{t}.\left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln(P_\infty - P_0)\right] \tag{24}$$

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Crescimento Populacional

De acordo com IBGE (2017), na época da colonização, que ocorreu no século XVI, a região de Tupãssi era povoada por índios guaranis e possuía uma intensa extração de erva mate.

Em 30 de Janeiro de 1967 a pequena cidade do Oeste do Paraná se tornou um dos distritos do município de Assis Chateaubriand. Seu plebiscito ocorreu em 25 de Novembro de 1979 pela lei nº 7270 de 27 de Dezembro de 1979. Porém, foi apenas em 01 de Fevereiro de 1983 que a cidade se tornou município.

Tendo em vista a rápida criação do município sua população teve uma variação considerável. Diante do fato de ter sido parte do município de Assis Chateaubriand, a população inicial que era de 8829, por ação de diversos fatores, sejam eles, ambientais, habituais, naturais, financeiros e territoriais, foi decrescendo até o ano de 2007.

Visto que os modelos visam a estimativa do crescimento, serão utilizados os dados a partir do ano de 2007, tendo em vista que o crescimento da população começou neste ano.

Na Tabela 1 estão os dados da população referente aos respectivos anos de pesquisa do IBGE. Serão utilizados os dados coletados para exemplificar dois modelos estudados, sendo eles, o de Malthus e o de Verhulst.

Ano	População
2007	7755
2010	7997
2018	8128

Tabela 1: Senso da População de Tupãssi/PR

Fonte: IBGE

Modelo de Malthus

Vale ressaltar que para Tavoni (2013), o modelo de Malthus não considera a taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que pode causar a morte de parte da população. Para aplicar o modelo de Malthus precisa-se encontrar o α ou seja,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \qquad (25)$$

Escolhemos P_t = 7997 e P_0 = 7755, deste modo,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{7997}{7755}} - 1 \qquad (26)$$

$$\alpha = 0{,}0102955296 \qquad (27)$$

Descoberto o valor de α pode-se calcular segundo Malthus a população nos respectivos anos a partir do resultado,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(\alpha+1)t} \qquad (28)$$

Substituindo os valores, tem-se,

$$P_{(2010)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0{,}0102955296).3} \qquad (29)$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .\ e^{0{,}0102428916.3} \qquad (30)$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .\ e^{0{,}0307286749} \qquad (31)$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .1{,}0312056739 \qquad (32)$$

$$P_{(2010)} = 7997 \qquad (33)$$

$$P_{(2018)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0{,}0102955296).11} \qquad (34)$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ e^{0{,}0102428916.11} \qquad (35)$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ e^{0{,}1126718078} \qquad (36)$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ 1{,}1192645388 \qquad (37)$$

$$P_{(2018)} = 8680 \qquad (38)$$

Modelo de Verhulst

Para a aplicação deste modelo se faz necessário realizar um ajuste de curva, para isto dispõe-se dos pontos da Tabela 2,

P_n	P_{n+1}
7755	7997
7997	8128

Tabela 2: Pontos de ajuste de curva

Fonte: Autores (2019).

Utilizando o método ajuste de curvas do software Excel, tem-se a reta a seguir,

$$f(x) = 0{,}541x + 3799 \tag{39}$$

Tendo encontrado a reta que melhor se ajusta aos pontos acima, deve-se considerar $f(x) = x$, ponto fixo (p_∞),

$$x = 0{,}541x + 3799 \tag{40}$$

$$x - 0{,}541x = 3799 \tag{41}$$

$$x(1 - 0{,}541) = 3799 \tag{42}$$

$$x = \frac{3799}{(1 - 0{,}541)} \tag{43}$$

$$x = 8277 \tag{44}$$

Para encontrar o parâmetro *r*, foi utilizada a expressão encontrada na dedução do modelo de Verhulst, assim como deve-se considerar os valores para o tempo da Tabela 2.

$$r = \frac{-1}{t}.\left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln(P_\infty - P_0)\right] \tag{45}$$

Para t = 0, r não está definido.

Para t = 3

$$r = \frac{-1}{3}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997} - 1\right)\right) - \ln(8277 - 7755)\right] \tag{46}$$

$$r = \frac{-1}{3}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997} - 1\right)\right) - \ln(522)\right] \tag{47}$$

$$r \cong 0{,}217868886 \tag{48}$$

Para

$$r = \frac{-1}{11}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997}-1\right)\right) - \ln(8277-7755)\right] \quad (49)$$

$$r = \frac{-1}{11}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997}-1\right)\right) - \ln(522)\right] \quad (50)$$

$$r \cong 0{,}118245485 \quad (51)$$

Assim, obtém-se a Tabela a seguir,

t	r
3	0,217869
11	0,118245485

Tabela 3: Valores de r

Fonte: Autores (2019).

Para se descobrir o valor de r a ser utilizado precisa-se fazer uma média dos valores obtidos acima.

Assim, foi encontrado r = 0,168057242. Será utilizada todas as casas decimais para uma maior aproximação.

Então, encontra-se os parâmetros para substituí-los na equação de Verhulst.

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (52)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{(8277-7755)e^{-0{,}168057242.t} + 7755} \quad (53)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.t} + 7755} \quad (54)$$

Por fim, é necessário verificar o modelo encontrado. Para isto, basta substituir o tempo e assim encontrar o valor de P(t).

Para t = 3

$$P(3) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.3} + 7755} \quad (55)$$

$$P(3) = 7954 \quad (56)$$

Para t = 11

$$P(11) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.11} + 7755} \quad (57)$$

$$P(11) = 8190 \quad (58)$$

Comparação dos Modelos

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Malthus e Verhulst para todos os intervalos de tempo, como se pode visualizar na Tabela 4,

Ano	População	Malthus	Verhulst
2007	7755	7755	7755
2008	-	7835	7833
2009	-	7916	7898
2010	7997	7997	7954
2011	-	8079	8003
2012	-	8163	8004
2013	-	8247	8079
2014	-	8331	8109
2015	-	8417	8134
2016	-	8504	8156
2017	-	8591	8174
2018	8128	8680	8190

Tabela 4: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 1, os dados do modelo e os dados empíricos.

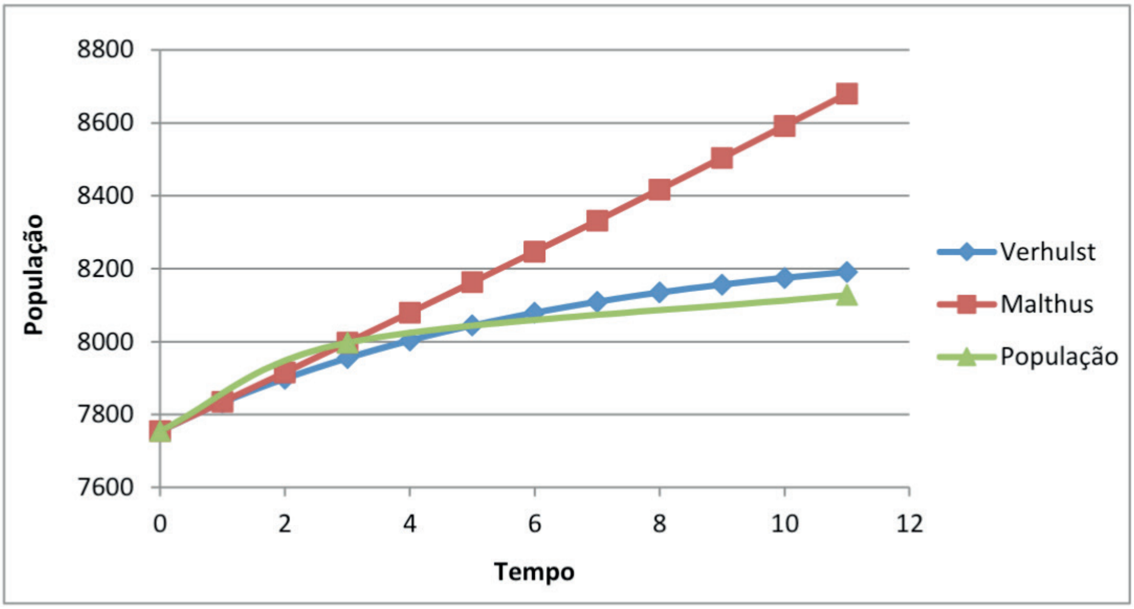

Figura 1: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos, procede-se com o cálculo do maior erro relativo. No modelo de Malthus foi encontrado um erro de 6,8%, já no Modelo de Verhulst encontrou-se um erro de 0,8%.

Analisando a Tabela 4, a Figura 1 e os erros obtidos para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequouaos dados reais da população de Tupãssi foi o modelo de Verhulst.

4 I CONCLUSÃO

Ao analisar o estudo aqui abordado, percebe-se que a modelagem matemática, é uma ferramenta importante para resolução de problemas do cotidiano, além de perceber quão interessantes podem ser os problemas aplicados que podem ser descritos ou resolvidos a partir de modelos matemáticos.

Desse modo, ao aplicar modelos de crescimento populacional para o estudo em questão tivemos a oportunidade de verificar a proximidade que eles promovem dos dados reais, visto que isso pode auxiliar os gestores e servir de base para tomada de decisões.

O modelo de Malthus deve ser usado para simular o crescimento em pequenos intervalos de tempo. Variando-se os parâmetros, o modelo de Verhulst simula bem a população brasileira. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da cidade de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro relativo constatado sendo de 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado nas aplicações do modelo de Malthus.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI R. C.: **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2002.

HENRIQUES, A.: **Thomas Robert Malthus, a teoria malthusiana.** Coimbra. 2007.

IBGE.: **História de Tupãssi.** 2017.

OLIVEIRA, V. A. B.: **O estudo da população na geografta escolar com o uso de tecnologias e metodologias diferenciadas.** PDE. 2014.

PUGENS, B. P. SILVA, JF. GODINHO, D.: **Modelos Matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados no município de Osório.** 2012.

SODRE, U. **Modelos Matemáticos.** Londrina. 2007.

TAVONI, R.: **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais.** Rio Claro. 2013.

ÍNDICE REMISSIVO

Atena
Editora

2020