

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)**

Atena
Editora
Ano 2020

2020 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do Texto © 2020 Os autores

Copyright da Edição © 2020 Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo

Edição de Arte: Lorena Prestes

Revisão: Os Autores



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federaci do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico

Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
 Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
 Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
 Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
 Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
 Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
 Prof. Ma. Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
 Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
 Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
 Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
 Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
 Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
 Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
 Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
 Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
 Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
 Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
 Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
 Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
 Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
 Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
 Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
 Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
 Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
 Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
 Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
 Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
 Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
 Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
 Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
 Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
 Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
 Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
 Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas
 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado
 Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-86002-71-3

DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e
 soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná - Brasil

www.atenaeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada “Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas” contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compõem esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR ENVOLVENDO TEMAS RELACIONADOS À SAÚDE	
Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves	
DOI 10.22533/at.ed.7132002041	
CAPÍTULO 2	13
O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO	
Wagner Gomes Barroso Abrantes Felipe da Silva Souza	
DOI 10.22533/at.ed.7132002042	
CAPÍTULO 3	26
REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Elisângela Guimarães Firmino Neivaldo Rodrigues dos Santos	
DOI 10.22533/at.ed.7132002043	
CAPÍTULO 4	38
O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Frederico Braidá Rodolfo Eduardo Vertuan Rodrigo Manoel Dias Andrade	
DOI 10.22533/at.ed.7132002044	
CAPÍTULO 5	49
O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: PRINCÍPIOS DA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL	
Júlio César Deckert da Silva Ruy César Pietropaolo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002045	
CAPÍTULO 6	61
ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW	
Adina Veronica Remor Wiliam Francisco de Araujo	
DOI 10.22533/at.ed.7132002046	
CAPÍTULO 7	75
A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS	
Bruno Luiz Silva Rodrighero Daiane Ferreira da Silva Rodrighero	
DOI 10.22533/at.ed.7132002047	

CAPÍTULO 8	86
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR	
Vitória Fenilli Vidaletti Jahina Fagundes de Assis Hattori Thays Menegotto de Freitas	
DOI 10.22533/at.ed.7132002048	
CAPÍTULO 9	98
MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE	
Santiago del Rio Oliveira André Luiz Salvat Moscato	
DOI 10.22533/at.ed.7132002049	
CAPÍTULO 10	110
MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE	
Samuel Conceição de Oliveira	
DOI 10.22533/at.ed.71320020410	
CAPÍTULO 11	120
ESPAÇO E FORMA: A FORMAÇÃO DO PEDAGOGO E A LEGISLAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Luciano Tadeu Corrêa Medeiros	
DOI 10.22533/at.ed.71320020411	
CAPÍTULO 12	133
ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL	
Ana Caroline de Almeida Silva João Vitor Teodoro Douglas Silva Maioli	
DOI 10.22533/at.ed.71320020412	
CAPÍTULO 13	142
O JOGO CORRIDA DE CAVALOS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA COMBINÁTORIA E DA PROBABILIDADE COM ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Patricia de Medeiros Silva Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos	
DOI 10.22533/at.ed.71320020413	
CAPÍTULO 14	153
DISCURSO DE ESTUDANTES DO 7º PERÍODO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA ACERCA DO ERRO DE ALUNOS RESOLVENDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS	
José Ferreira dos Santos Júnior Pedro Lucio Barboza	
DOI 10.22533/at.ed.71320020414	
CAPÍTULO 15	163
A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E O JOGO DE REGRAS MANCALA À LUZ DA TEORIA PIAGETIANA	
Maria Fernanda Maceira Mauricio Sidney Lopes Sanchez Júnior Francismara Neves de Oliveira	

Guilherme Aparecido de Godoi
DOI 10.22533/at.ed.71320020415

CAPÍTULO 16	178
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO PARA O MANEJO DE PLANTAS DANINHAS Elenice Weber Stiegelmeier DOI 10.22533/at.ed.71320020416	
SOBRE O ORGANIZADOR	189
ÍNDICE REMISSIVO	190

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 02/01/2020

Vitória Fenilli Vidaletti

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná

<http://lattes.cnpq.br/7257268287275091>

Jahina Fagundes de Assis Hattori

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná

<http://lattes.cnpq.br/3879634832607156>

Thays Menegotto de Freitas

Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Toledo - Paraná

<http://lattes.cnpq.br/2016803922322022>

RESUMO: Neste trabalho será realizado um estudo sobre o crescimento populacional da cidade de Tupãssi/PR ao longo do tempo, por meio da Modelagem Matemática. Serão utilizados o Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst, já existentes na literatura. O trabalho se iniciou com o estudo dos modelos que serão usados, e posteriormente a coleta de dados no site oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em seguida foram realizadas as simulações computacionais e uma comparação com os dados empíricos. Para

a validação dos resultados utilizou-se do erro relativo e por meio dele pode-se concluir que o modelo que mais se adequa ao crescimento em questão é o modelo de Verhulst.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos Matemáticos; Crescimento Populacional; Malthus; Verhulst.

MATHEMATICAL MODELING APPLIED TO
THE POPULATION GROWTH OF TUPÃSSI/
PR CITY

ABSTRACT: This work will be carried out a study on the population growth of the city of Tupãssi/PR over time, by means of mathematical modeling. Will be used the model of Malthus and the model of the Verhulst, already existing in the literature. The work began with the study of models that will be used, and subsequently the data collection on the official website of the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). Then the computational simulations were performed and a comparison with the empirical data. For the validation of the results used the relative error and through him we can conclude that the model that best fits the growth in question is the model of the Verhulst.

KEYWORDS: Mathematical Models; Population Growth; Malthus; Verhulst.

1 | INTRODUÇÃO

A qualidade de vida tem sido uma preocupação constante nas sociedades mais contemporâneas, e um dos fatores preponderantes é o crescimento populacional. De acordo com Oliveira (2014), a compreensão dos fenômenos naturais e as leis que o delimitam tem sido causas persistentes na sociedade, buscando favorecer a qualidade de vida do ser humano em seu meio social. Por isso, é de grande importância averiguar alternativas, as quais retratam melhorias no desenvolvimento populacional e social. Visto que a população é um elemento político essencial que caracteriza uma comunidade e que, conseqüentemente, tornam-se necessários compreender a fim de tornar possível o planejamento econômico, social, cultural ou político.

Uma das alternativas para a previsão de situações que podem fazer parte do nosso cotidiano é a Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002), “A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Isto é, a Matemática e a realidade são conjuntos disjuntos que podem ser levadas à interação por meio da Modelagem. Assim, utiliza-se a modelagem como suporte para aplicações das definições, teoremas e propriedades, resultando em modelos matemáticos que contribuem para a estimativa de vários aspectos de nosso cotidiano e mais especificamente para esse trabalho o de crescimento populacional. Para tanto, serão empregados esses modelos matemáticos de Malthus e de Verhulst para estimar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelo de Malthus

De acordo com Henriques (2007), Thomas Robert Malthus, responsável pela criação do modelo malthusiano, nasceu dia 14 de Fevereiro de 1766 em Rookery, falecendo dia 23 de Dezembro de 1834 em Bath. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados por ele. Ao criar este modelo, em 1798, Malthus tinha em mente a preocupação com a alta taxa de natalidade que estava acontecendo, provocando assim um aumento significativo da população, o que conseqüentemente provocaria fome e miséria. Uma das soluções que ele propõe para esse problema é a redução da taxa de natalidade por parte dos governantes de cada país. Considerando essas informações, o modelo de Malthus assume que a taxa de variação da população é diretamente proporcional ao tamanho da população

em um determinado instante de tempo. Para Malthus o modelo poderia ser utilizado pelos governadores para ter uma ideia do comportamento da população por um período de até 20 anos.

Vale ressaltar que, segundo Sodré (2007), o modelo de Malthus não é apropriado para descrever populações humanas, mas este tipo de modelo é utilizado em muitas outras situações, por ser um modelo do tipo exponencial.

Porém, segundo Pugens et al. (2012), este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que causa a morte de parte da população.

Para o uso dessa modelagem devem-se considerar alguns aspectos, como por exemplo,

- Não existem fatores inibidores;
- A quantidade de indivíduos reprodutores sempre se mantém constante durante o crescimento da população;
- A taxa de natalidade e de mortalidade é sempre constante.

Considerando os aspectos apresentados, seja $P(t)$ a quantidade de indivíduos no instante t , $n > 0$ o coeficiente de natalidade, e $m > 0$ o coeficiente de mortalidade. O modelo pressupõe que as taxas de natalidade de mortalidade são proporcionais à população em determinado instante e é descrito pela equação de diferenças,

$$P(t + 1) - P(t) = nP(t), \quad (1)$$

no caso de um crescimento, e pela equação,

$$P(t + 1) - P(t) = -mP(t), \quad (2)$$

no caso de um decrescimento. Unificando as equações (1) e (2),

$$P(t + 1) - P(t) = (n - m)P(t), \quad (3)$$

De acordo com o que foi descrito, tem-se que a taxa α de crescimento da população $P(t)$ é sempre constante, e é obtida por meio da diferença entre a taxa de natalidade n e a taxa de mortalidade m , isto é,

$$\alpha = n - m$$

Tem-se,

$$P(t + 1) - P(t) = \alpha P(t) \quad (4)$$

Resolvendo o modelo,

$$P(t + 1) = \alpha P(t) + P(t) \quad (5)$$

assim,

$$P(t + 1) = P(t)(\alpha + 1) \quad (6)$$

com condição inicial $P(0) = P_0$.

Por indução tem-se,

$$\begin{cases} P(1) = (1 + \alpha)P(0); \\ P(2) = (1 + \alpha)P(1) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)P(0) = (1 + \alpha)^2P(0); \\ \vdots \\ P(t) = (1 + \alpha)P(t-1) = \dots = (1 + \alpha)^tP(0) \end{cases} \quad (7)$$

Usando a condição inicial,

$$P_{0+1} = P_0(\alpha + 1) \Rightarrow P_1 = P_0(\alpha + 1) \quad (8)$$

generalizando,

$$P_t = P_0(\alpha + 1)^t \quad (9)$$

ou ainda,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(\alpha+1)t} \quad (10)$$

Portanto, conhecendo a população em $t = 0$ e o valor de t no instante desejado, isto é $P(0) = P_0$ e $P(t) = P_t$ é possível calcular a taxa demográfica no instante, fazendo,

$$\frac{P_t}{P_0} = (\alpha + 1)^t \Rightarrow \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (11)$$

Modelo de Verhulst

De acordo com Tavoni (2013), Pierre François Verhulst foi um matemático belga que em 1838 introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando que a variação de crescimento depende da própria população em cada instante e satisfaz algumas propriedades.

Segundo Sodré (2007), a adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \quad (12)$$

podendo ser reescrito como,

$$\beta = r \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) \quad (13)$$

sendo, $r = n - m$, com $r > 0$, n taxa de natalidade, m taxa de mortalidade e P_∞ o valor de limite da população, isto é, o valor que P estabiliza.

Os valores de n e m devem ser obtidos realizando uma média das taxas de natalidade e mortalidade dos anos anteriores. O valor de P_∞ , pode ser determinado através da comparação entre a linearização do Modelo de Verhust e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que o $\beta(P)$ tende a zero quando o P tende a P_∞ . Substituindo (13) em (12) e considerando que $P(0) = P_0$, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) \Rightarrow rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right) = \frac{dP}{dt} \\ P(0) = P_0, \quad r > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Deve-se observar que e, são ambas soluções para a equação diferencial obtida anteriormente. Agora, para encontrar as outras soluções, considerando e tem-se,

$$\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right)} = r dt \quad (15)$$

integrando ambos os membros da equação (15) obtém-se (16),

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right)} = \int r dt \quad (16)$$

utilizando o método de frações parciais se adquire,

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right)} = \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P_\infty}} \right| \quad (17)$$

e

$$\int r dt = rt + c \quad (18)$$

portanto, a equação integral (16) fica na forma,

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} \right| = rt + c \quad (19)$$

usando a condição inicial, $P(0) = P_0$

$$\ln \left| \frac{P(0)}{1 - \frac{P(0)}{P_\infty}} \right| = r \cdot 0 + c \quad (20)$$

$$c = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_0}{\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right| \quad (21)$$

logo,

$$\ln \left| \frac{\frac{P(t)P_{\infty}}{P_{\infty}-P(t)}}{\frac{P_0P_{\infty}}{P_{\infty}-P_0}} \right| = rt \quad (22)$$

aplicando as propriedades de logaritmo e isolando $P(t)$ obtém-se,

$$P(t) = \frac{P_0P_{\infty}}{(P_{\infty}-P_0)e^{-rt}+P_0} \quad (23)$$

considerando , pode-se isolar o valor de ,

$$r = \frac{-1}{t} \cdot \left[\ln \left(P_0 \left(\frac{P_{\infty}}{P_t} - 1 \right) \right) - \ln(P_{\infty} - P_0) \right] \quad (24)$$

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Crescimento Populacional

De acordo com IBGE (2017), na época da colonização, que ocorreu no século XVI, a região de Tupãssi era povoada por índios guaranis e possuía uma intensa extração de erva mate.

Em 30 de Janeiro de 1967 a pequena cidade do Oeste do Paraná se tornou um dos distritos do município de Assis Chateaubriand. Seu plebiscito ocorreu em 25 de Novembro de 1979 pela lei nº 7270 de 27 de Dezembro de 1979. Porém, foi apenas em 01 de Fevereiro de 1983 que a cidade se tornou município.

Tendo em vista a rápida criação do município sua população teve uma variação considerável. Diante do fato de ter sido parte do município de Assis Chateaubriand, a população inicial que era de 8829, por ação de diversos fatores, sejam eles, ambientais, habituais, naturais, financeiros e territoriais, foi decrescendo até o ano de 2007.

Visto que os modelos visam a estimativa do crescimento, serão utilizados os dados a partir do ano de 2007, tendo em vista que o crescimento da população começou neste ano.

Na Tabela 1 estão os dados da população referente aos respectivos anos de pesquisa do IBGE. Serão utilizados os dados coletados para exemplificar dois modelos estudados, sendo eles, o de Malthus e o de Verhulst.

Ano	População
2007	7755
2010	7997
2018	8128

Tabela 1: Senso da População de Tupãssi/PR

Fonte: IBGE

Modelo de Malthus

Vale ressaltar que para Tavoni (2013), o modelo de Malthus não considera a taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que pode causar a morte de parte da população. Para aplicar o modelo de Malthus precisa-se encontrar o α ou seja,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (25)$$

Escolhemos $P_t = 7997$ e $P_0 = 7755$, deste modo,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{7997}{7755}} - 1 \quad (26)$$

$$\alpha = 0,0102955296 \quad (27)$$

Descoberto o valor de α pode-se calcular segundo Malthus a população nos respectivos anos a partir do resultado,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(\alpha+1)t} \quad (28)$$

Substituindo os valores, tem-se,

$$P_{(2010)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0,0102955296).3} \quad (29)$$

$$P_{(2010)} = 7755 \cdot e^{0,0102428916.3} \quad (30)$$

$$P_{(2010)} = 7755 \cdot e^{0,0307286749} \quad (31)$$

$$P_{(2010)} = 7755 \cdot 1,0312056739 \quad (32)$$

$$P_{(2010)} = 7997 \quad (33)$$

$$P_{(2018)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0,0102955296).11} \quad (34)$$

$$P_{(2018)} = 7755 \cdot e^{0,0102428916.11} \quad (35)$$

$$P_{(2018)} = 7755 \cdot e^{0,1126718078} \quad (36)$$

$$P_{(2018)} = 7755 \cdot 1,1192645388 \quad (37)$$

$$P_{(2018)} = 8680 \quad (38)$$

Modelo de Verhulst

Para a aplicação deste modelo se faz necessário realizar um ajuste de curva, para isto dispõe-se dos pontos da Tabela 2,

P_n	P_{n+1}
7755	7997
7997	8128

Tabela 2: Pontos de ajuste de curva

Fonte: Autores (2019).

Utilizando o método ajuste de curvas do software Excel, tem-se a reta a seguir,

$$f(x) = 0,541x + 3799 \quad (39)$$

Tendo encontrado a reta que melhor se ajusta aos pontos acima, deve-se considerar $f(x) = x$, ponto fixo (p_∞),

$$x = 0,541x + 3799 \quad (40)$$

$$x - 0,541x = 3799 \quad (41)$$

$$x(1 - 0,541) = 3799 \quad (42)$$

$$x = \frac{3799}{(1 - 0,541)} \quad (43)$$

$$x = 8277 \quad (44)$$

Para encontrar o parâmetro r , foi utilizada a expressão encontrada na dedução do modelo de Verhulst, assim como deve-se considerar os valores para o tempo da Tabela 2.

$$r = \frac{-1}{t} \cdot \left[\ln \left(P_0 \left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1 \right) \right) - \ln(P_\infty - P_0) \right] \quad (45)$$

Para $t = 0$, r não está definido.

Para $t = 3$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln(8277 - 7755) \right] \quad (46)$$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln(522) \right] \quad (47)$$

$$r \cong 0,217868886 \quad (48)$$

Para

$$r = \frac{-1}{11} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln(8277 - 7755) \right] \quad (49)$$

$$r = \frac{-1}{11} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln(522) \right] \quad (50)$$

$$r \cong 0,118245485 \quad (51)$$

Assim, obtém-se a Tabela a seguir,

t	r
3	0,217869
11	0,118245485

Tabela 3: Valores de r

Fonte: Autores (2019).

Para se descobrir o valor de r a ser utilizado precisa-se fazer uma média dos valores obtidos acima.

Assim, foi encontrado $r = 0,168057242$. Será utilizada todas as casas decimais para uma maior aproximação.

Então, encontra-se os parâmetros para substituí-los na equação de Verhulst.

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (52)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{(8277 - 7755)e^{-0,168057242.t} + 7755} \quad (53)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{520e^{-0,168057242.t} + 7755} \quad (54)$$

Por fim, é necessário verificar o modelo encontrado. Para isto, basta substituir o tempo e assim encontrar o valor de $P(t)$.

Para $t = 3$

$$P(3) = \frac{7755.8277}{520e^{-0,168057242.3} + 7755} \quad (55)$$

$$P(3) = 7954 \quad (56)$$

Para $t = 11$

$$P(11) = \frac{7755.8277}{520e^{-0,168057242.11} + 7755} \quad (57)$$

$$P(11) = 8190 \quad (58)$$

Comparação dos Modelos

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Malthus e Verhulst para todos os intervalos de tempo, como se pode visualizar na Tabela 4,

Ano	População	Malthus	Verhulst
2007	7755	7755	7755
2008	-	7835	7833
2009	-	7916	7898
2010	7997	7997	7954
2011	-	8079	8003
2012	-	8163	8004
2013	-	8247	8079
2014	-	8331	8109
2015	-	8417	8134
2016	-	8504	8156
2017	-	8591	8174
2018	8128	8680	8190

Tabela 4: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 1, os dados do modelo e os dados empíricos.

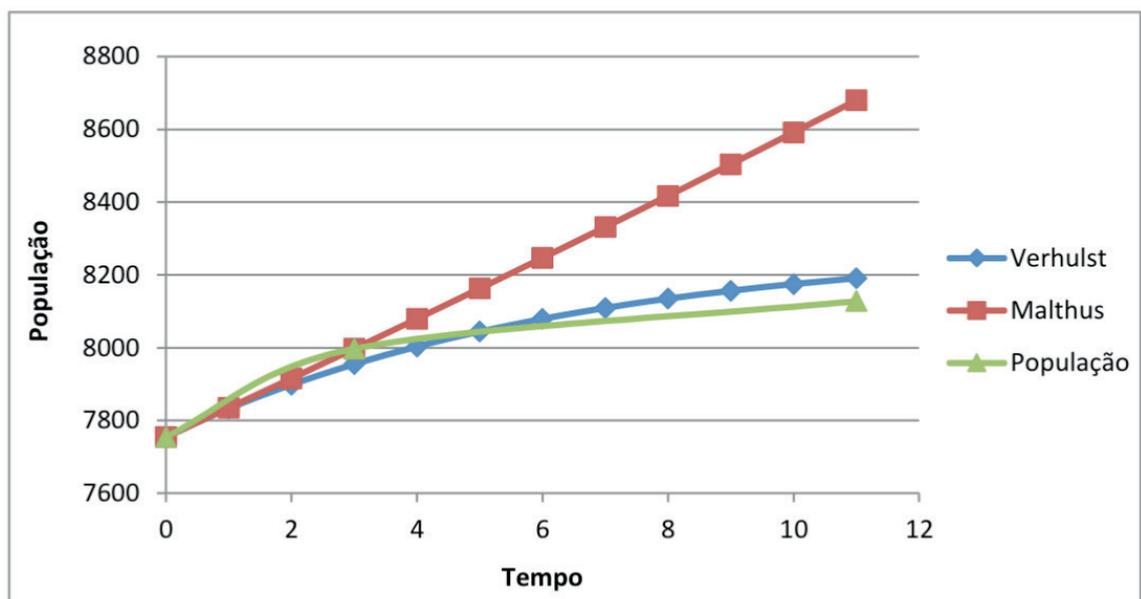


Figura 1: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos, procede-se com o cálculo do maior erro relativo. No modelo de Malthus foi encontrado um erro de 6,8%, já no Modelo de Verhulst encontrou-se um erro de 0,8%.

Analisando a Tabela 4, a Figura 1 e os erros obtidos para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequou aos dados reais da população de Tupãssi foi o modelo de Verhulst.

4 | CONCLUSÃO

Ao analisar o estudo aqui abordado, percebe-se que a modelagem matemática, é uma ferramenta importante para resolução de problemas do cotidiano, além de perceber quão interessantes podem ser os problemas aplicados que podem ser descritos ou resolvidos a partir de modelos matemáticos.

Desse modo, ao aplicar modelos de crescimento populacional para o estudo em questão tivemos a oportunidade de verificar a proximidade que eles promovem dos dados reais, visto que isso pode auxiliar os gestores e servir de base para tomada de decisões.

O modelo de Malthus deve ser usado para simular o crescimento em pequenos intervalos de tempo. Variando-se os parâmetros, o modelo de Verhulst simula bem a população brasileira. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da cidade de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro relativo constatado sendo de 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado nas aplicações do modelo de Malthus.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI R. C.: **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2002.

HENRIQUES, A.: **Thomas Robert Malthus, a teoria malthusiana**. Coimbra. 2007.

IBGE.: **História de Tupãssi**. 2017.

OLIVEIRA, V. A. B.: **O estudo da população na geografia escolar com o uso de tecnologias e metodologias diferenciadas**. PDE. 2014.

PUGENS, B. P. SILVA, JF. GODINHO, D.: **Modelos Matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados no município de Osório**. 2012.

SODRE, U. **Modelos Matemáticos**. Londrina. 2007.

TAVONI, R.: **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais.** Rio Claro. 2013.

ÍNDICE REMISSIVO

B

Bioprocessos 110, 111, 118
Blocos de Montar 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47

C

Combinatória 123, 142, 143, 144, 146, 148, 149, 150, 151, 152
Construção do Conhecimento 45, 161, 163, 165
Crescimento Populacional 86, 87, 91, 96, 97

D

Discurso 5, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161

E

Educação Financeira 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36
Estatística 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 42, 55, 57, 86, 122, 123, 189

F

Funções 13, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 43, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 64, 66, 75, 76, 80, 81, 82, 84, 107, 177
Futuros Professores 5, 153, 155, 156, 158, 159, 160

G

Geometria 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 120, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 132

I

Interdisciplinaridade 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 189

J

Jogos 32, 34, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 126, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 159, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 176, 177

M

Manejo De Plantas Daninhas 178, 180, 182, 183, 187
Matemática Aplicada à Engenharia 98
Matemática Financeira 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34
Modelagem Matemática 58, 86, 87, 96, 110, 111, 113
Modelos Matemáticos 86, 87, 96, 98, 100

N

Números Complexos 55, 56, 57, 75, 76, 79, 80, 82, 83, 84

O

Otimização 178, 180, 182, 187, 188

P

Pensamento Matemático Avançado 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25

Plano Complexo 57, 75, 76, 82, 83, 84

Probabilidade 4, 11, 42, 55, 122, 123, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 150, 151, 152

Programação não Linear 178, 180, 183, 187

R

Reforma Curricular 49, 50, 51, 54, 55, 60

S

Séries Iniciais 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 176

Solidificação 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108

T

Teorema de Lagrange 61, 62, 65, 66, 67, 70, 74

Teoria de Grupos 61, 62, 63, 65, 74

Transformações Geométricas 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60

 **Atena**
Editora

2 0 2 0